

Pagina web del corso.

<https://elearning.uniroma1.it/course/view.php?id=1536>

Domani il ricevimento studenti è sospeso.

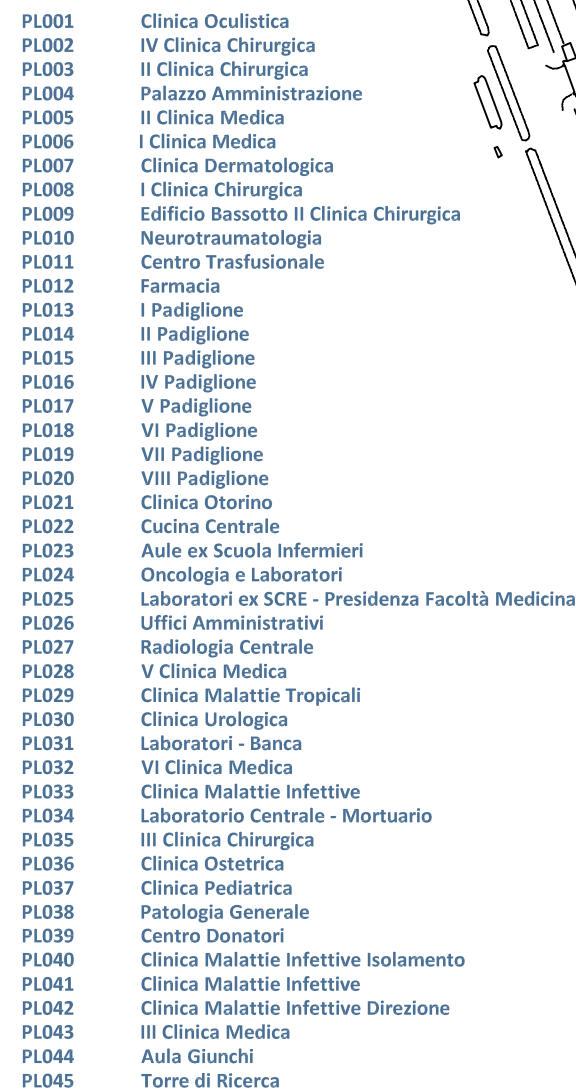
Domani niente lezione

Giovedì 14:30 → 18:30

Analisi I

Aula A di Oculistica (P1001), Policlinico

POLICLINICO



CITTÀ UNIV.

RIASSUNTO:

Maggiorante di un insieme E è un $M \in \mathbb{R}$ t.c. $M \geq x \quad \forall x \in E$
minorante m $m \leq x$ "

Insieme limitato sup $\Leftrightarrow$ ammette maggioranti
infer. $\Leftrightarrow$ *minoranti*

Massimo di E è un maggiorante di E che appartiene a E .
Minimo *minorante*

DEF Sia $E \subseteq \mathbb{R}$ un insieme limitato superiormente.

Chiamiamo **estremo superiore di E** il più piccolo (il minimo) dei maggioranti di E

$$\mathbb{R} \ni \sup E = \min \{ \text{maggioranti di } E \}$$

Sia $E \subset \mathbb{R}$ un insieme limitato inferiormente.

Chiamiamo **estremo inferiore di E** il più grande (il massimo) dei minoranti di E

$$\inf E = \max \{ \text{minoranti di } E \} \in \mathbb{R}$$

Esempio.

$E = (0, 1)$. Abbiamo visto ieri che

$$\{ \text{maggioranti di } E \} = [1, +\infty), \quad \{ \text{minoranti di } E \} = (-\infty, 0]$$

Il minimo di questo insieme è 1 $\Rightarrow \sup E = 1$.
 $\inf E = 0$

$$E = (0, 1]$$

$$\{ \text{maggioranti di } E \} = [1, +\infty) \Rightarrow \sup E = \min [1, +\infty) = 1$$

OSS se E ammette *minimo* $\max$, esso è anche estremo *inf* sup

Sia $x_0 = \max E$. Ovviamente x_0 è un maggiorante di E .

Ogni numero $< x_0$ non maggiora $x_0 \in E$, quindi non è un maggior.

