

Esercizio

Trovare estremo superiore ed estremo inferiore della successione

$$a_n = n^3 - 21n$$

Vuol dire,

posto $E = \{x = n^3 - 21n, n \in \mathbb{N}\}$

trovare sup e inf di E .

In altre parole,
dobbiamo trovare
sup e inf dell'immagine
della successione

$$a_0 = 0 \quad a_1 = -20 \quad a_2 = 8 - 42 = -34, \quad a_3 = 27 - 63 = -36$$

$$a_4 = 64 - 84 = -20$$

Intuizione: per n "molto grande", i valori della successione diventano "molto grandi", la successione sembra illimitata sup. ($\Leftrightarrow \underline{\sup E = +\infty}$).

Per dimostrarlo, preso un qualsiasi $M \in \mathbb{R}$, devo provare che questo non è un maggiorante, quindi devo trovare $n \in \mathbb{N}$ t.c.

$$n^3 - 21n > M.$$

$$n^3 - 21n = n(n^2 - 21) \geq 4n > M$$

$n \geq 5$ $n > \frac{M}{4}$

$\forall$
 $\frac{4}{4}$ per $n \geq 5$

Affinché questo sia vero basterà scegliere
 $n > \max\{5, \frac{M}{4}\}$

$\inf E = ?$

Studiamo la crescita e decrescita della successione
ossia calcoliamo per quali n si ha

$$a_{n+1} \geq a_n$$

$$(n+1)^3 - 21(n+1) \geq n^3 - 21n$$

$$\cancel{n^3 + 3n^2 + 3n + 1 - 21n - 21} \geq \cancel{n^3 - 21n}$$

$$3n^2 + 3n - 20 \geq 0$$

$$3x^2 + 3x - 20 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{9 + 240}}{6} = \frac{-3 \pm \sqrt{249}}{6}$$

(15, 16)
0

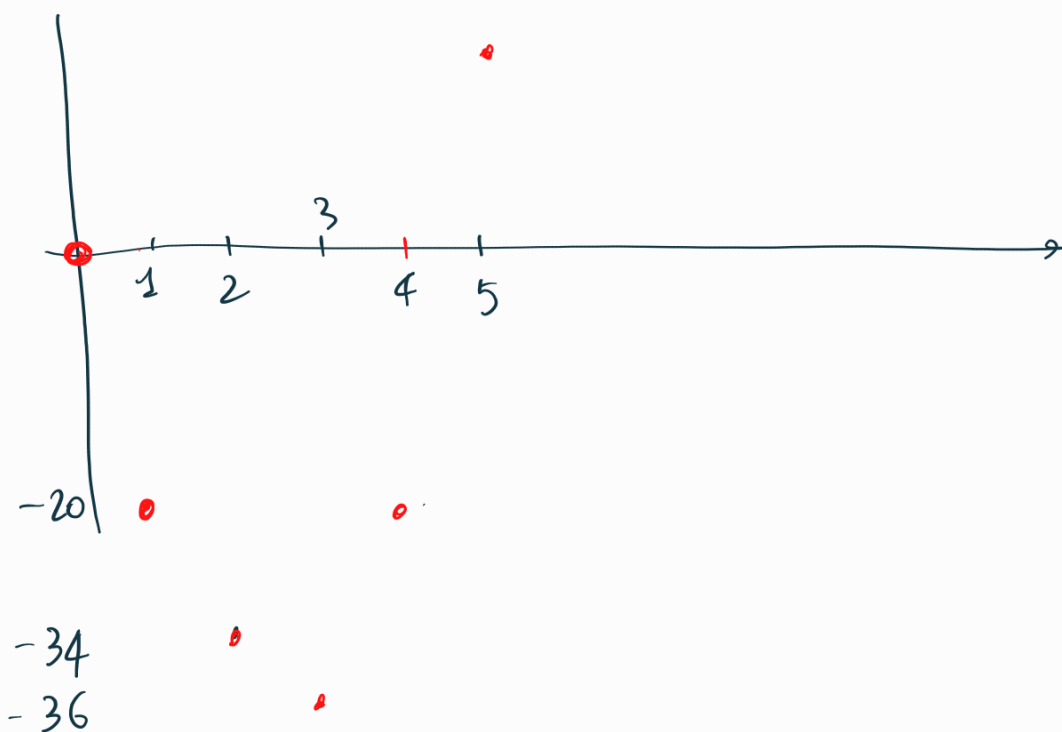
$$\frac{-3 + \sqrt{249}}{6}$$

poco più
di 2

$$\frac{-3 - \sqrt{249}}{6} < 0$$

vera se e solo se

$$\cancel{n \leq \frac{-3 - \sqrt{249}}{6}} \vee \left(n \geq \frac{-3 + \sqrt{249}}{6} \right) \Leftrightarrow \boxed{n \geq 3}$$



Quindi: a_n decresce fino ad $a_3 = -36$, poi cresce
Quindi -36 è il minimo di a_n

Esercizio: fare la stessa cosa con

$$a_n = \frac{n}{n^2 + 50}$$

$$n \in \mathbb{N}_+ = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$$

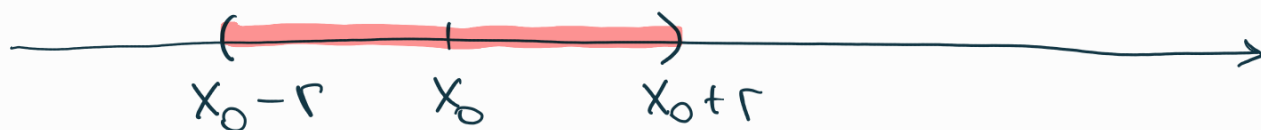
DEF Intorno (sferico) di un numero reale.

