

① Esercizio ①

a) Scriviamo la parte di spin come matrice nella base $\{|\frac{1}{2}\rangle, |-\frac{1}{2}\rangle\}$

$$\text{Se } H_{\text{spin}} = a|\frac{1}{2}\rangle\langle\frac{1}{2}| - a|-\frac{1}{2}\rangle\langle\frac{1}{2}|$$

$$H_{\text{spin}}|\frac{1}{2}\rangle = -a|-\frac{1}{2}\rangle$$

$$H_{\text{spin}}|-\frac{1}{2}\rangle = a|\frac{1}{2}\rangle$$

Se $|\frac{1}{2}\rangle \rightarrow (1, 0)$, $|-\frac{1}{2}\rangle \rightarrow (0, 1)$ abbiamo

$$H_{\text{spin}} = a \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Determiniamo gli autovalori di H_{spin}

$$\det \begin{bmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -\lambda \end{bmatrix} = \lambda^2 + 1 \Rightarrow \lambda = \pm i$$

Gli autovalori sono quindi $\pm ia$

Lo spettro di H è quindi dato da

$$E_n + ia, E_n - ia$$

La hermiticità di H (o equivalentemente la realtà delle energie) richiede che a sia immaginario puro. Scriviamo $a = -i\hat{a}$ con $\hat{a}$ reale e positivo (dato che $\text{Im } a < 0$). Lo spettro è quindi dato da

$$E_n + \hat{a}, E_n - \hat{a} \quad \hat{a} > 0 \quad n = 0, 1, 2$$

Lo stato fondamentale ha quindi energia $E_0 - \hat{a}$.
 I due stati successivi in energia hanno energie
 $E_0 + \hat{a}$, $E_1 - \hat{a}$. Dato che il primo eccitato è ~~non~~
 degenerare $E_0 + \hat{a} = E_1 - \hat{a}$ $\hat{a} = \frac{E_1 - E_0}{2}$

Corrispondentemente

$$E_{\text{fond}} = E_0 - \hat{a} = E_0 - \frac{1}{2}(E_1 - E_0) = \frac{3E_0}{2} - \frac{E_1}{2} \quad (\text{non deg})$$

$$E_{\text{I ecc}} = E_0 + \hat{a} = E_0 + \frac{1}{2}(E_1 - E_0) = \frac{E_0}{2} + \frac{E_1}{2} \quad \text{deg} \cdot 2$$

b)

Il secondo stato eccitato può avere energia

$$E_2 - \hat{a} \quad \text{oppure} \quad E_1 + \hat{a}$$

Vi sono quindi 3 casi

$$i) \quad E_2 - \hat{a} < E_1 + \hat{a} \quad E_2 - E_1 < 2\hat{a} = E_1 - E_0 \quad E_2 - 2E_1 + E_0 < 0$$

$$\text{In questo caso} \quad E_{\text{II ecc}} = E_2 - \frac{E_1 - E_0}{2} \quad \underline{\text{NON DEG.}}$$

$$ii) \quad E_2 - \hat{a} > E_1 + \hat{a} \quad E_2 - 2E_1 + E_0 > 0$$

$$\text{In questo caso} \quad E_{\text{II ecc}} = E_1 + \hat{a} = \frac{3E_1}{2} - \frac{E_0}{2} \quad \text{NON DEG.}$$

$$iii) \quad E_2 - \hat{a} = E_1 + \hat{a} \quad E_2 - 2E_1 + E_0 = 0$$

$$E_{\text{II ecc}} = \frac{3E_1}{2} - \frac{E_0}{2} \quad \text{degenerazione } 2$$

c)

Se $|+\hat{a}\rangle, |-\hat{a}\rangle$ sono le due autofunzioni di H_{spin}

$$|\psi\rangle = \alpha|0\rangle|+\hat{a}\rangle + \beta|1\rangle|-\hat{a}\rangle \quad |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$$

Per l'ortogonalità delle funzioni di spin

$$\begin{aligned} \langle\psi|A|\psi\rangle &= |\alpha|^2 \langle 0|A|0\rangle + |\beta|^2 \langle 1|A|1\rangle \\ &= |\beta|^2 b \end{aligned}$$

Essendo $b > 0$ il minimo corrisponde a $\beta = 0$.