$\Rightarrow x_0$ è il minimo dei maggioranti $\Rightarrow$ è il sup

TEOREMA Sia $E \subset \mathbb{R}$ limitato superiormente. inferiormente
 Allora $\exists!$ $\sup E = \min \{ \text{maggioranti di } E \}$
esiste ed è unico (senza dim.)

Caratterizzazione del $\sup E$ (E limitato sup.)

$\lambda = \sup E$ se :

1) λ è un maggiorante di E , cioè

$$\lambda \geq x \quad \forall x \in E.$$

2) Ogni numero più piccolo di λ non è maggiorante di E , cioè

$\forall \varepsilon > 0 \quad \lambda - \varepsilon$ non è maggiorante di E , cioè

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists x_\varepsilon = x(\varepsilon) \in E \text{ t.c. } \lambda - \varepsilon < x_\varepsilon$$

Esempio

$$E = \left\{ x = \frac{2n-1}{n}, n \in \mathbb{N}_+ \right\} =$$

$$= \left\{ 1, \frac{3}{2}, \frac{5}{3}, \frac{7}{4}, \frac{9}{5}, \dots \right\}$$

OSS E è limitato superiormente : 2 è un maggiorante
 $2 \geq x \quad \forall x \in E$? $2 \geq 2 - \frac{1}{n} \quad \forall n \in \mathbb{N}_+$ ok!

Congettura : $\sup E = 2$.

Verifichiamo con la caratterizzazione

1) $2 \geq x \quad \forall x \in E$ sì, già visto!

2) Fix $\varepsilon > 0$, cerchiamo $x_\varepsilon \in E$ t.c. $x_\varepsilon > 2 - \varepsilon$

cioè cerco $n_\varepsilon \in \mathbb{N}_+$ t.c. ~~$2 - \frac{1}{n} > 2 - \varepsilon$~~

$\Leftrightarrow$

$$\frac{1}{n} < \varepsilon$$

$\Leftrightarrow$

$$n > \frac{1}{\varepsilon}$$

sì, basta prendere $n_\varepsilon > \frac{1}{\varepsilon}$. $\square$

- Se avessi congetturato (erroneamente) $\sup E = 2,01$,
la cond. 1) sarebbe sempre vera,
mentre la 2) fallirebbe per $\varepsilon = 0,01$
- se avessi congetturato (erroneamente) $\sup E = 1,99$
fallirebbe la 1).

Caratterizzazione di $\inf E$

$\lambda = \inf E$ se e solo se

1) $\lambda \leq x \quad \forall x \in E$.

2) $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists x_\varepsilon \in E \quad \text{t.c.} \quad x_\varepsilon < \lambda + \varepsilon$.

$$E = \left\{ 2 - \frac{1}{n}, \quad n \in \mathbb{N}_+ \right\}$$

In questo caso 1 è il minimo di E , è quindi anche l'inf.

$1 \in E$, voglio provare che $1 \leq x \quad \forall x \in E$.

$\Leftrightarrow$

$$1 \leq 2 - \frac{1}{n} \quad \forall n \in \mathbb{N}_+$$

$\Leftrightarrow$

$$\frac{1}{n} \leq 1$$

$\Leftrightarrow$

$$n \geq 1$$

OK.

Con la caratterizzazione dell'inf.

1) $1 \leq x \quad \forall x \in E$ appena verificata

2) $\forall \varepsilon > 0$ cercare $x_\varepsilon \in E$ t.c. $x_\varepsilon > 1 - \varepsilon$

basta prendere $x_\varepsilon = 1$

$$E = \left\{ x = \frac{5}{n^2} : n \in \mathbb{N}^+ \right\} = \left\{ 5, \frac{5}{4}, \frac{5}{9}, \frac{5}{16}, \frac{5}{25}, \frac{5}{36}, \dots \right\}$$

$$\sup E = \max E = 5$$

$$5 \in E$$

$$5 \geq \frac{5}{n^2} \quad \forall n \in \mathbb{N}^+$$

$$n^2 \geq 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}^+ \\ \text{vero!}$$