Dato $x_0 \in \mathbb{R}$, dato $r > 0$ ($r \in \mathbb{R}^+$)

$\{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$

si dice **intorno sferico** di centro x_0 e raggio r l'intervallo

$$\begin{aligned} B_r(x_0) &= (x_0 - r, x_0 + r) = \{x \in \mathbb{R} : x_0 - r < x < x_0 + r\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} : |x - x_0| < r\} \end{aligned}$$



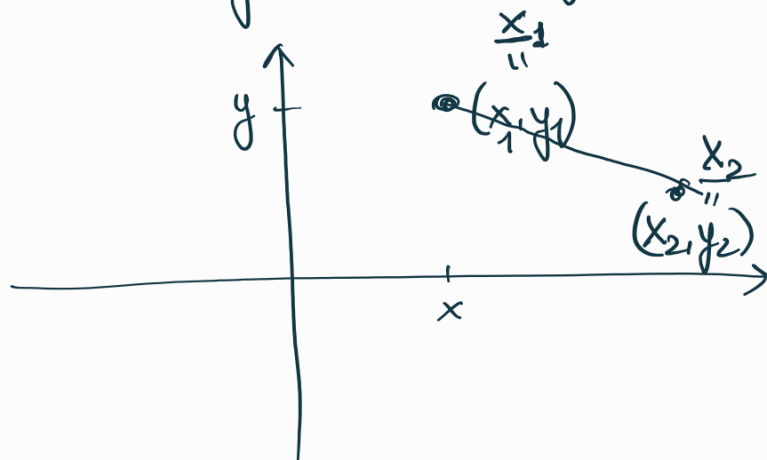
$$|x - x_0| = \begin{cases} x - x_0 & \text{se } x \geq x_0 \\ x_0 - x & \text{se } x < x_0 \end{cases}$$

si interpreta come "distanza" di x da x_0 .

Perché "sferico"?

In dim 2 o 3 o $n > 3$ diventa una sfera.

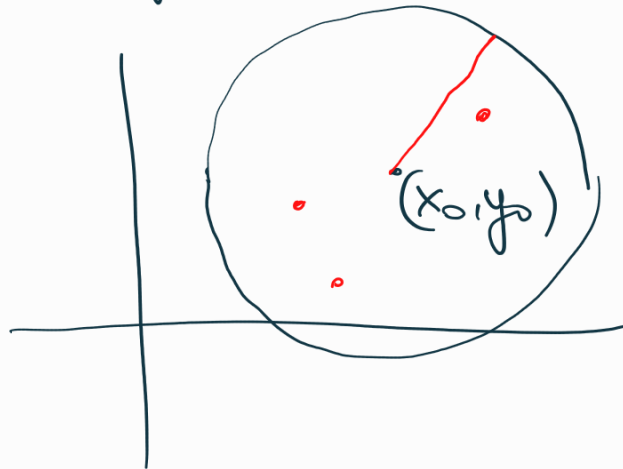
in dim 2. $\mathbb{R}^2 = \{(x, y) : x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\}$



$$d((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = d(\underline{x}_1, \underline{x}_2) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

Fissato (x_0, y_0) , $r > 0$, si definisce

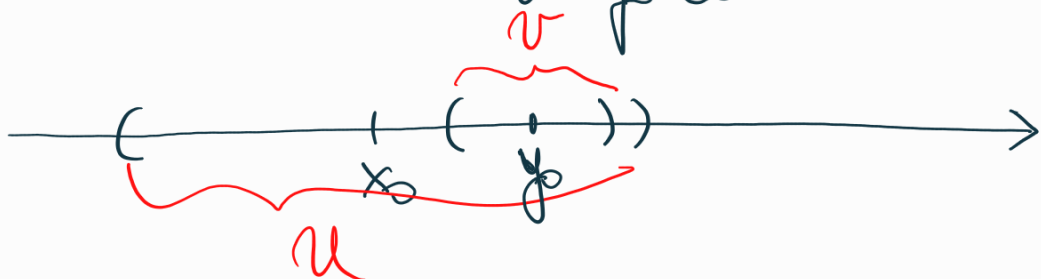
$$B_r((x_0, y_0)) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : d((x_0, y_0), (x, y)) < r\}$$



In dim. 3 l'intorno diventa una "palla", cioè l'insieme dei punti che distano da (x_0, y_0, z_0) meno di r .

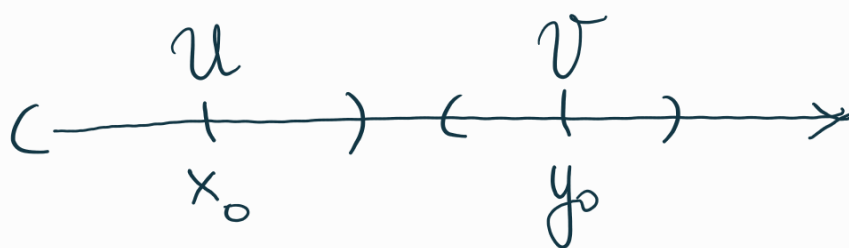
Proprietà degli intorno in $\mathbb{R}$

- 1) Se U è un intorno di x_0 , $x_0 \in U$;
- 2) se U e V sono intorni di x_0 , allora $U \cap V$ è ancora un intorno di x_0 ;
- 3) Se U è un intorno di x_0 , e se $y_0 \in U$, allora $\exists$ un intorno V di y_0 contenuto in U .



