

Oggi esercitazione ore 17-19 aula 6.

Riassumiamo quanto visto la scorsa lezione.

Def. di limite di successioni.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = l \in \mathbb{R}^* \iff \forall U \text{ intorno di } l \quad a_n \in U \text{ definitivamente}$$

Si "particolarizza" nel caso di $l \in \mathbb{R}$, $l = +\infty$, $l = -\infty$:

- $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = l \in \mathbb{R} \iff \forall \varepsilon > 0 \exists k \text{ t.c. } |a_n - l| < \varepsilon \quad \forall n > k.$
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = +\infty \iff \forall M > 0 \exists k \text{ t.c. } a_n > M \quad \forall n > k.$
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = -\infty \iff \forall M > 0 \exists k \text{ t.c. } a_n < -M \quad \forall n > k.$

Verifica di $\lim_{n \rightarrow +\infty} \underbrace{\frac{(-1)^n}{n}}_{a_n} = 0.$

$$a_n = \frac{(-1)^n}{n} \quad -1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{5}, \dots$$

Verifica.

Fissato $\varepsilon > 0$, cerco k t.c. $\forall n > k \quad \left| \frac{(-1)^n}{n} - 0 \right| < \varepsilon$

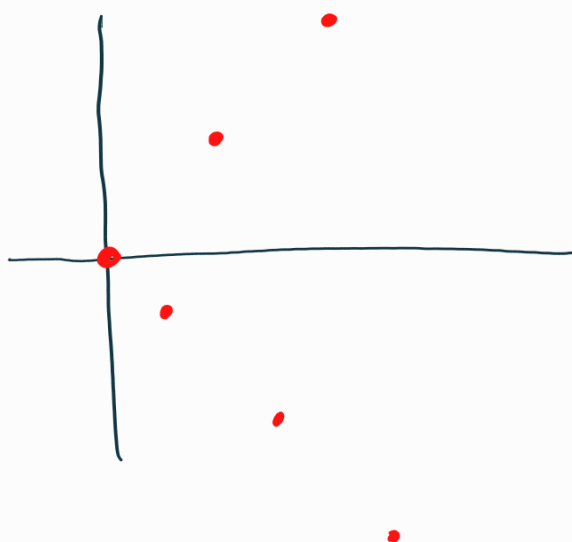
$$\left| \frac{(-1)^n}{n} \right| = \frac{1}{n} < \varepsilon \iff n > \frac{1}{\varepsilon} =: k.$$

Successioni che non hanno limite.

$$(-1)^n \quad (\text{già visto})$$

$$(-1)^n n$$

$$0, -1, 2, -3, 4, -5, \dots$$



$d_n = \sin n$ non ha limite. (vedi figura a pagina successiva)

Esempio importante

$$b \in \mathbb{R}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} b^n = \begin{cases} +\infty & \text{se } b > 1 \\ 1 & \text{se } b = 1 \text{ (la succ}^{\text{a}} \text{ è costante)} \\ 0 & \text{se } -1 < b < 1 \\ \text{non esiste} & \text{se } b \leq -1 \end{cases}$$