$$\inf E = 0 \quad (\text{non è minimo})$$

$$1) \quad 0 \leq x \quad \forall x \in E$$

$$0 \leq \frac{5}{n^2} \quad \forall n \in \mathbb{N}^+ \quad \text{sic!}$$

2) Fix $\varepsilon > 0$,

cerco $x_\varepsilon \in E$ t.c. $x_\varepsilon < 0 + \varepsilon$

$$\text{cerco } n_\varepsilon \in \mathbb{N} \quad \text{t.c.} \quad \frac{5}{n_\varepsilon^2} < \varepsilon$$

$$n_\varepsilon^2 > \frac{5}{\varepsilon}$$

$$\text{Basta prendere } n_\varepsilon > \sqrt{\frac{5}{\varepsilon}}$$

DEF se $E \subseteq \mathbb{R}$ è illimitato ^{inferiormente} superiormente,
diremo che $\sup E = +\infty$
 $\inf E = -\infty$

Alcune proprietà dei limiti

$$E \subseteq F \subseteq \mathbb{R}.$$

Allora

$$\sup E \leq \sup F \\ \inf E \geq \inf F.$$

Dim. se $E \subseteq F$, allora ogni maggiorante di F è anche maggiorante di E .

$E, F \subseteq \mathbb{R}$ limitati superiormente. Allora.

$$\sup(E \cup F) = \max \{ \sup E, \sup F \}$$

$$\inf(E \cup F) = \min \{ \inf E, \inf F \}$$

$$\text{Sia } E = \left\{ x = (-1)^n \frac{6n^3 - 3}{n^3}, \quad n \in \mathbb{N}_+ \right\}$$

$$(-1)^n \frac{6n^3 - 3}{n^3} = \begin{cases} 6 - \frac{3}{n^3} & n \text{ pari} \\ -6 + \frac{3}{n^3} & n \text{ dispari} \end{cases}$$

$$E_1 = \left\{ -6 + \frac{3}{n^3}, \quad n \text{ dispari} \right\}$$

$$E_2 = \left\{ 6 - \frac{3}{n^3}, \quad n \text{ pari} \right\}$$

$$\sup E_1 = \max E_1 = -6 + \frac{3}{1^3} = -3$$

$$\inf E_1 = -6 \quad (\text{non è minimo})$$

$$\sup E_2 = 6 \quad (\text{non è massimo})$$

$$\inf E_2 = \min E_2 = \frac{45}{8}$$

$$\sup E = \max \{ 6, -3 \} = 6 \quad (\text{non è max.})$$

$$\inf E = \min \left\{ -6, \frac{45}{8} \right\} = -6 \quad (\text{non è minimo})$$

Verifico con la caratterizzazione che $\inf E = -6$.

$$1) -6 \stackrel{?}{\leq} x \quad \forall x \in E$$

$$-6 \stackrel{?}{\leq} (-1)^n \left(6 - \frac{3}{n^3} \right) \quad \forall n \in \mathbb{N}_+$$

ovvio per n pari (il 2° membro è positivo)
per n dispari diventa

$$\cancel{-6} \stackrel{?}{\leq} \cancel{-6} + \frac{3}{n^3} \quad \forall n \in \mathbb{N}_+ \text{ dispari}$$

$$0 \stackrel{?}{\leq} \frac{3}{n^3} \quad \text{vero!}$$

2) Fix $\varepsilon > 0$, cerco $n_\varepsilon \in \mathbb{N}_+$ t.c.

$$-6 + \varepsilon \stackrel{?}{>} (-1)^{n_\varepsilon} \left(6 - \frac{3}{n_\varepsilon^3} \right)$$

Conviene prendere n_ε dispari, in questo caso diventa

$$\cancel{-6} + \varepsilon \stackrel{?}{>} \cancel{-6} + \frac{3}{n_\varepsilon^3}$$