Quindi $|\psi\rangle = \alpha|0\rangle|+\hat{a}\rangle = |0\rangle|+\hat{a}\rangle \quad (|\alpha| = 1)$

d)

Noniamo due

$$H_{\text{spin}} = a \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = -i\hat{a} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \hat{a} \sigma_y = \frac{2\hat{a}}{\hbar} S_y$$

Quindi $S_y = \frac{\hbar}{2\hat{a}} H_{\text{spin}}$ e

$$S_y |\hat{a}\rangle = \frac{\hbar}{2\hat{a}} H_{\text{spin}} |\hat{a}\rangle = \frac{\hbar}{2} |\hat{a}\rangle$$

Quindi $|\hat{a}\rangle$ è autovettore di S_y con autovalore $+\frac{\hbar}{2}$. Quindi una misura di S_y su $|\psi\rangle$ dà $\frac{\hbar}{2}$ con certezza.

(3)

Esercizio 2

④

a)

Nel sistema del CM, la Hamiltoniana diventa

$$H = \frac{1}{2\mu} \vec{p}^2 + \gamma r^3 \quad \mu = \frac{m}{2}$$

dove $\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$ e $\vec{p}$ è l'impulso canonico associato

Definiamo ω come

$$\frac{1}{2}\mu\omega^2 = \gamma \quad \omega = \sqrt{\frac{2\gamma}{\mu}} = 2\sqrt{\frac{\gamma}{m}}$$

Lo spettro è quello dell'oscillatore armonico isotropo 3D (in assenza di spin)

$$E = \hbar\omega\left(n + \frac{3}{2}\right)$$

Se $n = n_x + n_y + n_z$ una base è data

$$\psi_{n_x, n_y, n_z}(x, y, z) = \psi_{n_x}(x) \psi_{n_y}(y) \psi_{n_z}(z)$$

dove $\psi_n(x)$ sono le autofunzioni dell'oscillatore 1D.

Degenerazione dell'oscillatore 3D:

$$n=0 \text{ FOND : } n_x = n_y = n_z = 0 \Rightarrow \text{deg} = 1$$

$$n=1 \text{ I ecc. : } (n_x, n_y, n_z) = \begin{pmatrix} 1, 0, 0 \\ 0, 1, 0 \\ 0, 0, 1 \end{pmatrix} \left. \vphantom{\begin{pmatrix} 1, 0, 0 \\ 0, 1, 0 \\ 0, 0, 1 \end{pmatrix}} \right\} \text{deg} = 3$$

$$n=2 \text{ II ecc : } (n_x, n_y, n_z) = \begin{pmatrix} 2, 0, 0 \\ 0, 2, 0 \\ 0, 0, 2 \\ 1, 1, 0 \\ 1, 0, 1 \\ 0, 1, 1 \end{pmatrix} \left. \vphantom{\begin{pmatrix} 2, 0, 0 \\ 0, 2, 0 \\ 0, 0, 2 \\ 1, 1, 0 \\ 1, 0, 1 \\ 0, 1, 1 \end{pmatrix}} \right\} \text{deg} = 6$$

Se consideriamo lo spin lo spettro è identico
ma cambiano le degenerazioni. I possibili stati
di spin formano uno spazio vettoriale di
dimensione $2 \times 3 = 6$. Quindi

$$h=0 \quad \text{deg } 6$$

$$h=1 \quad \text{deg } 3 \times 6 = 18$$

$$h=2 \quad \text{deg } 6 \times 6 = 36$$

⋮

$$|000\rangle |s_1 s_{1z}\rangle |s_2 s_{2z}\rangle$$

$$|100\rangle |s_1 s_{1z}\rangle |s_2 s_{2z}\rangle + 2 \text{ stati}$$

$$\text{con } |100\rangle \rightarrow |010\rangle$$

$$|100\rangle \rightarrow |101\rangle$$

...

b)

(6)

