

**TEOREMA** Il prodotto di una successione infinitesima per una successione limitata è infinitesimo.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sin n}{n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \underbrace{(\sin n)}_{\text{limitata}} \underbrace{\left(\frac{1}{n}\right)}_{\text{infinitesima}} = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3 \sin^4(n^2) - 5 \operatorname{arctg} n}{n^2 + 2} =$$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} \underbrace{(3 \sin^4(n^2) - 5 \operatorname{arctg} n)}_{\text{limitata}} \cdot \underbrace{\frac{1}{n^2 + 2}}_{\downarrow 0} = 0.$$

OSS  $\frac{1}{n^2 + 2} \rightarrow 0$

$$0 < \frac{1}{n^2 + 2} < \frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{n} \xrightarrow{n \geq 1} 0$$

OSS  $3 \sin^4(n^2) - 5 \operatorname{arctg} n$  è limitata.

$$|3 \sin^4(n^2) - 5 \operatorname{arctg} n| \leq$$

[uso la dis. triangolare  $|a+b| \leq |a| + |b| \quad \forall a, b \in \mathbb{R}$ ]

$$\leq |3 \sin^4(n^2)| + |5 \operatorname{arctg} n| =$$

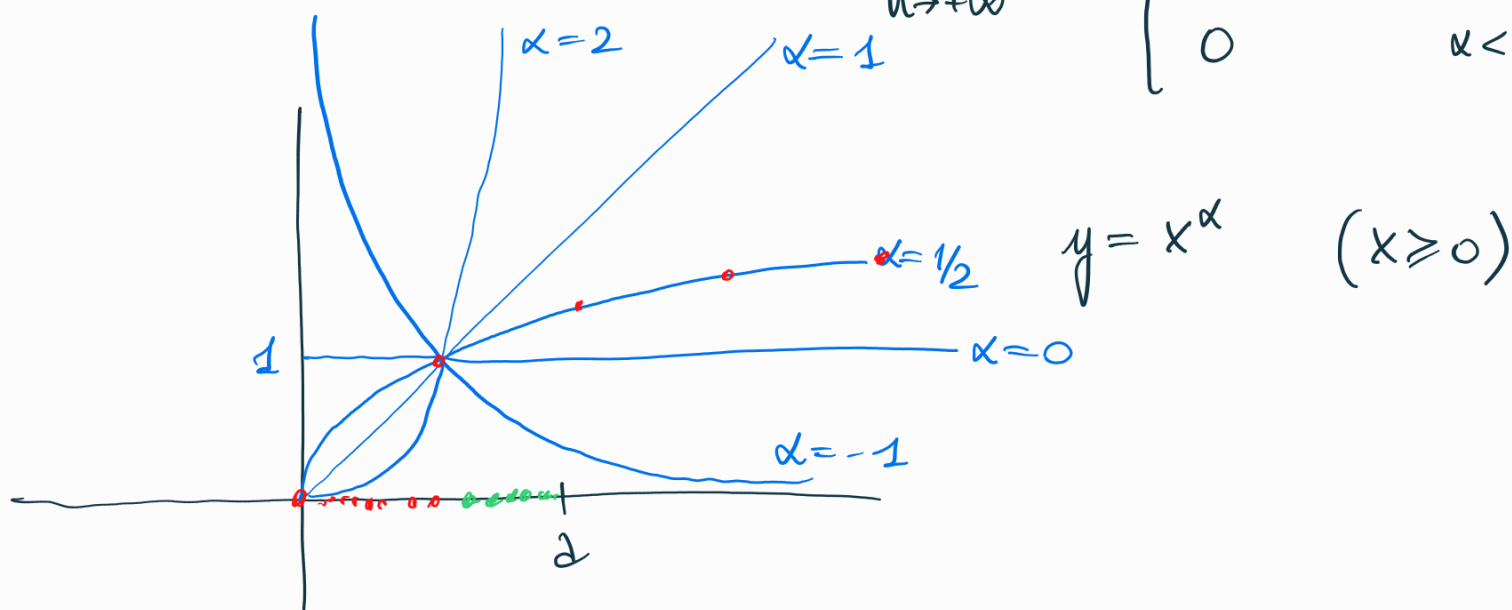
$$= 3 \underbrace{\sin^4(n^2)}_{\leq 1} + 5 \underbrace{|\operatorname{arctg} n|}_{\leq \pi/2} \leq 3 + \frac{5}{2} \pi \quad \forall n$$

Ricordo che una successione  $\{a_n\}$  è limitata (quindi limitata sup. e inferiormente) se e solo se  $\exists M \geq 0$  t.c.

$$|a_n| \leq M \quad \forall n$$

Limiti di potenze Sia  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n^\alpha = \begin{cases} +\infty & \alpha > 0 \\ 1 & \alpha = 0 \\ 0 & \alpha < 0 \end{cases}$$



• Verifica per  $\alpha > 0$ .

