Lezione Fermi 20

Luciano Maiani, AA 14-15

L'Universo in grande

Sommario

1. Il paradosso di Olbers
2. Il Principio di E. Mach
3. Osservatori "tipici" e moto del substrato
4. Il tempo cosmico
5. Le equazioni di Einstein
6. Gli universi di Friedman e Lemaitre

non e' un semplice sogno ad occhi aperti, ma il risultato di una matematica sobria e covincente

E. Schroedinger, Meccanica Statistica

Il paradosso di Olbers

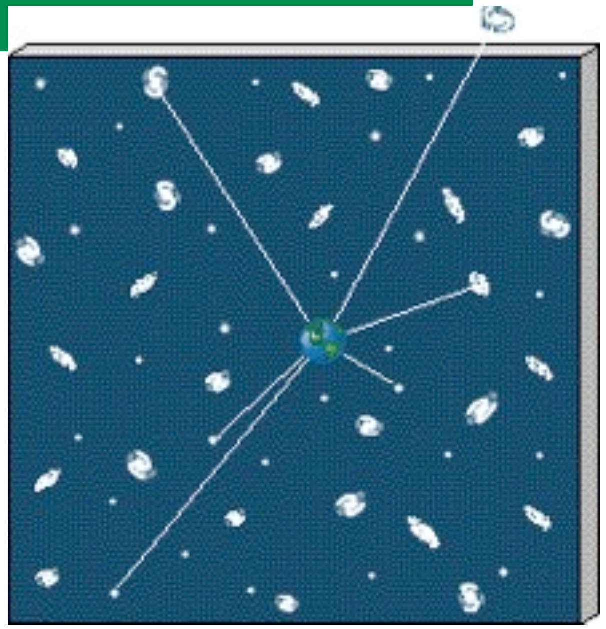
- La visione piu' immediata dell'Universo in grande e' che esso sia euclideo e di estensione infinita
- per quanto riguarda l'evoluzione nel tempo, stelle e galassie individuali possono nascere e morire, ma potremmo pensare che, nel complesso, *su grande* scala, l'Universo sia in uno stato stazionario.
- Questa visione, prevalente nella scienza dall'antichita' fino ai primi decenni del Novecento, si scontra con un semplice fatto osservativo: il cielo di notte e' blu.
- Il paradosso prende il nome dall'astronomo Heinrich Wilhelm Matthäus Olbers, (1758–1840)

German physician and skilled amateur astronomer who discovered the asteroids Pallas (1802) and Vesta (1807), rediscovered Ceres based on a position predicted by Carl Gauss, and found five comets (in 1798, 1802, 1804, 1815, and 1821) one of which (that of 1815) bears his name. He also formulated a method of calculating the orbits of comets (1779), which became standard in the 19th century; rediscovered the planet Uranus (1781); proposed that the pressure of light is responsible for comet's tails always pointing away from the Sun (1811); and first drew attention to what became known as Olbers' Paradox (1823).