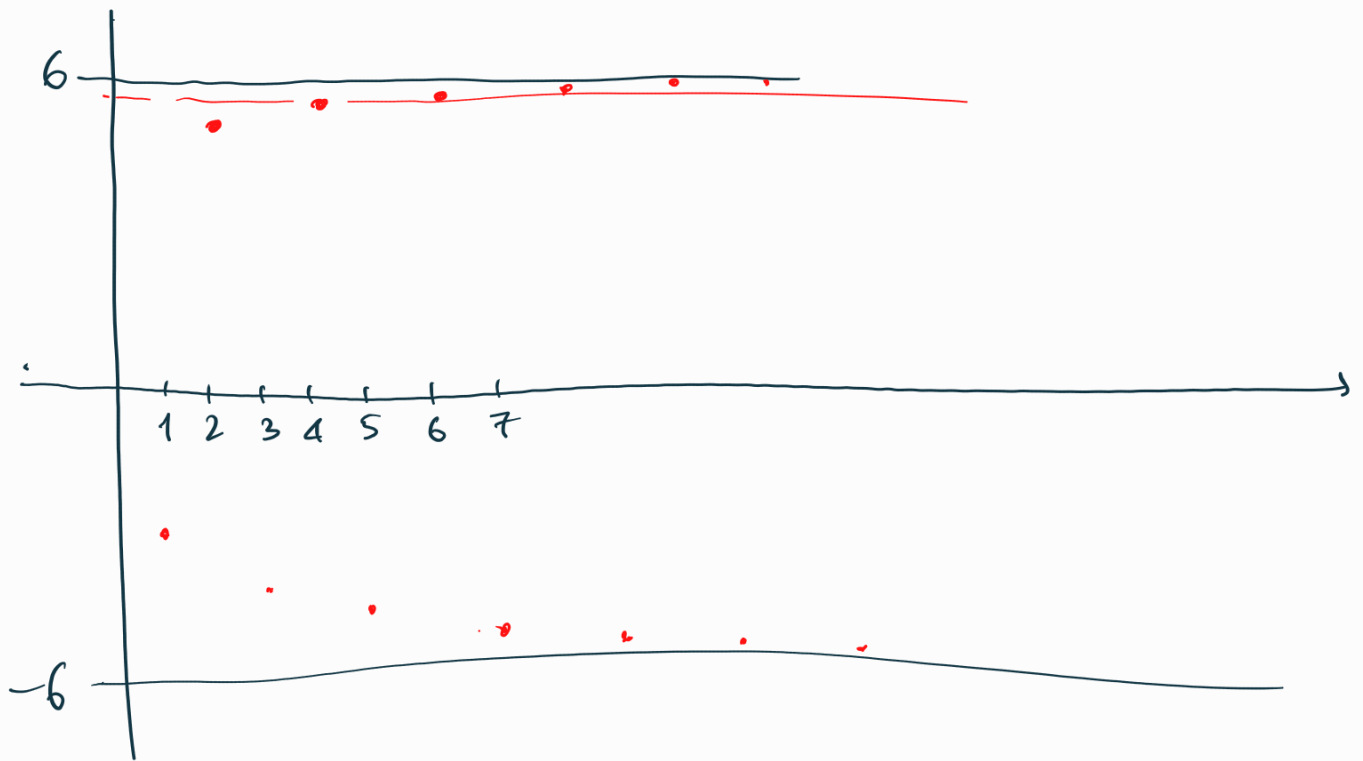
$\Updownarrow$

$$n_\varepsilon^3 > \frac{3}{\varepsilon}$$

$\Updownarrow$

$$n_\varepsilon > \sqrt[3]{\frac{3}{\varepsilon}}$$

basta prendere n_ε dispari
maggiore di $\sqrt[3]{\frac{3}{\varepsilon}}$.



Una funzione è una legge che associa ad ogni elemento di un insieme A , detto dominio, un unico elemento di un insieme B , detto codominio.

$$f: \begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & B \\ \cup & & \cup \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array}$$

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \cancel{\mathbb{R}} [0, +\infty) \\ x & \longmapsto & f(x) = x^2 \end{array}$$

$$f(-3) = 9$$

Una successione è una funzione il cui dominio è dato da $\mathbb{N}$ oppure $\mathbb{N}_+$

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ n & \longmapsto & \sqrt{3n+5} = \cancel{f(n)} a_n \end{array}$$