Dim

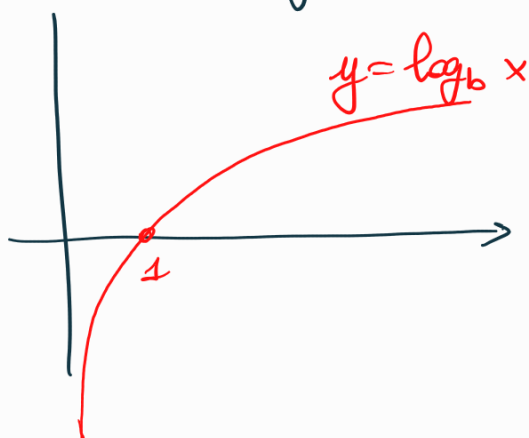
$$b > 1.$$

Fisso $M > 0$, cerco k t.c. $b^n > M \quad \forall n > k$

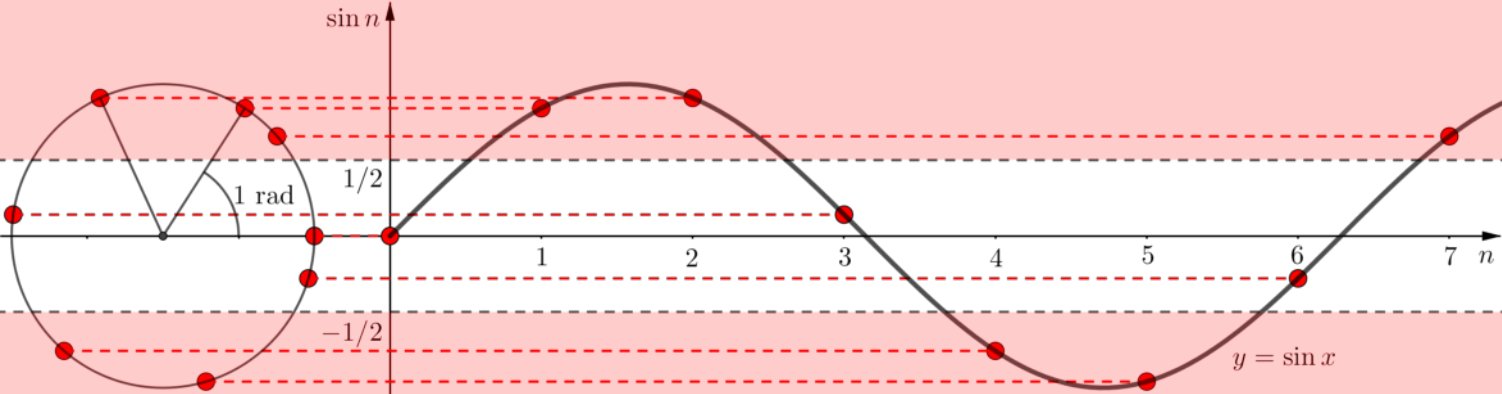
$$b^n > M \Leftrightarrow n > \log_b M =: k.$$

$$\log_b x$$

$$\boxed{b > 1}$$



strett. crescente



N.B. La successione assume infinite volte valori $\geq \frac{1}{2}$ e infinite volte valori $\leq -\frac{1}{2}$

Caso $|b| < 1$

Il caso $b=0$ è ovvio ($0^n = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}_+$)

Nel caso $|b| < 1, b \neq 0$.

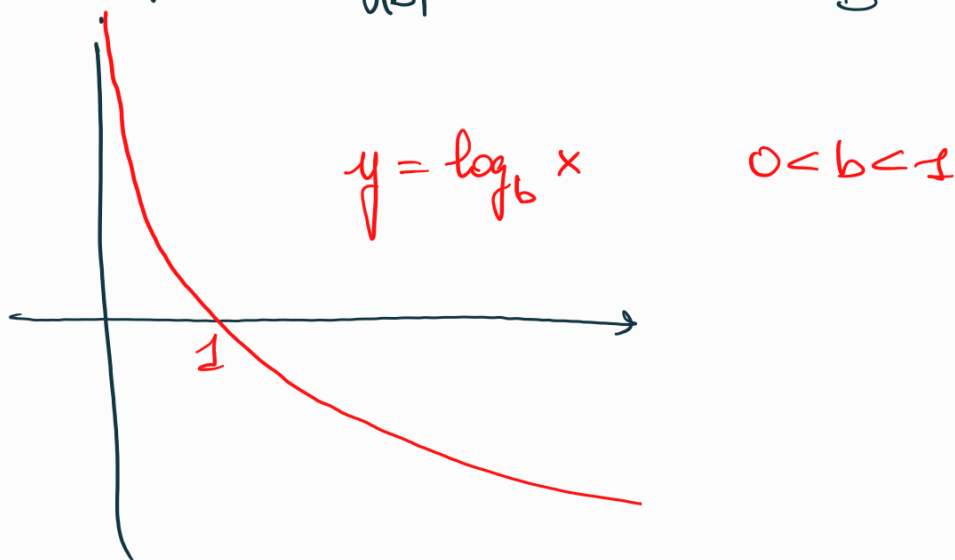
Fissato $\varepsilon > 0$, cerco K t.c. $|b^n - 0| < \varepsilon \quad \forall n > K$.

$$|b^n| < \varepsilon \iff |b|^n < \varepsilon \iff n > \log_{|b|} \varepsilon =: K$$

applico $\log_{|b|}$ a entrambi i membri.