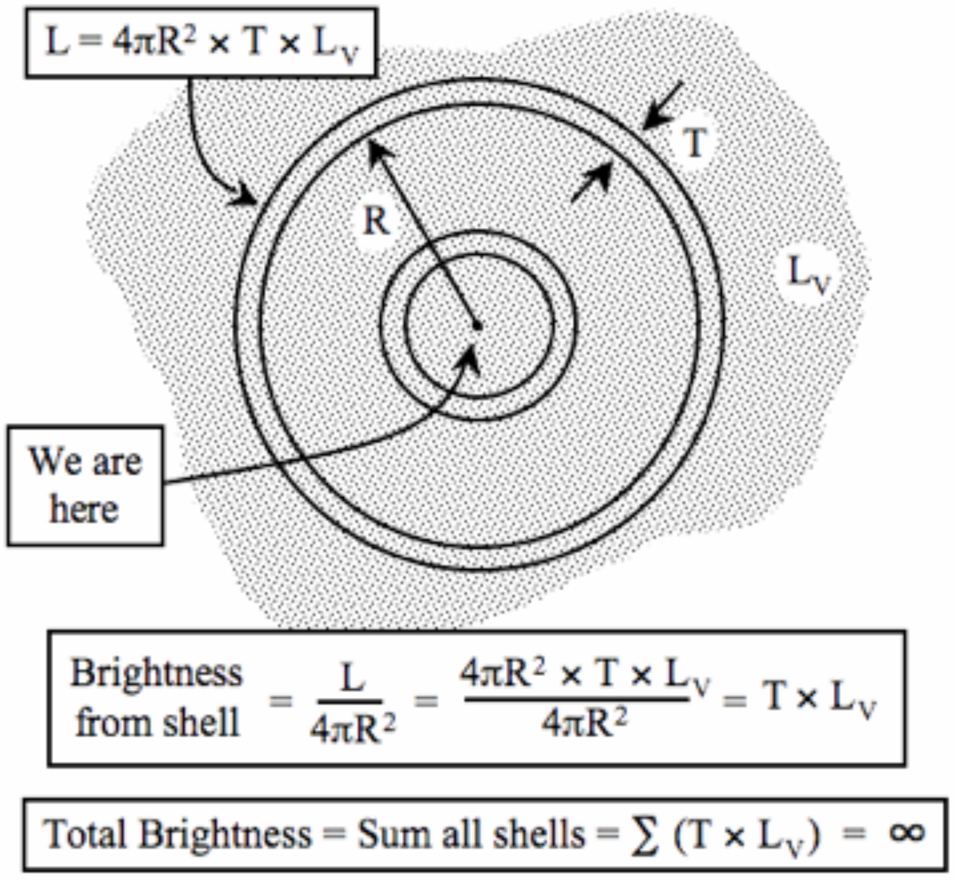
Olbers was a supporter of pluralism and of the increasingly contentious idea that the Moon was inhabited by intelligent beings (see Moon, life on). In the same paper in which he presented his famous paradox, he wrote that it is "most highly probable" that "all of infinite space is filled with suns and their retinues of planets and comets."

Olbers was born at Arbergen, a village of Bremen, studied medicine at Göttingen from 1777 to 1780, at subsequently practiced at Bremen. In 1811 he was a successful competitor for the prize proposed by Napoleon for the best "Memoir on the Croup."

Olbers (continua)



- In un universo statico e infinito, in ogni direzione si guardi, prima o poi si incontra una galassia
- se assumiamo che, in media, la luminosita' delle galassie sia la stessa per tutte, quelle piu' lontane avranno una luminosita' apparente inversamente proporzionale al quadrato della distanza, e tuttavia questo fattore e' compensato dal fatto che in un dato intervallo angolare, quelle lontane sono molte di piu' di quelle vicine. Di quanto?



- consideriamo un guscio sferico di raggio R e spessore T<<R.
  - Il volume del guscio e' $V = 4\pi R^2 T$,
  - l'energia/sec emessa dal guscio e' $L_{abs} = V L_V$,
  - L_V = luminosita' delle galassie /cm^3 =n L, n=n. di galassie/cm^3, L=energia/sec di ciascuna galassia,
  - luminosita' visuale del guscio e':

$$L_V = \frac{L_{abs}}{4\pi R^2} = nL(4\pi R^2 T)\frac{1}{4\pi R^2} = nLT = cost$$

- con infiniti gusci la luminosita' totale e' infinita!
- abbiamo trascurato il fatto che parte della luminosita' emessa dal guscio e' intercettata dalle galassie che stanno tra noi e il guscio
- la luminosita' visuale da ogni punto del cielo e' pari a quella delle stelle piu' vicine: il cielo non e' blu !

Olbers (continua)

- Cos'e' che non va?
- soluzioni non praticabili:
  - non ci sono piu' galassie dopo una distanza limite: ma per vedere una distribuzione isotropa, la Terra dovrebbe essere al centro
  - l' Universo e' illimitato ma di dimensione finita: ma vedremmo ancora infiniti gusci perche' la luce puo' fare infiniti giri
- ???? il paradosso fu sostanzialmente ignorato: qualcuno lo aggiustera'
- la legge di Hubble risolve il paradosso. Se v=HR, lo spostamento verso il rosso riduce l'energia dei fotoni e la loro velocita' di emissione, quindi riduce la luminosita' delle galassie lontane, in aggiunta al fattore geometrico 1/R2

$$v = HR:$$
$$\frac{\Delta v}{v} = \frac{\Delta \nu}{\nu} = \frac{\Delta h\nu}{h\nu} = \frac{\Delta \epsilon}{\epsilon}$$