È utile ricordare la base sferica per l'oscillatore 3D

$$n=0 \text{ fond : } \begin{matrix} n & l & m \\ |0 & 0 & 0\rangle \end{matrix}$$

$$n=1 \text{ I ecc : } |1 \ 1 \ m\rangle \quad m = -1, 0, 1 \quad \text{deg. 3}$$

$$n=2 \text{ II ecc : } \left\{ \begin{array}{l} |2 \ 0 \ 0\rangle \\ |2 \ 2 \ m\rangle \end{array} \right. \quad m = -2, -1, 0, 1, 2 \quad \left. \begin{array}{l} \text{deg 1} \\ \text{deg 5} \end{array} \right\} \text{deg 6}$$

⋮

Nel nostro caso bisogna poi moltiplicare la funzione d'onda spaziale per la parte di spin.

Se $\vec{S} = \vec{S}_1 + \vec{S}_2$, S può assumere i valori $1/2, 3/2$

Quindi lo spettro è

$$n=0 \quad \left\{ \begin{array}{l} |0 \ 0 \ 0\rangle | \frac{1}{2} S_z \rangle \longrightarrow 2 \text{ stati} \\ |0 \ 0 \ 0\rangle | \frac{3}{2} S_z \rangle \longrightarrow 4 \text{ stati} \end{array} \right\} \text{deg. 6}$$

$$n=1 \quad \left\{ \begin{array}{l} |1 \ 1 \ m\rangle | \frac{1}{2} S_z \rangle \longrightarrow 3 \times 2 \text{ stati} \\ |1 \ 1 \ m\rangle | \frac{3}{2} S_z \rangle \longrightarrow 3 \times 4 \text{ stati} \end{array} \right\} \text{deg 18}$$

$$n=2 \quad \left\{ \begin{array}{l} |2 \ 0 \ 0\rangle | \frac{1}{2} S_z \rangle \longrightarrow 2 \text{ stati} \\ |2 \ 2 \ m\rangle | \frac{1}{2} S_z \rangle \longrightarrow 5 \times 2 \text{ stati} \\ |2 \ 0 \ 0\rangle | \frac{3}{2} S_z \rangle \longrightarrow 4 \text{ stati} \\ |2 \ 2 \ m\rangle | \frac{3}{2} S_z \rangle \longrightarrow 5 \times 4 \text{ stati} \end{array} \right\} \text{deg } \begin{array}{l} 2+10+4+20 \\ = 36 \end{array}$$

(7)

Sapendo che lo stato è autovettore di J^2 con autovalore $\frac{35}{4}\hbar^2$ ricaviamo $J = \frac{5}{2}$

Vediamo quale è l'autostato di H con tale proprietà che ha l'energia minore

$$n=0 \quad \begin{cases} n & l & m & S \\ |000\rangle & | \frac{1}{2} S_z \rangle \longrightarrow J = \frac{1}{2} & \underline{NO} \\ |000\rangle & | \frac{3}{2} S_z \rangle \longrightarrow J = \frac{3}{2} & \underline{NO} \end{cases}$$

$$n=1 \quad \begin{cases} |11m\rangle & | \frac{1}{2} S_z \rangle \longrightarrow J = \begin{matrix} \frac{1}{2} & NO \\ 3/2 & NO \end{matrix} \\ |11m\rangle & | \frac{3}{2} S_z \rangle \longrightarrow J = \begin{matrix} \frac{1}{2} & NO \\ 3/2 & \underline{NO} \\ 5/2 & \underline{OK} \end{matrix} \end{cases}$$

Ricaviamo quindi che lo stato $|\psi\rangle$ è combinazione di $|11m\rangle | \frac{3}{2} S_z \rangle$ al variare di m e S_z che possiamo indicare come

$$|\psi\rangle = |1 \ 1 \ \frac{3}{2} \ \frac{5}{2} \ -\frac{3}{2}\rangle \quad \left[\begin{array}{l} \text{abbiamo usato che è} \\ \text{autostato di } J_z \end{array} \right]$$

Questo stato è autostato di S^2 . Quindi una misura di S^2 dà $\frac{15}{4}\hbar^2$ con certezza ($S = \frac{3}{2}$)