- 4) (Separazione) Se $x_0 \neq y_0$, allora esistono U intorno di x_0 e V intorno di y_0 t.c.

$$U \cap V = \emptyset$$



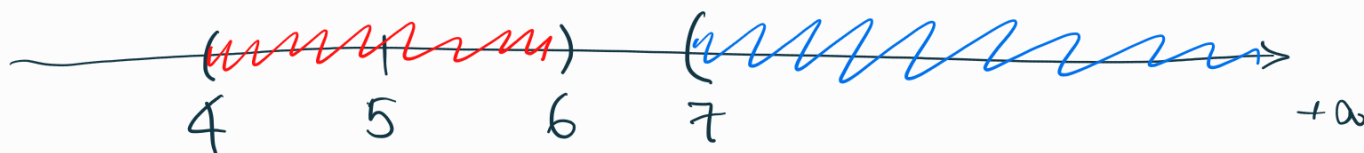
Intorni di $\pm\infty$:

Si dice intorno di $+\infty$ una semiretta della forma $(a, +\infty]$ con $a \in \mathbb{R}$.

Si dice intorno di $-\infty$ una semiretta della forma $[-\infty, a)$ con $a \in \mathbb{R}$.

Consideriamo l'insieme $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ (retta reale estesa).

In $\mathbb{R}^*$ continuano a valere le proprietà 1-4) degli intorni.



Proprietà vere definitivamente.

$n \in \mathbb{N}$.

Sia $P(n)$ una proprietà dipendente da n
Diciamo che $P(n)$ è vera definitivamente

se $\exists \bar{n} \in \mathbb{N}$ t.c. $P(n)$ è vera $\forall n \geq \bar{n}$

ossia, equivalentemente,

se $\exists k \in \mathbb{R}$ t.c. $P(n)$ è vera $\forall n > k$

Esempio:

$P(n)$

$$n^2 > 100$$

è falsa

se

$$n = 0, 1, \dots, 10$$

è vera

se

$$n \geq 11.$$

Quindi è vera definitivamente.

Esempio

$P(n)$

$$\frac{1}{n} < \frac{1}{1000}$$

è vera definitivamente?
($\forall n \geq 1001$)

sì, perché è vera $\forall n > 1000$

Esempio:

$P(n)$

gli angoli interni di un poligono regolare di n lati sono ottusi

vera $\forall n \geq 5$



Esempio

$a_n = n^3 - 21n$ è definitivamente crescente.

$$a_{n+1} \geq a_n$$

$P(n)$

E' definitivamente vera

perché è vera $\forall n \geq 3$
(visto prima)

Esempio

$P(n)$

$$(-1)^n \geq 0$$

non è vera definitivamente
 $\forall n$ dispari.

perché è falsa

Esempio

$P(n)$

$$1 < \frac{n^2}{n^2-5} < \frac{11}{10}$$

ver $\forall n > \sqrt{5}$ ver $\forall n > \sqrt{55}$

(A) (B)

// vera $\forall n > \sqrt{55}$

Studio (A)

vera definitivamente!

$$1 < \frac{n^2}{n^2-5} \Leftrightarrow \frac{n^2-5}{n^2-5} < \frac{n^2}{n^2-5} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{-5}{n^2-5} < 0 \Leftrightarrow n^2-5 > 0$$

$\Updownarrow$

$$n > \sqrt{5} \\ (n \geq 3)$$

$$(B) \Leftrightarrow \frac{n^2}{n^2-5} < \frac{11}{10} \Leftrightarrow \frac{10n^2}{n^2-5} < 11 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{10n^2}{n^2-5} < \frac{11n^2-55}{n^2-5} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{n^2 - 55}{n^2 - 5} > 0 \Leftrightarrow n^2 - 55 > 0 \Leftrightarrow n > \sqrt{55}$$

supponiamo che $n > \sqrt{5}$ (la abbiamo già supposto prima)

Oss che si dimostra in modo simile

se $P(n)$ è vera definitivamente

e $Q(n)$ " " "

allora $P(n) \wedge Q(n)$ è vera definitivamente.

Voglio definire i limiti, che descrivono situazione del tipo

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (n^2 - 5) = +\infty$$

cioè, intuitivamente: quando n diventa "molto grande", $\frac{1}{n}$ "si avvicina a 0"

Def. Sia $\{a_n\}$ una successione di numeri reali.

Sia $l \in \mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$.

Diremo che

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = l$$

oppure che $a_n \rightarrow l$ per $n \rightarrow +\infty$ se

$\forall U$ intorno di l si ha $a_n \in U$ definitivamente.
ossia

$\forall U$ intorno di l $\exists k \in \mathbb{R}$ t.c. $a_n \in U \quad \forall n > k$.

Questa def^{ne} generale prende forme leggermente diverse a seconda che 1) $l \in \mathbb{R}$ 2) $l = +\infty$ 3) $l = -\infty$

1° caso $l \in \mathbb{R}$.

In questo caso gli intorno di l sono della forma

$$V = B_r(l) = (l-r, l+r) =$$

$$= \{y \in \mathbb{R} : |y-l| < r\}$$

con $r > 0$

N.B. Per "tradizione" si usa ε invece di r .