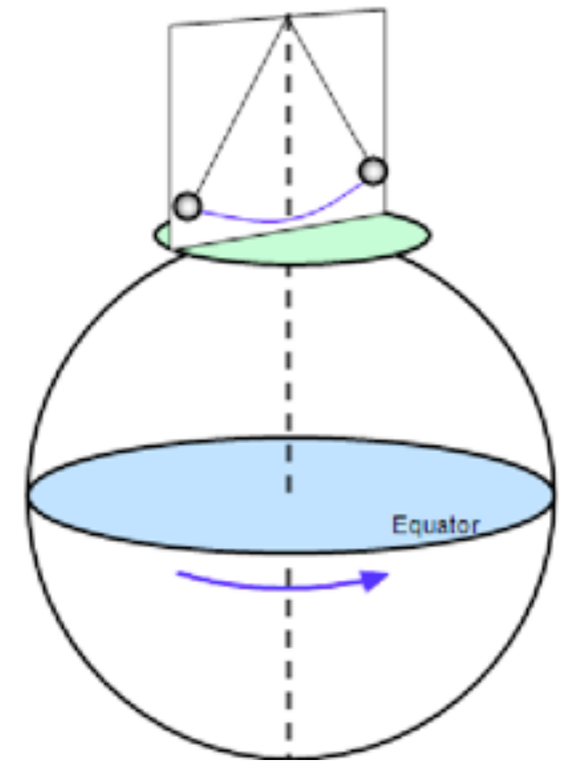
- inoltre, se φ e' il numero di fotoni/sec emessi dalla galassia, si ha anche

$$\frac{\Delta \phi}{\phi} = \frac{\Delta v}{v}$$

- quindi le galassie lontane spariscono dalla vista piu' in fretta:

$$\left(\frac{\Delta L}{L}\right)_{Hubble} = (\frac{\Delta v}{v})^2 \to L \propto R^{-4}$$

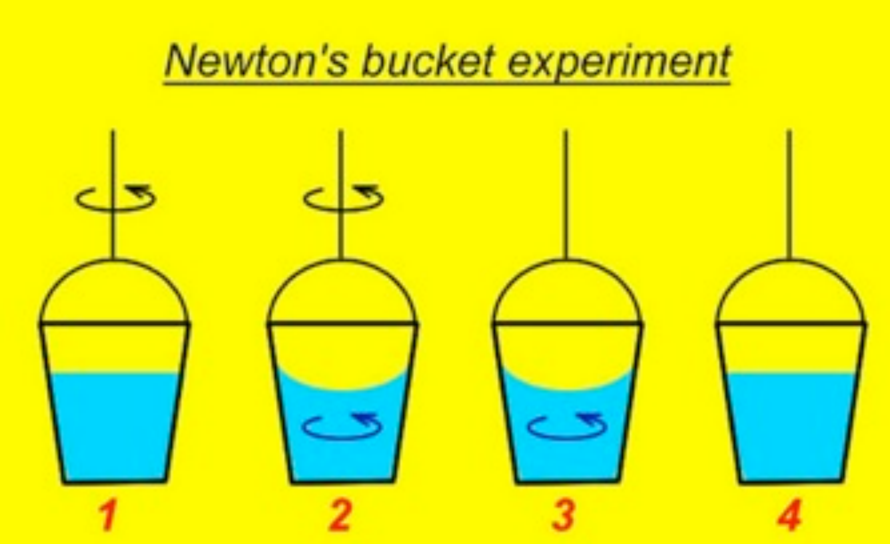
2. Il Principio di Mach



- Le considerazioni formulate da Ernest Mach hanno avuto un ruolo importante ai primi del Novecento, in particolare nel pensiero di Einstein e di altri contemporanei,
- adesso in parte riassorbite nella Relativita' Generale, in parte si sono perse, ma il loro fascino intellettuale e' ancora intatto
- Immaginiamo una Terra coperta in permanenza da nubi impenetrabili, come Venere. Non si conoscono le stelle, ma con Galileo e Newton scopriamo le leggi della dinamica e il principio di relativita'

- possiamo anche scoprire che la Terra ruota con un ***pendolo di Foucalt***: un pendolo messo al polo nord, appare ruotare il suo piano di oscillazione in un giorno (alle nostre latitudini il moto e' piu' complicato)
- Newton: ***in un sistema inerziale esterno alla Terra***, il momento angolare (la normale al piano di oscillazione) si conserva. Per questo, visto dalla Terra che ruota, il piano ruota nel senso opposto
- di sistemi inerziali ce ne sono infiniti, ma quello in cui si vede il piano fermo e' uno solo, e ben determinato (stiamo assumendo che la Terra non abbia un moto traslazionale).
- Se le nubi si levassero, scopriremmo che questo sistema inerziale e' il sistema delle "stelle fisse", ovvero il sistema in cui la stelle lontane sono ferme: e' una coincidenza ????