Applico $\log_{|b|} x$ a entrambi i membri

N.B. la funzione $f(x) = \log_{|b|} x$, con $0 < |b| < 1$



Se $b \leq -1$

$$b^n \geq 1$$

$\forall n$ pari

$$b^n \leq -1$$

$\forall n$ dispari

$\Rightarrow$ il limite non esiste

Proprietà dei limiti

Teorema (unicità del limite)

Sia $\{a_n\}$ una successione. Allora

$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n$, se esiste, è unico.

Dim. per assurdo

Supponiamo che $\exists l_1, l_2 \in \mathbb{R}^*$, $l_1 \neq l_2$, t.c.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = l_1$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = l_2.$$

Per la proprietà di separazione degli intervalli,
 $\exists V_1$ intorno di l_1 $\exists V_2$ intorno di l_2 . t.c.

$$V_1 \cap V_2 = \emptyset$$

Per def. di limite

$$\left. \begin{array}{l} a_n \in V_1 \text{ definitivamente} \\ a_n \in V_2 \text{ definitivamente} \end{array} \right| a_n \in \underbrace{V_1 \cap V_2}_{\emptyset} \text{ definitivamente}$$

assurdo $\square$

OSS Se $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = l \in \mathbb{R}^*$

Sia $\{\tilde{a}_n\}$ una successione ottenuta da $\{a_n\}$ modificando un numero finito di termini.

$$\text{Allora } \lim_{n \rightarrow +\infty} \tilde{a}_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = l.$$

Infatti $\tilde{a}_n = a_n$ definitivamente.

TEOREMA della PERMANENZA DEL SEGNO

Se $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = l \in (0, +\infty]$. Allora $a_n > 0$ definitivamente

Se $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = l \in [-\infty, 0)$. " $a_n < 0$ "

Dim Se $l \in (0, +\infty]$ $\exists V$ intorno di l costituito da soli numeri positivi.

Se $l \in (0, +\infty)$ prendo

$$V = (0, 2l)$$



se $l = +\infty$ prendo $V = (0, +\infty]$

Definitivamente $a_n \in V \Rightarrow a_n > 0$ definitivamente. $\square$

OSS A volte il teorema della permanenza del segno viene utilizzato in questo modo:

$$\text{se } a_n \geq 0 \text{ def}^{\text{te}} \mid \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = l \Rightarrow l \in [0, +\infty]$$

assurdo!

Infatti se fosse $l \in [-\infty, 0)$, $a_n < 0$ def^{te} per il teorema della perm. segno

ATTENZIONE: la seguente implicazione è falsa

~~$$a_n > 0 \text{ definit.} \mid \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = l \Rightarrow l > 0$$~~

FALSO.

Infatti $a_n = \frac{1}{n} > 0 \forall n$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$.

Invece è vero quanto segue

$$a_n \geq 0 \text{ def}^{\text{te}} \mid \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = l \Rightarrow l \geq 0$$

VERO

OSS Il teorema della permanenza del segno si può usare anche prendendo un altro numero al posto di zero

$$\text{se } \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = l > 5 \Rightarrow a_n > 5 \text{ defte}$$

$$< 8 \Rightarrow a_n < 8$$

Per esempio, se $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 2$,

posso dire che $\frac{3}{2} < a_n < 3$

$$\text{se } a_n \geq 2 \text{ defte} \quad \left| \Rightarrow l \geq 2 \right.$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = l$$

TEOREMA del CONFRONTO (dei Carabiniere).