Con questa scelta, la definizione diventa $V = B_\varepsilon(l)$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists K \in \mathbb{R} \text{ t.c. } \forall n > K \quad l - \varepsilon < a_n < l + \varepsilon$$

oppure

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists K \in \mathbb{R} \text{ t.c. } \forall n > K \quad |a_n - l| < \varepsilon$$

Esempio: Verifichiamo che

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n} \right) = 0$$

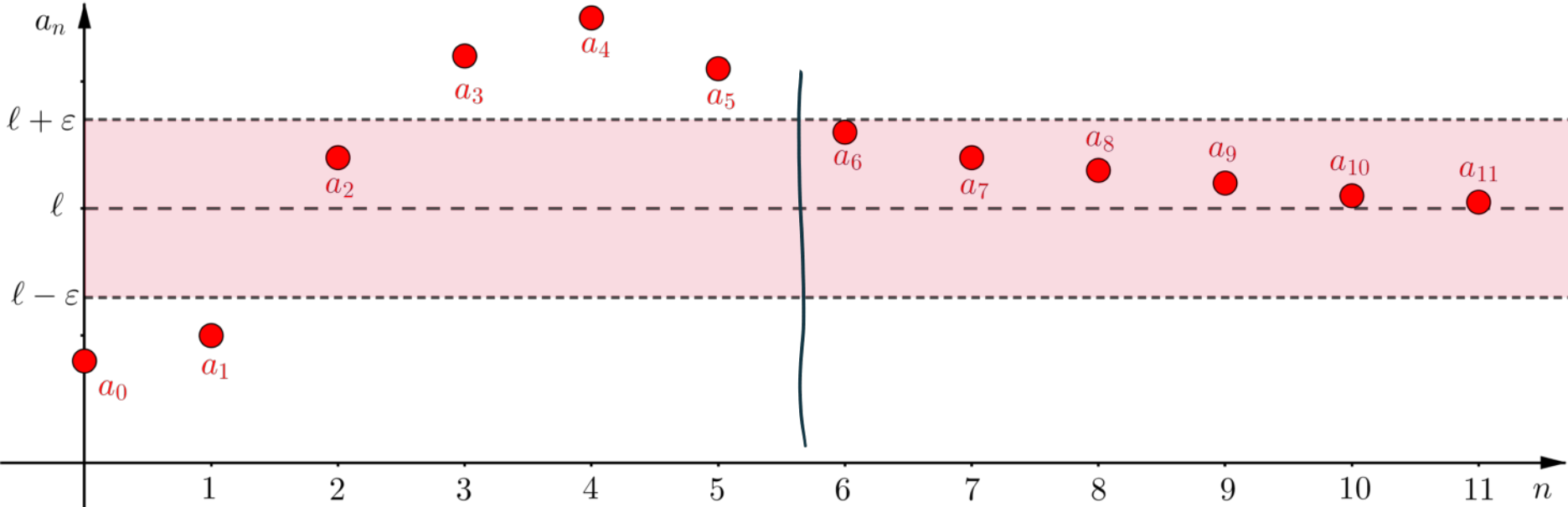
$\frac{1}{n} = a_n$

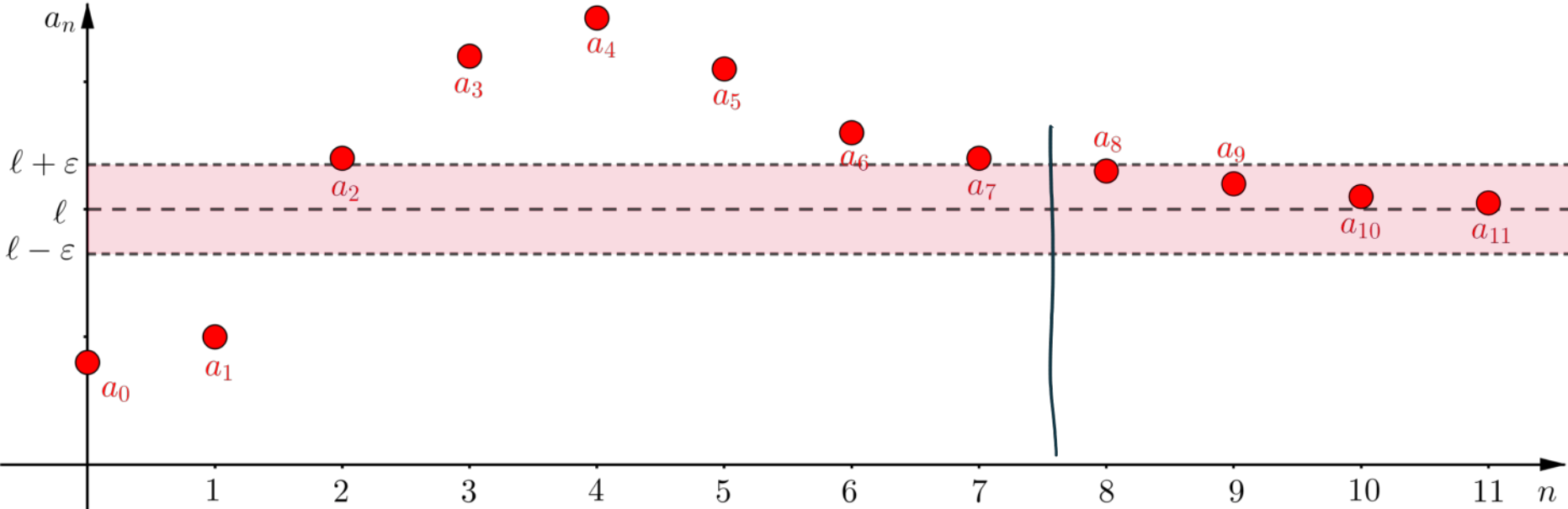
$$l = 0$$

Devo provare che:

$$\underline{\forall \varepsilon > 0} \quad \exists K \in \mathbb{R} \text{ t.c. } \forall n > K \quad \left| \frac{1}{n} - 0 \right| < \varepsilon$$