Il secchio di Newton



Newton discusses a bucket filled with water hung by a cord. If the cord is twisted up tightly on itself and then the bucket is released, it begins to spin rapidly, not only with respect to the experimenter, but also in relation to the water it contains.

Although the relative motion at stage 1 is the greatest, the surface of the water remains flat, indicating that the parts of the water have no tendency to recede from the axis of relative motion, despite proximity to the pail. Eventually, as the cord continues to unwind, the surface of the water assumes a concave shape (2-3) as it acquires the motion of the bucket spinning relative to the experimenter. This concave shape shows that the water is rotating, despite the fact that the water is at rest relative to the pail. In other words, it is not the relative motion of the pail and water that causes concavity of the water, contrary to the idea that motions can only be relative, and that there is no absolute motion. Possibly the concavity of the water shows rotation relative to *something else*: say absolute space? Newton says: "One can find out and measure the true and absolute circular motion of the water".

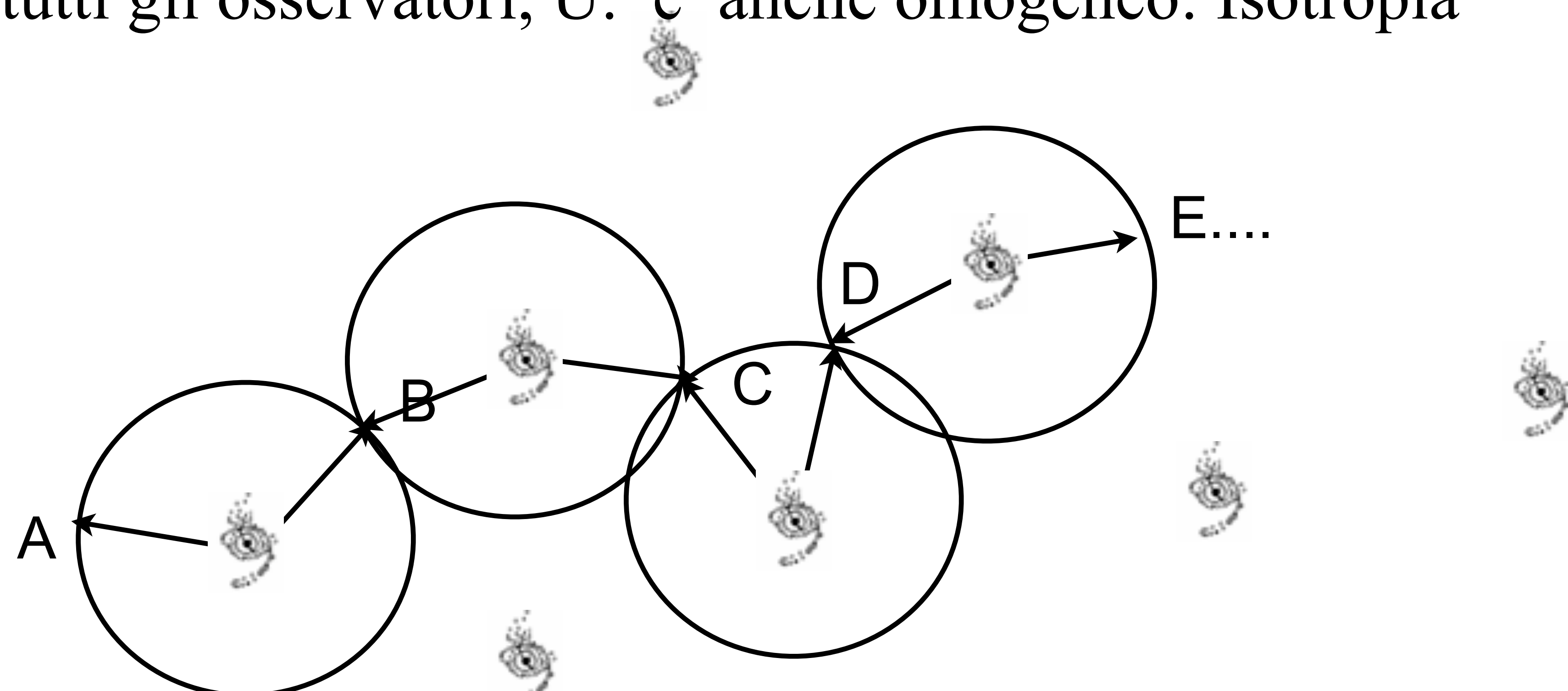
- Un secchio d'acqua al polo nord mostrerebbe una concavita' dovuta al moto...rispetto a cosa?