Siano $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $\{c_n\}$ tre succ^{ve} t.c.

$$a_n \leq b_n \leq c_n \quad \underline{\text{defte}}$$

Se $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} c_n = l \in \mathbb{R}^*$, allora anche

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = l.$$

Esempio: $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sin n}{n} = 0$

$$\left(-\frac{1}{n} \right) \leq \frac{\sin n}{n} \leq \left(\frac{1}{n} \right)$$

$\downarrow$ $\downarrow$
 0 0

$\Rightarrow$ Carabiniere $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sin n}{n} = 0$

Oss Il teorema dei carabinieri viene spesso usato così:

Poiché abbiamo verificato che

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = l \in \mathbb{R} \iff \lim_{n \rightarrow +\infty} |a_n - l| = 0$$

Quindi per provare che $a_n \rightarrow l$, basterà provare che $|a_n - l| \rightarrow 0$, e posso farlo con il thm. dei carabinieri

$$0 \leq |a_n - l| \leq c_n \rightarrow 0$$

Basta trovare un "carabiniere" $c_n \rightarrow 0$

Per esempio, dimostriamo che $\frac{\sin n}{n} \rightarrow 0$

$$0 \leq \left| \frac{\sin n}{n} \right| = \frac{|\sin n|}{n} \leq \frac{1}{n} \rightarrow 0$$

Dim. del teorema dei carabinieri

$$\begin{array}{lcl} \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = l & \Rightarrow & \forall V \text{ intorno di } l, a_n \in V \text{ defte} \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} c_n = l & \Rightarrow & \left(\begin{array}{l} \forall V \text{ " " } l \quad c_n \in V \text{ defte} \\ \downarrow \\ a_n \leq b_n \leq c_n \text{ defte} \\ \Rightarrow b_n \in V \text{ defte} \end{array} \right. \end{array}$$

Questo è vero $\forall V$ intorno di $l \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = l.$

□

OSS se $l = \pm\infty$, di carabinieri ne basta uno:

TEOREMA "del carabiniere"

Se $a_n \leq b_n$ def^{te}, allora

1) se $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = +\infty$, anche $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = +\infty$

2) se $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = -\infty$, anche $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = -\infty$.

Esempio $\lim_{n \rightarrow +\infty} (5 - 2\cos^2 n)(n^2 - 1) = +\infty$

OSS $n^2 - 1 \rightarrow +\infty$

$$5 - 2\cos^2 n \geq 5 - 2 = 3$$

$$\Rightarrow \underbrace{(5 - 2\cos^2 n)}_{\substack{VI \\ 3}} (n^2 - 1) \geq 3 (n^2 - 1) \rightarrow +\infty \quad n \geq 1$$

Si usa il teor. del carabiniere

$$\Rightarrow (5 - 2\cos^2 n)(n^2 - 1) \rightarrow +\infty$$

□

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{5n}{n + \cos^2 n} = 5$$

Dimostriamolo.

$$0 \leq \left| \frac{5n}{n + \cos^2 n} - 5 \right| = \left| \frac{\cancel{5n} - \cancel{5n} - 5\cos^2 n}{n + \cos^2 n} \right| =$$

$$= \frac{5 \overset{\leftarrow 1}{\cos^2 n}}{n + \cos^2 n} \leq \frac{5}{n + \cos^2 n} \leq \frac{5}{n} \rightarrow 0$$

e si usa il thm. dei carabinieri. $\square$

Def. Una succ^{ne} $\{a_n\}$ si dice limitata ^{superiormente} se $\exists M \in \mathbb{R}$ t.c. $a_n \leq M \quad \forall n \in \mathbb{N}$
^{inferiormente}
 $a_n \geq m \quad " \quad "$

$\{a_n\}$ si dice limitata se è limitata sia superiormente che inferiormente, cioè se esistono m, M t.c.

$$m \leq a_n \leq M \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Una succ^{ne} $\{a_n\}$ è limitata se e solo se
 $\exists K \geq 0$ t.c. $|a_n| \leq K$

se per es. $-7 \leq a_n \leq 3 \Rightarrow |a_n| \leq 7$

Def. Una successione si dice infinitesima se $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$.

TEOREMA Il prodotto di una successione infinitesima per una succ^{ne} limitata è infinitesimo.

In formule:

$$\left. \begin{array}{l} a_n \rightarrow 0 \\ |b_n| \leq M \end{array} \right\} \Rightarrow a_n b_n \rightarrow 0$$

Dim

$$0 \leq |a_n b_n| = |a_n| \underbrace{|b_n|}_{\substack{\leq M \\ M}} \leq M |a_n| \rightarrow 0$$

+ teorema dei carabinieri

□