$\frac{1}{n} < \varepsilon$





$$\frac{1}{n} < \varepsilon \Leftrightarrow n > \frac{1}{\varepsilon} =: k$$

OSS Una volta verificata la def^{ne} per un certo $\varepsilon_0 > 0$ automaticamente (con la stessa scelta di k) l'ho verificata anche $\forall \varepsilon > \varepsilon_0$.

Quindi basta verificare la cond^{ne} $\forall \varepsilon$ t.c. $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$

dove $\varepsilon_0 > 0$ è scelto a piacere.

Quindi basta verificarla "per ε piccolo".

Esempio: Voglio dimostrare che

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{4 - \frac{3}{n}} = 2 \quad l=2.$$

Devo provare:

$$\forall \varepsilon > 0 \text{ cerco } k \text{ t.c. } \left| \sqrt{4 - \frac{3}{n}} - 2 \right| < \varepsilon \quad \forall n > k$$

$$\left| \sqrt{4 - \frac{3}{n}} - 2 \right| < \varepsilon$$

δ

$\Leftrightarrow$

$$2 - \sqrt{4 - \frac{3}{n}} < \varepsilon$$

$\Leftrightarrow$

$$2 - \varepsilon < \sqrt{4 - \frac{3}{n}}$$

$\Leftrightarrow$

Posso supporre $\varepsilon \leq 2$
per il discorso di prima

$$(2-\varepsilon)^2 < 4 - \frac{3}{n}$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\cancel{4} - 4\varepsilon + \varepsilon^2 < \cancel{4} - \frac{3}{n}$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\frac{3}{n} < 4\varepsilon - \varepsilon^2 = \varepsilon(4-\varepsilon) > 0$$

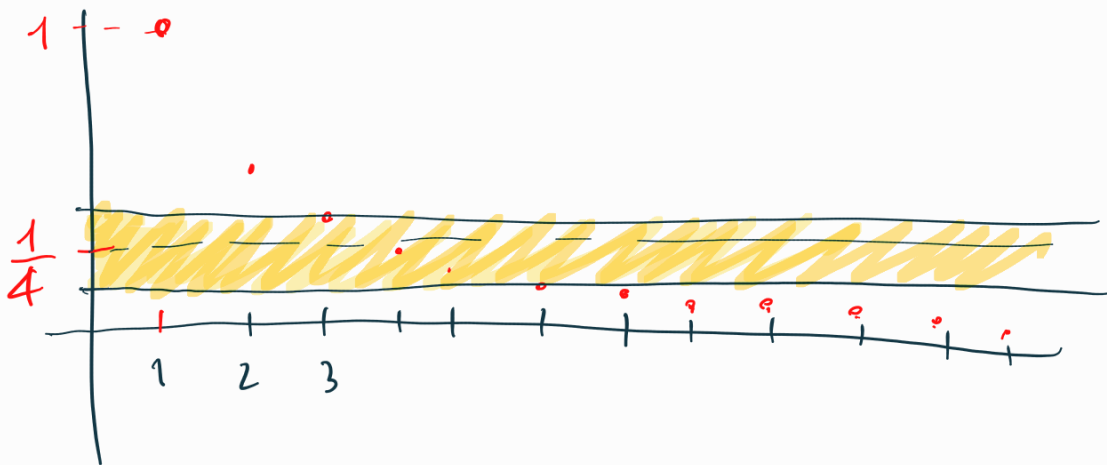
$$\Leftrightarrow$$

$$n > \frac{3}{\varepsilon(4-\varepsilon)} =: k$$

□

Cosa succede se proviamo a verificare un limite sbagliato?

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = \frac{1}{4} \quad (*)$$



Per provare (*), dovrei verificare che

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists k \text{ t.c. } \left| \frac{1}{n} - \frac{1}{4} \right| < \varepsilon \quad \forall n > k$$

Questo non funziona se prendo ε molto piccolo, per es. $\boxed{\varepsilon = 1/8}$

$$\left| \frac{1}{n} - \frac{1}{4} \right| < \frac{1}{8}$$

se prendo $n > 4$, questa quantità è negativa, quindi la diseq. diventa

$$\frac{1}{4} - \frac{1}{n} < \frac{1}{8}$$

$\Downarrow$

$$\frac{1}{8} = \frac{1}{4} - \frac{1}{8} < \frac{1}{n}$$

$\Downarrow$

$$n < 8$$

falsa $\forall n \geq 8$

Quindi abbiamo provato la falsità di $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = \frac{1}{4}$

OSS. $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = l \in \mathbb{R} \iff \lim_{n \rightarrow +\infty} |a_n - l| = 0$

dim. (1) (2)

$$(1) \iff \forall \varepsilon > 0 \exists K \text{ t.c. } |a_n - l| < \varepsilon \quad \forall n > K$$

$$(2) \iff \forall \varepsilon > 0 \exists K \text{ t.c. } \underbrace{||a_n - l| - 0|}_{|a_n - l|} < \varepsilon \quad \forall n > K$$

sono uguali tra loro!