When, accordingly, we say that a body preserves unchanged its direction and velocity *in space*, our assertion is nothing more or less than an abbreviated reference to *the entire universe*. [cioe', ancora, ***le stelle fisse***]

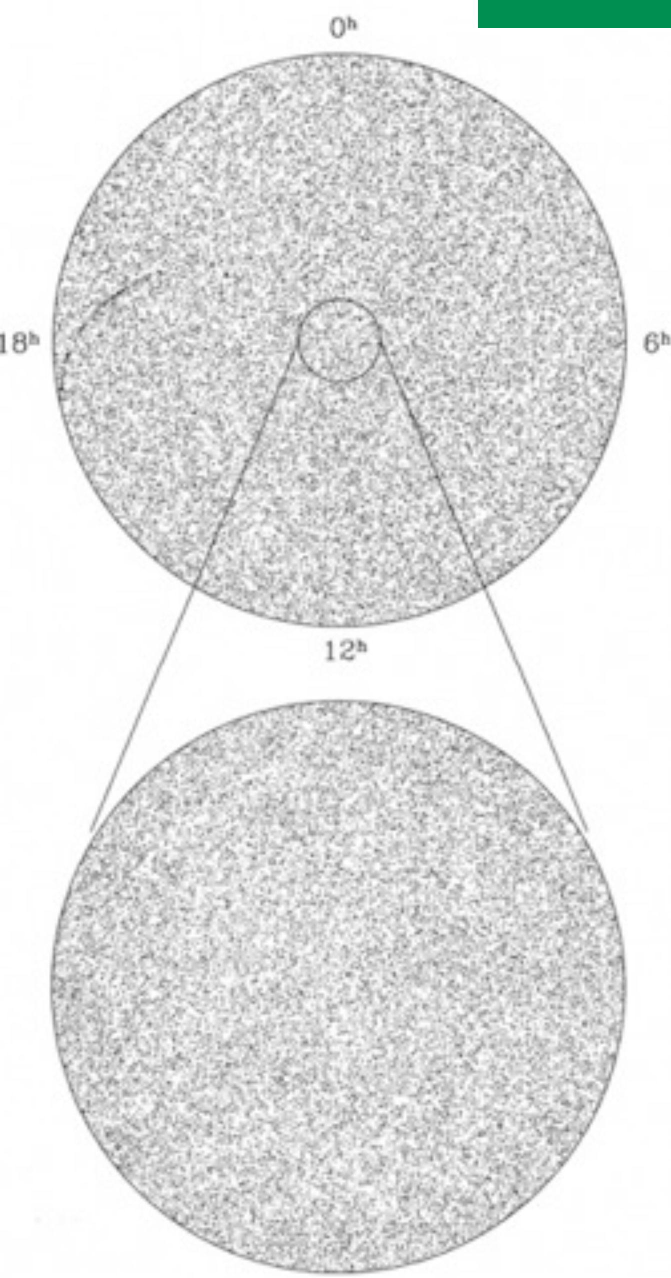
— Ernst Mach; as quoted by Ciufolini and Wheeler: *Gravitation and Inertia*, p. 387

