Solo questa settimana:

Lun-Mart. – regolari

Merc – niente lezioni

Giov. – 4 ore di Analisi. Aula A edificio PL01

14:30 → 18:30.

Pagina web del corso: nel portale www.elearning.uniroma1.it

Libro di testo:

Bertsch - Dall'Aglio - Giacomelli – Epsilon 1 – McGraw-Hill.
Altri libri (in alternativa o a complemento) sono indicati nella pagina web.

Esercizi:

- Libro di testo
- Esercizi sulla pag. web
- Marcellini - Sbordone
  Salsa - Squellati
  Amar - Bersani
  altri indicati nella pagina web.

Modalità d'esame   Prova scritta (pratica): $2^h 30'$.

Prova di teoria: $\begin{cases} 50' \text{ scritto} \longrightarrow \text{voto} \\ \text{prova orale. } 10'-20' \end{cases}$

Orario di ricevimento   Merc. 11:00 → 13:00

Dip. Matematica (Città Universitaria), Piano terra, st. 4

(Scrivere email il giorno prima)

dallaglio@mat.uniroma1.it

Esercitazioni facoltative (ma molto consigliate)

Lun - 17-19   aula 6(?)   a partire da 29/9

$\mathbb{R}$ numeri reali   ⇒ Laboratorio

Consideriamo sottoinsiemi di $\mathbb{R}$. $E \subseteq \mathbb{R}$

$E \subseteq \mathbb{R}$ vuol dire $\forall x \in E$ si ha $x \in \mathbb{R}$

per ogni   appartiene

Esempi: $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ $\mathbb{N}_+ = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$

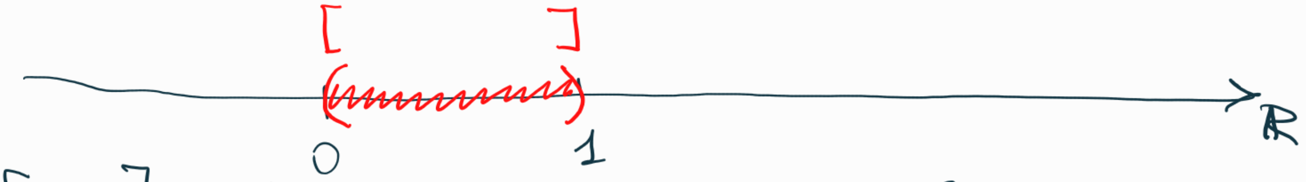
$\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$

$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{m}{n},\ m \in \mathbb{Z},\ n \in \mathbb{N}_+ \right\}$

Intervalli

$(0,1) = \{x \in \mathbb{R} : \quad 0 < x < 1\}$ intervallo aperto

tale che
t.c.



$[0,1] = \{x \in \mathbb{R} \text{ t.c. } \quad 0 \le x \le 1\}$ intervallo chiuso

$[0,1) = \{ \quad \text{"} \quad \text{"} \quad 0 \le x < 1\}$

$(-2,3] = \{ \;\text{'' '' ''}\; -2 < x \le 3 \}$

$(5,+\infty) = \{ x \in \mathbb{R} : \; x > 5 \}$

$(-\infty, 3] = \{ \;\text{'' ''}\; x \le 3 \}$

$E = \left\{ x = \dfrac{n-1}{n} : n \in \mathbb{N}_+ \right\} = \left\{ 0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \dots \right\}$

$F = \left\{ x = \dfrac{5}{n^2} : n \in \mathbb{N}_+ \right\} = \left\{ 5, \frac{5}{4}, \frac{5}{9}, \frac{5}{16}, \frac{5}{25}, \dots \right\}$

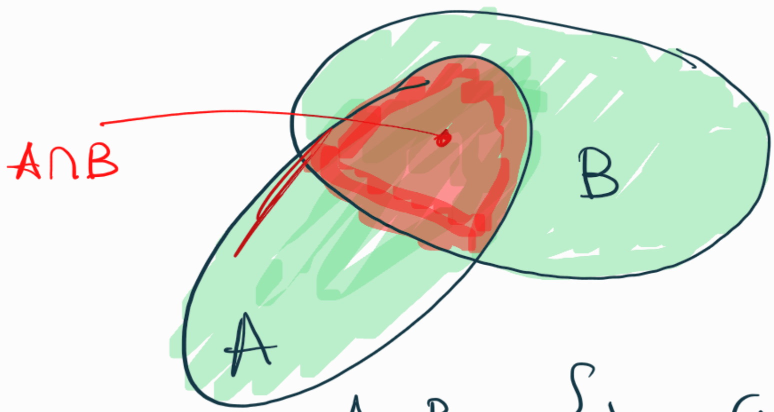
$G = \{ x = n^2 - 3n : n \in \mathbb{N} \} = \{ 0, -2, -2, 0, 4, \dots \}$

$H = \{ x = t^4 - 5t^3 + t^2 , \; t \in \mathbb{R} \}$

$K = [0,2] \cup (3,5] = \{ x \in \mathbb{R} : (0 \le x \le 2) \vee (3 < x \le 5) \}$

A, B insiemi $\qquad A \cup B = \{ x : (x \in A) \vee (x \in B) \}$

oppure (basta che sia vera una delle due)



$A \cap B = \{ x : (x \in A) \wedge (x \in B) \}$

"e inoltre"

DEFINIZIONE Sia $E \subseteq \mathbb{R}$. Sia $M \in \mathbb{R}$ (m). Diremo che M (m) è un **maggiorante** (minorante) di E se

$$M \ge x \quad \forall x \in E$$

$$m \le x \quad \forall x \in E$$

OSS M può appartenere a E oppure NO.