OSS 2.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = l \in \mathbb{R} \Rightarrow \forall c \in \mathbb{R} \lim_{n \rightarrow +\infty} (c a_n) = c l.$$

Tesi:

se $c = 0$ la tesi è ovvia:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (0 \cdot a_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} 0 = 0 = 0 \cdot l.$$

se $c \neq 0$, allora la tesi diventa

$$\forall \varepsilon > 0 \quad |c a_n - c l| < \varepsilon \quad \text{definitivamente.}$$

$$|c(a_n - l)|$$

$$|c| |a_n - l|$$



$$|a_n - l| < \frac{\varepsilon}{|c|} =: \varepsilon_1 > 0$$

è vero definitivamente
perché $a_n \rightarrow l$

□

2° caso $l = +\infty$

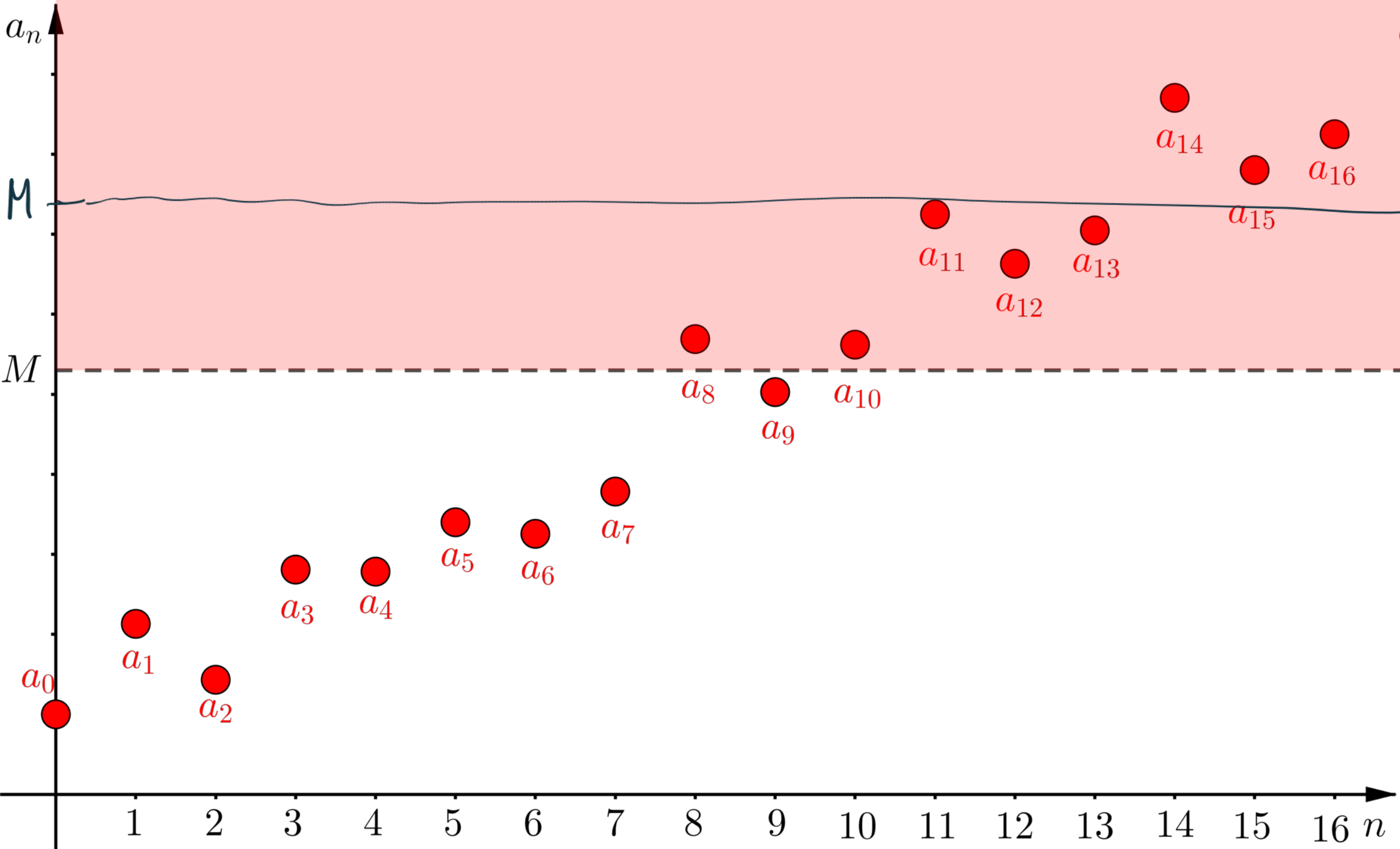
Gli intorno di $l = +\infty$ sono della forma $(M, +\infty]$
la def^{ne} diventa

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = +\infty \Leftrightarrow \forall M \in \mathbb{R} \exists K \text{ t.c. } a_n > M \quad \forall n > K.$$