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n^\alpha = +\infty.$$

Fisso  $M > 0$ , cerco  $k$  t.c.  $\forall n > k \quad n^\alpha > M$ .

$$n^\alpha > M \iff n > M^{1/\alpha} =: k.$$

elevo alla  $\frac{1}{\alpha} > 0$

•  $\alpha < 0 \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} n^\alpha = 0$ .

Fisso  $\varepsilon > 0$  cerco  $k$  t.c.  $\forall n > k \quad |n^\alpha| < \varepsilon$ .

$$n^\alpha < \varepsilon \iff n > \varepsilon^{1/\alpha} =: k.$$

elevo alla  $\frac{1}{\alpha} < 0$

La stessa dim. permette di concludere che, se  $a_n \rightarrow +\infty$

allora

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (a_n)^\alpha = \begin{cases} +\infty & \text{se } \alpha > 0 \\ 1 & \text{se } \alpha = 0 \\ 0 & \text{se } \alpha < 0. \end{cases}$$

$(\alpha > 0)$

$$(a_n)^\alpha > M \Leftrightarrow a_n > M^{1/\alpha}$$

vera definita perché  $a_n \rightarrow +\infty$

---

Adesso supponiamo  $a_n > 0$ ,  $a_n \rightarrow 0$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (a_n)^\alpha = \begin{cases} 0 & \text{se } \alpha > 0 \\ 1 & \text{se } \alpha = 0 \\ +\infty & \text{se } \alpha < 0. \end{cases}$$

Supponiamo  $\alpha > 0$ ,  $a_n \rightarrow 0$ . ( $a_n > 0$ )

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (a_n)^\alpha = 0$$

Fisso  $\varepsilon > 0$ , cerco  $k$  t.c.  $\forall n > k$   $(a_n)^\alpha < \varepsilon$

$$(a_n)^\alpha < \varepsilon \Leftrightarrow a_n < \underbrace{\varepsilon^{1/\alpha}}_0 \quad \text{vero definitivamente}$$

---

$$a_n \rightarrow a > 0 \quad a \in (0, +\infty)$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (a_n)^\alpha = a^\alpha$$

$$a_n \rightarrow 3 \quad \alpha = 3/4$$

$$\Rightarrow (a_n)^{3/4} \rightarrow 3^{3/4}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{n^4 + 3n^2 + 2} = \lim_{n \rightarrow +\infty} (n^4 + 3n^2 + 2)^{1/3} = +\infty$$

$$n^4 + 3n^2 + 2 \geq n^4 \rightarrow +\infty$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \frac{3n-2}{n} \right)^{-5} = 3^{-5} = \frac{1}{3^5}$$

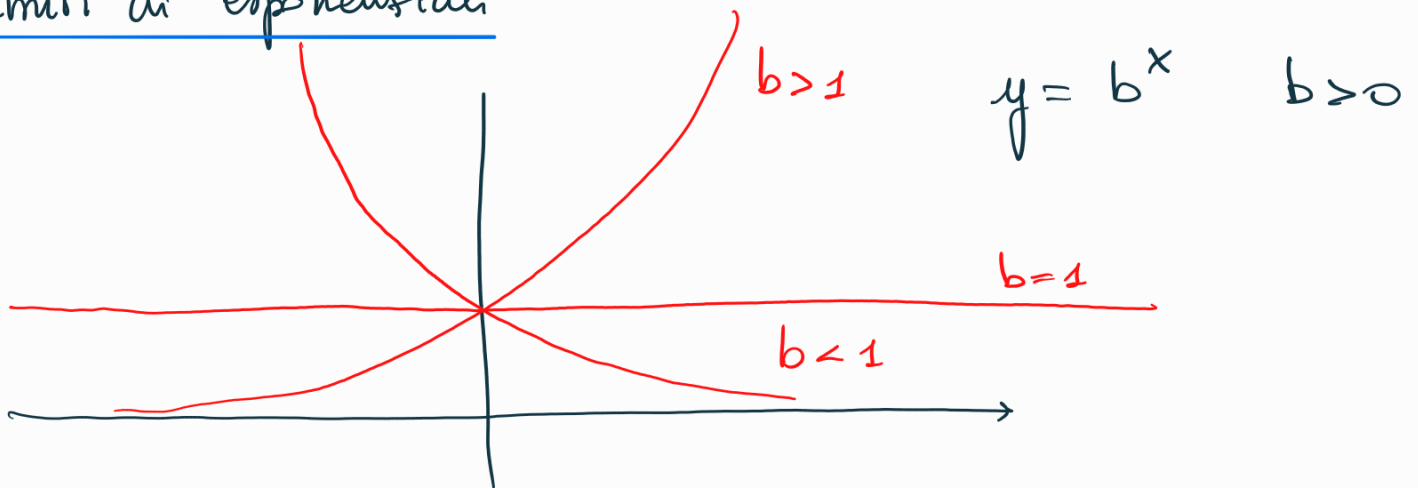
$$\frac{3n-2}{n} = 3 - \frac{2}{n} \rightarrow 3$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \frac{3n-2}{n^2} \right)^{-5} = +\infty$$