$E = (0,1)$

1 è un maggiorante di E, ma anche $2, 5, \pi$ lo sono
-2 minorante di E " " " $0, -\pi$

OSS se esiste un maggiorante di E, ne esistono infiniti
minorante

DEFINIZIONE Se un maggiorante di E appartiene a E
minorante
lo chiamiamo **massimo** di E.
minimo
Quindi il massimo di un insieme E è un elemento di E che
minimo
infatti è unico, vedi dopo
maggiora tutti gli altri elementi di E.
minora

$E = [0,1]$ ammette massimo $M = 1$

DEFINIZIONE Un insieme si dice **limitato superiormente**
inferiormente
se ammette almeno un maggiorante.
minorante.

Si dice **limitato** se è limitato sia sup. che inferiormente.

- $E = (0,1)$ è limitato sia sup. che inf. $\Rightarrow$ è limitato
- $E = \mathbb{N}$ è limitato inferiormente (0 è minorante)
(e minimo)

  ma è illimitato superiormente, in quanto

  $\forall M \in \mathbb{R} \quad \exists n \in \mathbb{N}$ t.c. $n > M$
  esiste
  ($\Rightarrow$ M non è maggiorante)
- $E = \mathbb{Q}$ è illimitato sia super. che inferiorm.

$$E = \left\{ x = \frac{n-1}{n} : n \in \mathbb{N}_+ \right\} = \left\{ 0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \dots \right\}$$

E è limitato superiormente, in quanto 1 è un maggiorante

$$1 \overset{?}{\geq} x \quad \forall x \in E$$

$$\Updownarrow$$

$$1 \geq \frac{n-1}{n} \quad \forall n \in \mathbb{N}_+$$

$$\Updownarrow \qquad \text{moltiplico per } n>0$$

$$n \geq n-1 \qquad ''$$

vero.

E è limitato inferiormente (0 è un minorante)

$$E = \{ x = n^2 - 3n \,,\ n \in \mathbb{N} \}$$

è limitato superiorm.? <u>NO</u>

Voglio provare che $\forall M \in \mathbb{R}$, M non è maggiorante.

Fissato $M \in \mathbb{R}$, cerco $n \in \mathbb{N}$ t.c. $n^2 - 3n > M$.

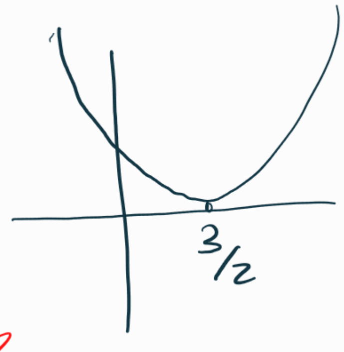
diseq. di 2° grado

$$n^2 - 3n - M > 0 \quad (*)$$

$$x^2 - 3x - M = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9+4M}}{2}$$

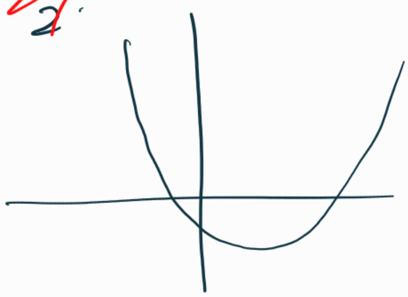
se $M < -\frac{9}{4}$ la diseq^{ne} è sempre vera.



se $M = -\frac{9}{4}$ la diseq^{ne} è vera $\forall n \cancel{\neq \frac{3}{2}} \in \mathbb{N}$.

se $M > -\frac{9}{4}$ la diseq^{ne} è vera

$$\forall n > \frac{3 + \sqrt{9+4M}}{2}$$



Altro modo: devo trovare $n \in \mathbb{N}$ t.c.

$$n^2 - 3n > M$$

$$n^2 - 3n = n\underbrace{(n-3)}_{\substack{\geq \\ 1 \text{ se } n \geq 4}} \overset{\text{se } n\geq 4}{\geq} n \overset{n>M}{>} M$$

basta prendere $n > \max\{4, M\}$

PROP Il massimo di E, se esiste, è unico.

Dim Siano x_1 e x_2 due massimi di E

$x_1 \in E$, $x_1 \geq x$ $\forall x \in E$ prendo $x = \overset{\in E}{x_2} \Rightarrow x_1 \geq x_2$

$x_2 \in E$, $x_2 \geq x$ $\forall x \in E$ " $x = \underset{\in E}{x_1} \Rightarrow x_2 \geq x_1$

$$\overline{x_1 = x_2}$$

$\square$

OSS esistono insiemi limitati sup. che non ammettono massimo.

Esempio:

$E = (0, 1)$

Osserviamo che 1 è un maggiorante di E.

ovviamente tutti i numeri > 1 sono ancora maggioranti.

Voglio provare che $\forall M < 1$, M non è maggiorante.

se $M < 0$ ovviamente ogni elemento di E è maggiore di M

se $0 \leq M < 1$, basta prendere la media aritmetica

$$x = \frac{M+1}{2} \in E, \quad x > M.$$

Quindi abbiamo provato che

$$\{\text{maggioranti di } E\} = [1, +\infty)$$

Nessuno di questi numeri appartiene a E, quindi E non ammette massimo.