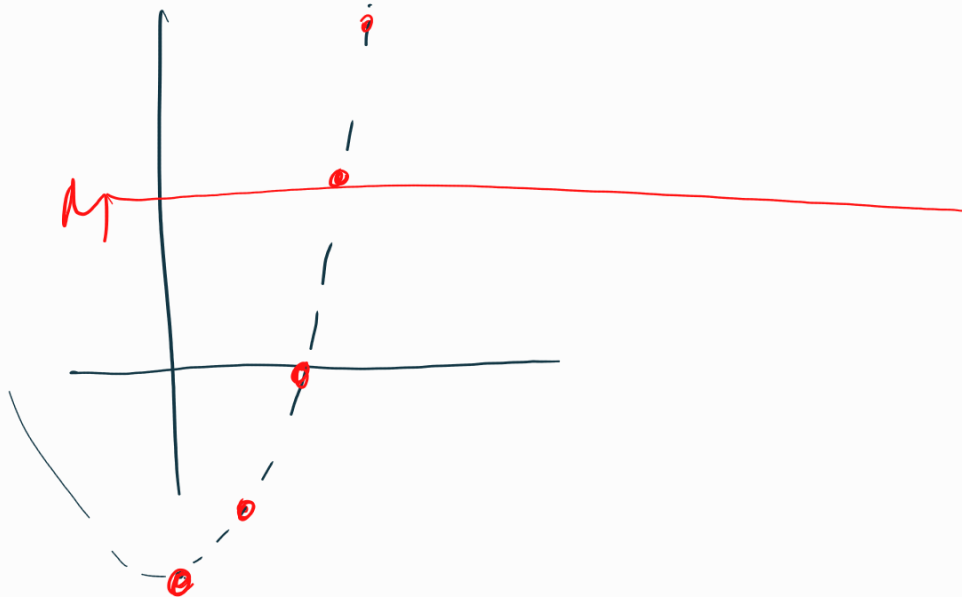
OSS Una volta che abbiamo verificato la condizione
per un certo M_0 , essa è automaticamente verificata
 $\forall M < M_0$ (con la stessa scelta di K),
quindi basta verificare la condizione $\forall M > M_0$,
con M_0 scelto da noi.

Per es. possiamo scegliere $M > 0$, e la def^{ne} diventa

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = +\infty \Leftrightarrow \forall M > 0 \exists K \in \mathbb{R}: a_n > M \quad \forall n > K.$$



Verifichiamo che $\lim_{n \rightarrow +\infty} (n^2 - 4) = +\infty$.



Fissato $M > 0$, cerco k t.c. $n^2 - 4 > M \quad \forall n > k$.

$$n^2 - 4 > M \Leftrightarrow n^2 > 4 + M \Leftrightarrow n > \sqrt{4 + M} =: k$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{n^4 - 5n^2} = +\infty$$

Verifica:

Fissato $M > 0$, cerco k t.c. $\sqrt[3]{n^4 - 5n^2} > M \quad \forall n > k$.

$$\sqrt[3]{n^4 - 5n^2} > M \Leftrightarrow n^4 - 5n^2 > M^3 \quad a > b \Leftrightarrow a^3 > b^3$$

$$n^4 - 5n^2 = n^2(n^2 - 5) \underset{\substack{\sqrt{1/4} \\ n > 2}}{\geq} 4n^2 \underset{\boxed{n > \frac{M^{3/2}}{2}}}{>} M^3$$

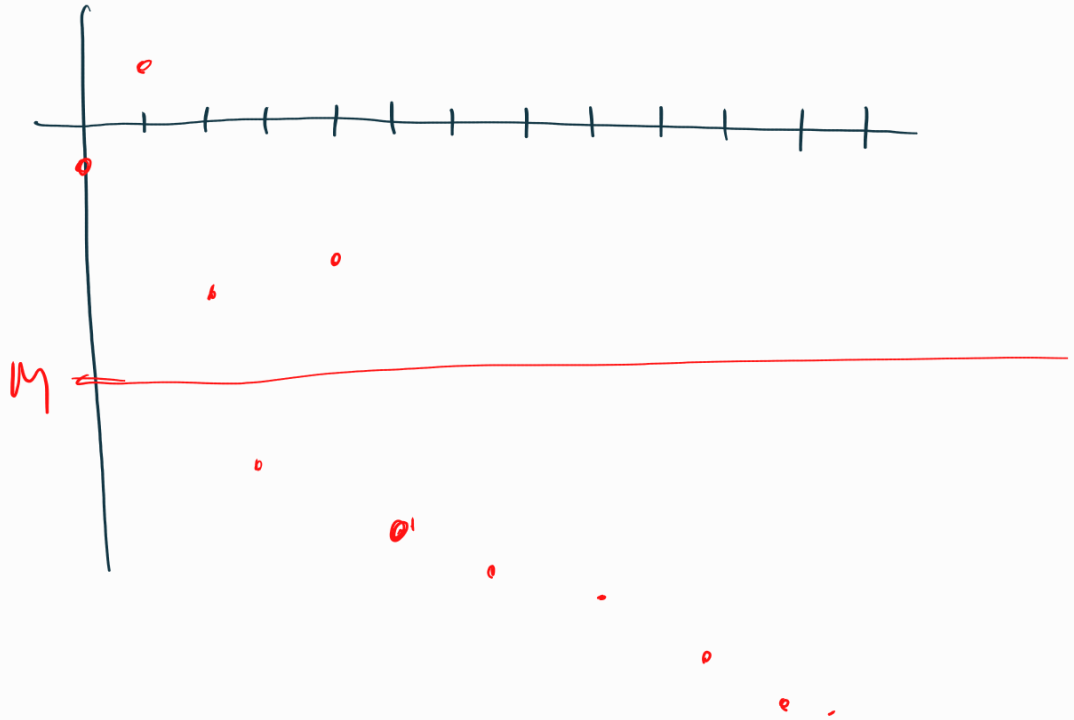
Prendo $k = \max \left\{ 2, \frac{M^{3/2}}{2} \right\}$

se $n > k$, tutti i passaggi sopra sono corretti

Caso 3 $l = -\infty$

Gli intorno di $-\infty$ sono della forma $(-\infty, M)$ con $M \in \mathbb{R}$.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = -\infty \Leftrightarrow \forall M \in \mathbb{R} \exists k \text{ t.c. } a_n < M \quad \forall n > k$$