Il Principio di Mach e i Principi Cosmologico/Copernicano

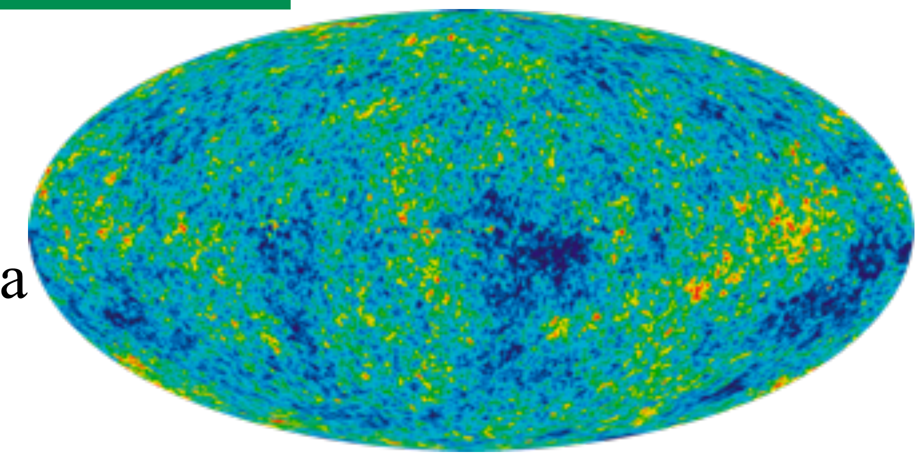
- Mach: *Il sistema inerziale locale* ***e' determinato*** *dal moto, mediato in qualche modo, delle stelle (delle masse) lontane*
- e' un effetto dei corpi lontani, come il paradosso di Olbers
- P. Cosmologico: *la distribuzione di massa nel'Universo, mediata su dimensioni > della distanza tra cluster di galassia (diciamo 1000 Mpc) e' uniforme* (Universo omogeneo)
- P. Cosmologico attenuato: *la distribuzione .... e' isotropa* (Universo isotropo)
- P. Copernicano: *non ci sono osservatori privilegiati, ma solo osservatori tipici*
- tutti gli o. tipici sono equivalenti, i.e. *vedono lo stesso Universo, in media*
- Nota: se U. e' isotropo per tutti gli osservatori, U. e' anche omogeneo: Isotropia in ogni punto=Omogenita'
- A=...=E

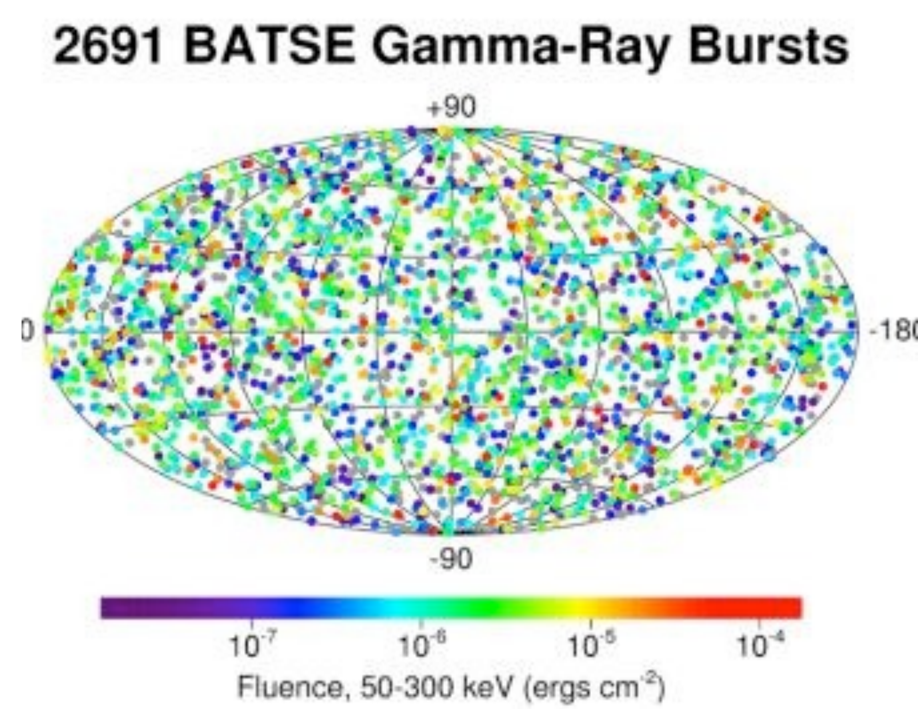


Isotropia: da 0.1 milli eV a 10 EeV



- CMB:
- Distribuzione del CMB, dopo sottrazione dell'asimmetria (di dipolo) dovuta al moto della Terra insieme alla Galassia
- le fluttuazioni di temperatura visibili sono dell'ordine $\Delta T/T \sim 10^{-6}$
- energia dei fotoni del CMB ~3 10^{-4} eV





