Pagina web del corso: nel portale
www.elearning.uniroma1.it

https://elearning.uniroma1.it/course/view.php?id=4572

Testi:
- Libri del liceo
- Prima parte di un libro di Analisi I
- Libri di "precorso"
- Materiale che posterò sulla pagina web del corso, compresi esercizi.

Ricevimento studenti: mercoledì 11:00 ÷ 13:00
dip Matematica, Città Universitaria, piano terra, st. 4.
dallaglio@mat.uniroma1.it

Insiemi numerici

$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$ interi naturali

$\mathbb{N}_+ = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$

$\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots\}$ interi relativi

$\mathbb{Q} = \left\{ \pm \frac{m}{n} \; ; \; m, n \in \mathbb{N}, \; n \neq 0 \right\}$ numeri razionali

N.B. Bisogna identificare tra loro frazioni che corrispondono allo stesso numero, per es. $\frac{1}{3}, \frac{2}{6}, \frac{10}{30}$

L'identificazione è come segue:

$$\frac{m}{n} \sim \frac{p}{q} \iff mq = np.$$

Si definiscono le operazioni, per esempio

$$\frac{m}{n} + \frac{p}{q} = \frac{mq + np}{nq}$$

Bisogna controllare che il risultato non dipenda dalle frazioni scelte

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{5}{6} \qquad \frac{2}{6} + \frac{5}{10} = \frac{20+30}{60} = \frac{50}{60}$$

Rappresentazione dei razionali come sviluppi decimali.

$$\frac{5}{4} = 1{,}25 = 1 + \frac{2}{10} + \frac{5}{100}$$

$$\begin{array}{l|l} 5{,}0 & 4 \\ \hline 10 & 1{,}25 \\ \ \ 20 & \end{array}$$

$$\frac{1}{3}$$

$$\begin{array}{l|l} 1, & 3 \\ \hline 10 & 0{,}33333\ldots \\ \ \ 10 & \end{array}$$

$$\frac{1}{3} = 0{,}\overline{3} = \frac{3}{10} + \frac{3}{100} + \frac{3}{1000} + \cdots = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{3}{10^k}$$

$$\frac{9}{7} = 1{,}\overline{285714}$$

$$\begin{array}{l|l} 9 & 7 \\ \hline 20 & 1{,}285714285714285714 \\ \ \ 60 & \\ \ \ \ \ 40 & \\ \ \ \ \ \ \ 50 & \\ \ \ \ \ \ \ \ \ 10 & \end{array}$$

30

20

- Un numero razionale può essere sempre scritto come uno sviluppo decimale finito o periodico.
- Viceversa, uno sviluppo decimale finito o periodico corrisponde sempre a un numero razionale (frazione generatrice)

$$3{,}71 = 3 + \frac{7}{10} + \frac{1}{100} = \frac{371}{100}$$

$$0{,}\overline{2} = \frac{2}{10} + \frac{2}{100} + \frac{2}{1000} + \dots =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{10^k} = 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{10^k} = \frac{2}{10} \sum_{h=0}^{\infty} \left(\frac{1}{10^h}\right) = \left(\frac{1}{10}\right)^h$$

$$= \frac{2}{10} \cdot \frac{10}{9} = \frac{2}{9}$$

Infatti si ha (Analisi I):

$$\boxed{\sum_{k=0}^{\infty} r^k = 1 + r + r^2 + r^3 + r^4 + \dots = \frac{1}{1-r} \qquad \forall r \in (-1,1)}$$

se $r = \frac{1}{10}$ $\quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{10^k} = \frac{1}{1-\frac{1}{10}} = \frac{10}{9}$

$$3{,}82\overline{12} = \frac{382}{100} + \frac{12}{10^4} + \frac{12}{10^6} + \frac{12}{10^8} + \dots =$$

$$= \frac{382}{100} + \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{12}{100^k} = \frac{382}{100} + \frac{12}{10^4} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{100^k} =$$

$$= \frac{382}{100} + \frac{12}{10^4} \frac{1}{1-\frac{1}{100}} = \frac{382}{100} + \frac{12}{10^{\cancel{4}\,2}} \cdot \frac{\cancel{100}}{99} =$$