OSS Basta verificare la cond^{ne} $\forall M < 0$,
e quindi scriverò $-M$, con $M > 0$.
(meglio lavorare con quantità positive, per fare meno errori!).

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = -\infty \Leftrightarrow \forall M > 0 \exists k \text{ t.c. } a_n < -M \quad \forall n > k.$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (\sqrt{n} - 3n^2) = -\infty$$

Fisso $M > 0$, cerco k t.c. $\forall n > k \quad \sqrt{n} - 3n^2 < -M$

$$\sqrt{n} - 3n^2 < -M \Leftrightarrow 3n^2 - \sqrt{n} > M \Leftrightarrow \sqrt{n} (3n^{3/2} - 1) > M.$$

$$\sqrt{n} (3n^{3/2} - 1) \underset{\substack{n > 0 \\ n > \frac{M^2}{4}}}{\geq} 2\sqrt{n} > M$$

$$\boxed{k = \frac{M^2}{4}}$$

$\forall \frac{1}{2}$

$$\text{se } n \geq 1 \Leftrightarrow n > 0$$

OSS L'ordine dei quantificatori è importante

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = l \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists k \text{ t.c. } |a_n - l| < \varepsilon \quad \forall n > k$$

$\underbrace{\quad}_{k(\varepsilon)}$ corretta.

//

$$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists k \text{ t.c. } \forall n > k \quad |a_n - l| < \varepsilon$$

corretta

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = l \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \underbrace{\exists k \text{ t.c. } |a_n - l| < \varepsilon}_{\text{errata!}} \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \forall n > k.$$

$\Downarrow$
 $|a_n - l| = 0$
 $\Downarrow$
 $a_n = l$

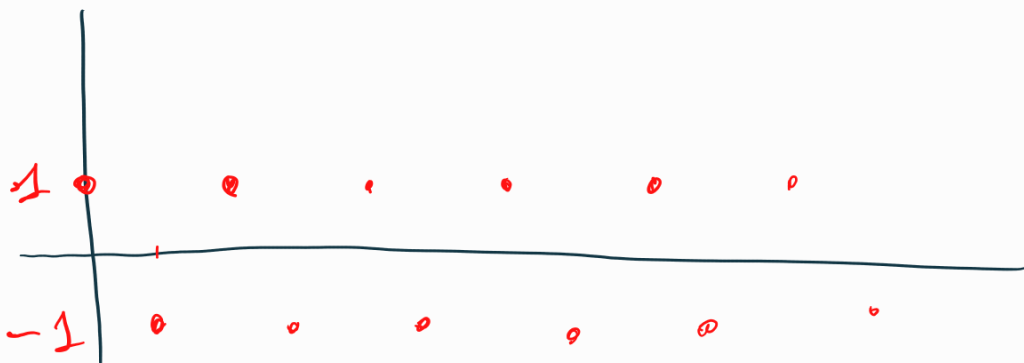
DEF La succ^{te} $\{a_n\}$ si dice convergente se $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = l \in \mathbb{R}$

La succ^{te} si dice divergente (a $\pm\infty$) se

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = +\infty \quad \text{oppure} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = -\infty$$

Esempi di succ^{te} irregolari, cioè che non hanno limite.

$$a_n = (-1)^n = \begin{cases} 1 & \text{se } n \text{ pari} \\ -1 & \text{se } n \text{ dispari} \end{cases}$$



$(-1)^n$ non può tendere a $+\infty$ (perché $(-1)^n \leq 1 \quad \forall n$)
 " " " " " $-\infty$ (perché $(-1)^n \geq -1 \quad \forall n$)

Supponiamo ora che $a_n \rightarrow l \in \mathbb{R}$.

Allora $\forall \varepsilon > 0$ dovrebbe essere definitivamente $|a_n - l| < \varepsilon$

cioè $l - \varepsilon < a_n < l + \varepsilon$

$\forall \varepsilon > 0$ $a_n \in$ intervallo di ampiezza 2ε definitivamente.

Prendo $\varepsilon = \frac{1}{2} \Rightarrow a_n \in$ intervallo di ampiezza 1 def^{te}.

questo è assurdo perché

$a_n = (-1)^n$ continua sempre ad
 assumere i valori $+1$ e -1 ,
 che distano 2 tra loro.

Altri esempi di succ^{ie} irregolari (non ammettono limite)

$$a_n = \sin n$$

$$a_n = \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)$$

$$a_n = (-1)^n n$$

OSS $a_n = \frac{(-1)^n}{n} \rightarrow 0$

$$\left| \frac{(-1)^n}{n} - 0 \right| = \left| \frac{(-1)^n}{n} \right| = \frac{1}{n} \rightarrow 0$$