Per rispondere alla II domanda dobbiamo cambiare base. Utilizzando le tabelle CG $3/2 \times 1$ abbiamo

$$|\psi\rangle = \sqrt{\frac{3}{5}} |11-1\rangle | \frac{3}{2} -\frac{1}{2} \rangle + \sqrt{\frac{2}{5}} |110\rangle | \frac{3}{2} -\frac{3}{2} \rangle$$

Ora scriviamo gli stati $|S S_z\rangle$ in termini di $|1 S_{1z}\rangle | \frac{1}{2} S_{2z}\rangle$, ~~le~~ gli autovettori di singola particella. Dalle tabelle $1 \times \frac{1}{2}$ abbiamo

$$| \frac{3}{2} - \frac{1}{2} \rangle = \sqrt{\frac{2}{3}} | 1 0 \rangle | \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \rangle + \sqrt{\frac{1}{3}} | 1 -1 \rangle | \frac{1}{2} \frac{1}{2} \rangle$$

$$| \frac{3}{2} - \frac{3}{2} \rangle = | 1 -1 \rangle | \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \rangle$$

Quindi

$$\begin{aligned} | \psi \rangle &= \sqrt{\frac{2}{5}} | 1 1 -1 \rangle | 1 0 \rangle | \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \rangle \\ &+ \sqrt{\frac{1}{5}} | 1 1 -1 \rangle | 1 -1 \rangle | \frac{1}{2} \frac{1}{2} \rangle \\ &+ \sqrt{\frac{2}{5}} | 1 1 0 \rangle | 1 -1 \rangle | \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \rangle \end{aligned}$$

Quindi

$$\text{Prob}(S_{1z}=0) = \frac{2}{5}$$

$$\text{Prob}(S_{1z}=-\hbar) = \frac{1}{5} + \frac{2}{5} = \frac{3}{5}$$

c)

L'operatore non dipende dallo spin. La degenerazione ($\text{deg}=6$) non è rimossa e tutti i livelli vengono spostati di

$$\Delta E = e\gamma \langle \text{fond} | z' | \text{fond} \rangle$$

Dati che $|\text{fond}\rangle = |0\rangle_x |0\rangle_y |0\rangle_z$ (base cartesiana)

$$\Delta E = e\gamma \sum_z \langle 0 | z' | 0 \rangle_z = e\gamma \langle 0 | z' | 0 \rangle_{1D}$$

(9)

Ora $a + a^\dagger = \sqrt{2} \sqrt{\frac{\mu \omega}{\hbar}} q$

$$q = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{\hbar}{\mu \omega}} (a + a^\dagger)$$

Quindi $q|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{\hbar}{\mu \omega}} |1\rangle$

$$\langle 0|q^2|0\rangle = |q|0\rangle|^2 = \frac{\hbar}{2\mu\omega}$$

Quindi $\Delta E = \epsilon \gamma \frac{\hbar}{2\mu\omega} = \epsilon \frac{\hbar}{2\mu\omega} \overbrace{\frac{1}{2} \mu \omega^2}^{\gamma} = \frac{\epsilon}{4} \hbar \omega$

d)

Possiamo riscrivere H come

$$H = \frac{p^2}{2\mu} + \gamma(x^2 + y^2) + \gamma(1+\epsilon)z^2$$

Se $\omega = 2\sqrt{\frac{\gamma}{m}}$, $\Omega = \omega\sqrt{1+\epsilon}$ lo spettro è

$$E_n = \hbar\omega(n_x + n_y + 1) + \hbar\Omega(n_z + \frac{1}{2}) \quad n = (n_x, n_y, n_z)$$

Quindi lo stato fondamentale ha energia

$$E = \hbar\omega + \hbar\omega\sqrt{1+\epsilon} \frac{1}{2} \quad \sqrt{1+\epsilon} \approx 1 + \frac{\epsilon}{2}$$

$$= \frac{3}{2}\hbar\omega + \frac{\hbar\omega}{4}\epsilon \quad (\text{per } \epsilon \ll 1)$$

Riproduciamo il risultato al punto c)