$$= \frac{382}{100} + \frac{12}{9900}$$

$$0,\overline{9} = \frac{9}{10} + \frac{9}{100} + \frac{9}{1000} + \dots =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{9}{10^k} = \frac{9}{10} \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{10}\right)^k}_{10/9} = \frac{9}{10} \cdot \frac{10}{9} = 1$$

$$\frac{1}{4} = 0,25 = 0,24\overline{9}$$

Con i numeri razionali si possono fare le quattro operazioni. Esse godono delle seguenti proprietà, ben note.

P1. $x + y = y + x \ \ \forall\, x, y$ (proprietà commutativa);
P2. $(x + y) + z = x + (y + z) \ \ \forall\, x, y, z$ (proprietà associativa);
P3. $\exists!$ elemento, detto **zero** e indicato con 0, tale che $x + 0 = x$ $\forall\, x$ (esistenza dell'elemento neutro rispetto alla somma);
P4. $\forall\, x\ \exists!$ elemento, detto **opposto** di x e indicato con $-x$, tale che $x + (-x) = 0$ (esistenza dell'opposto).

proprietà della somma

P5. $x \cdot y = y \cdot x \ \ \forall\, x, y$ (proprietà commutativa);
P6. $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z) \ \ \forall\, x, y, z$ (proprietà associativa);
P7. $\exists!$ elemento $\neq 0$, detto **unità** e indicato con 1, tale che $x \cdot 1 = x \ \ \forall x$ (esistenza dell'elemento neutro rispetto al prodotto);
P8. $\forall\, x \neq 0\ \exists!$ elemento, detto **reciproco** di x e indicato con x^{-1} o $1/x$, tale che $x \cdot x^{-1} = 1$ (esistenza del reciproco).

proprietà del prodotto

P9. $(x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z \ \ \forall\, x, y, z$ (proprietà distributiva).

Negli insiemi $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Q}$ è definita una **relazione d'ordine** (totale), indicata con il simbolo "$\leq$", che gode delle seguenti proprietà:

P10. $\forall x, y$ vale almeno una delle due relazioni $x \leq y$ o $y \leq x$ (dicotomia);
P11. $x \leq x \ \ \forall x$ (proprietà riflessiva);
P12. se valgono $x \leq y$ e $y \leq x$ allora $x = y$ (antisimmetria);
P13. se $x \leq y$ e $y \leq z$, allora $x \leq z$ (proprietà transitiva).

ordinamento

P14. se $x \leq y$, allora $x + z \leq y + z \ \ \forall\, z$;
P15. se $x \geq 0$ e $y \geq 0$, allora $x \cdot y \geq 0$.

È anche utile introdurre il simbolo $<$ (e ovviamente $>$) di "disuguaglianza stretta", che verifica ancora (P13)–(P.15):

$$x < y \quad \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \quad x \leq y \ \text{ e } \ x \neq y\,.$$

ordinamento + operazioni

Tuttavia nei numeri razionali alcune operazioni relativamente intuitive non possono essere svolte: per esempio l'estrazione di radice.

<u>Prop.</u> $\nexists\ q \in \mathbb{Q}$ t.c. $q^2 = 2$.

<u>Dim.</u> per assurdo, supponiamo che esista $m, n \in \mathbb{N}$ t.c.

$$\left(\frac{m}{n}\right)^2 = 2$$

Posso supporre m e n primi tra loro, altrimenti semplifico

$$m^2 = 2n^2 \Rightarrow m^2 \text{ è pari} \Rightarrow m \text{ è pari} \Rightarrow m = 2k \quad k \in \mathbb{N}.$$

$$\Downarrow$$

$$\cancel{4}^{\,2}k^2 = \cancel{2}n^2 \Rightarrow 2k^2 = n^2 \Rightarrow n^2 \text{ pari} \Rightarrow n \text{ pari}.$$

<u>assurdo</u>

Quindi, se si resta nei razionali, non è possibile considerare la radice quadrata di 2.