$$\frac{1}{n} \cdot \left( 3 - \frac{2}{n} \right) \rightarrow 0$$

$\downarrow$   
 0      limbo

### Limiti di esponenziali



Se  $d_n \rightarrow +\infty$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} b^{d_n} = \begin{cases} +\infty & b > 1 \\ 1 & b = 1 \\ 0 & 0 < b < 1 \end{cases}$$

Verifica per  $b > 1$ .  $\lim_{n \rightarrow +\infty} b^{d_n} = +\infty$ .

Fisso  $M > 0$ , cerco  $k$  t.c.  $\forall n > k \quad b^{d_n} > M$ .

$$b^{a_n} > M \iff a_n > \log_b M \quad \text{va delfe perché } a_n \rightarrow +\infty$$

applico  $\log_b$  a entrambi i membri (poiché  $b > 1$ , è crescente)

Se invece  $a_n \rightarrow -\infty$ , allora

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} b^{a_n} = \begin{cases} 0 & \text{se } b > 1 \\ 1 & \text{se } b = 1 \\ +\infty & \text{se } 0 < b < 1 \end{cases}$$

Se invece  $a_n \rightarrow a \in \mathbb{R}$ , allora

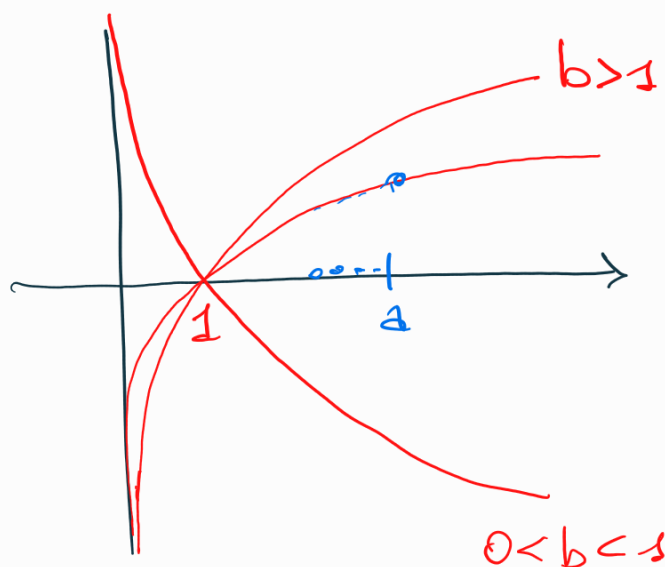
$$\lim_{n \rightarrow +\infty} b^{a_n} = b^a \quad \forall b > 0$$

Esempio  $\lim_{n \rightarrow +\infty} 2^{3/n} = 1$

Limiti di logaritmi:

$$y = \log_b x$$

$$b > 0, b \neq 1$$



$$\boxed{a_n > 0}$$

1) se  $a_n \rightarrow +\infty$ , allora.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \log_b a_n = \begin{cases} +\infty \\ -\infty \end{cases}$$

se  $b > 1$

se  $0 < b < 1$ .

2) se  $a_n \rightarrow 0$ , allora

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \log_b a_n = \begin{cases} -\infty & \text{se } b > 1 \\ +\infty & \text{se } 0 < b < 1. \end{cases}$$

3) se  $a_n \rightarrow a \in (0, +\infty)$ , allora

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \log_b a_n = \log_b a \quad \forall b > 0 \quad b \neq 1.$$

### TEOREMA (Aritmetica dei limiti)

Siano  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = l \in \mathbb{R}$ ,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = m \in \mathbb{R}$ . Allora:

1)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (a_n + b_n) = l + m$

2) se  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ , allora

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (\alpha a_n + \beta b_n) = \alpha l + \beta m.$$

(linearità del limite)

In particolare, se  $\alpha = 1$ ,  $\beta = -1$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (a_n - b_n) = l - m$$

3)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n b_n = lm$ .

4) se  $m \neq 0$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{b_n} = \frac{1}{m}$$

OSS se  $m \neq 0$ , allora

$b_n \neq 0$  def<sup>te</sup>  
(permanenza del segno)

5) se  $m \neq 0$ ,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{l}{m}$

$a_n \cdot \frac{1}{b_n}$

Esempio:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \underset{\substack{\downarrow \\ 2}}{2} - \frac{7}{n^{-3}+1} \right) = 2 - 7 = -5$$

$$n^{-3} \rightarrow 0 \Rightarrow n^{-3} + 1 \rightarrow 0 + 1 = 1$$

$$\frac{7}{n^{-3}+1} \rightarrow \frac{7}{1} = 7$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{5 - \underset{\substack{\rightarrow 0 \\ \rightarrow 5}}{3^{-n}}}{-1 + \underset{\substack{\text{"} n^{-1/2} \rightarrow 0 \text{"}}}{\frac{1}{\sqrt{n}}}} = \frac{5}{-1} = -5$$

Prima di dim. l'aritmetica dei limiti, ci serve un risultato importante.

TEOREMA 2 Sia  $\{a_n\}$  una succ<sup>te</sup> convergente  
(cioè:  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = l \in \mathbb{R}$ ).

Allora  $\{a_n\}$  è limitata.

OSS Non è vero il viceversa, cioè

~~"ogni succ<sup>te</sup> limitata è convergente"~~ **FALSA**

Infatti  $a_n = (-1)^n$  è limitata, ma non ha limite

Dim. TEOR. 2.  $a_n \rightarrow l \in \mathbb{R}$ .

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \bar{n} \in \mathbb{N} \text{ t.c.} \quad |a_n - l| < \varepsilon \quad \forall n \geq \bar{n}$$

Prendo  $\varepsilon = 1$ .

$$\Rightarrow \exists \bar{n} \in \mathbb{N} \text{ t.c.} \quad |a_n - l| < 1. \quad \forall n \geq \bar{n}.$$

$$\Rightarrow \text{se } n \geq \bar{n}$$

$$|a_n| = |(a_n - l) + l| \stackrel{\text{dis. triangolare}}{\leq} \underbrace{|a_n - l|}_{\uparrow 1} + |l| \leq |l| + 1$$

e per  $|a_0|, |a_1|, \dots, |a_{\bar{n}-1}|$ ?

*Sono un numero finito.*

Definisco  $M = \max \{ |a_0|, |a_1|, \dots, |a_{\bar{n}-1}|, |l| + 1 \}$

Affermo che  $|a_n| \leq M \quad \forall n \in \mathbb{N}$ .

$$\text{se } n \geq \bar{n} \quad |a_n| \leq |l| + 1 \leq M$$

$$n=0 \quad |a_0| \leq M$$

$$n=1 \quad |a_1| \leq M$$

— — — — —

$$n = \bar{n} - 1 \quad |a_{\bar{n}-1}| \leq M$$

□

Dim Aritmetica dei limiti.

1) Limite della somma.

Hyp. del teorema

Hyp 1  $\forall \varepsilon_1 > 0 \quad |a_n - l| < \varepsilon_1 \quad \text{def}^{\text{te}}$

Hyp 2  $\forall \varepsilon_2 > 0 \quad |b_n - m| < \varepsilon_2 \quad \text{def}^{\text{te}}.$

Tesi  $\forall \varepsilon > 0 \quad |(a_n + b_n) - (l + m)| < \varepsilon \quad \text{def}^{\text{te}}$

$$|(a_n + b_n) - (l + m)| = |(a_n - l) + (b_n - m)| \stackrel{\text{dis. triangolare}}{\leq}$$

$$\leq |a_n - l| + |b_n - m| \stackrel{\text{def}^{\text{te}}}{<} \overset{\wedge}{\varepsilon/2} \text{def}^{\text{te}} + \overset{\wedge}{\varepsilon/2} \text{def}^{\text{te}} = \varepsilon$$

Prendo  $\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{2} > 0$  nell'ip. 1.  $\Rightarrow |a_n - l| < \frac{\varepsilon}{2} \text{def}^{\text{te}}$

"  $\varepsilon_2 = \frac{\varepsilon}{2} > 0$  " " 2.  $\Rightarrow |b_n - m| < \frac{\varepsilon}{2} \text{def}^{\text{te}}$

2)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (\alpha a_n + \beta b_n) = \alpha l + \beta m$

$$\begin{array}{ccc} \alpha a_n & + & \beta b_n \\ \downarrow & & \downarrow \\ \alpha l & & \beta m \end{array} \xrightarrow{(1)} \alpha l + \beta m \quad \square$$

to be continued...