Conteggio delle Galassie

- all-sky map of the locations of objects detected by radio telescopes

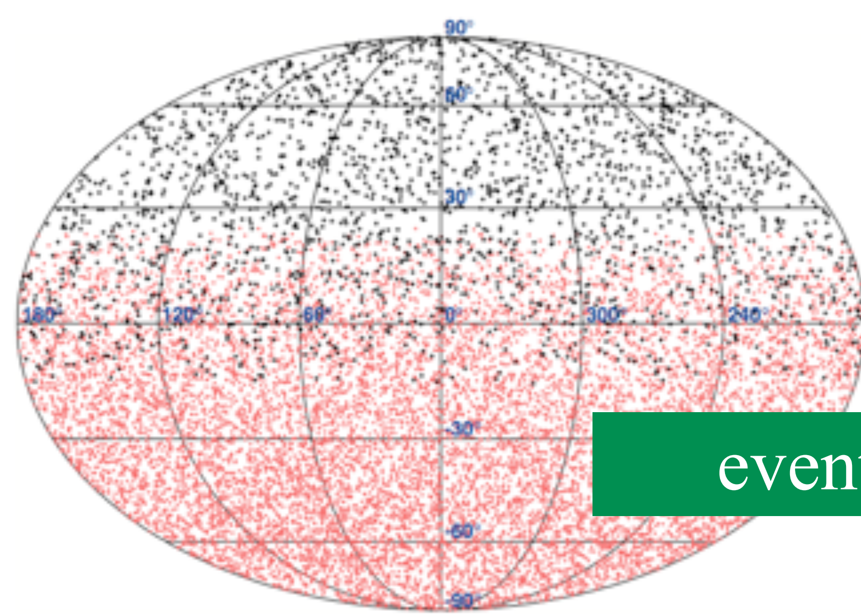
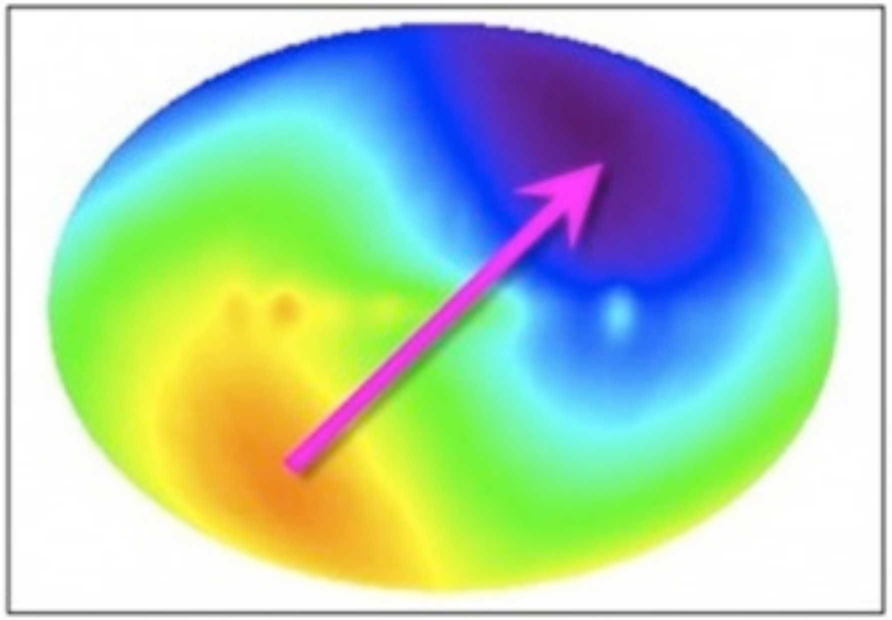


Figure 7. Arrival directions of Auger (red points in the south hemisphere) and Telescope Array events (black crosses in the northern hemisphere) above 10^{19} eV in equatorial coordinates, using a Mollweide projection.
(A color version of this figure is available in the online journal.)

eventi con E> 10^{19} eV

3. Osservatori “tipici” e moto del substrato

- Il Principio Copernicano non si puo’ applicare a tutti gli osservatori, ma solo a quelli “tipici”: chi sono?
- es. la Terra non e’ proprio “tipico”: gli spettri delle galassie davanti a noi (rispetto al moto della T. nella Galassia) sono meno arrossate, quelle indietro lo sono di piu’. Non c’e’ isotropia
- Lo stesso rispetto al fondo cosmico di microonde (CMB)



- doppler shift della radiazione del fondo cosmico dovuto al moto della Terra

- gli ***osservatori tipici*** devono essere in quiete rispetto al moto di allontanamento delle galassie e al CMB
- condividono un moto generale di espansione, analogo al moto di un fluido, che si indica con la parola ***substrato***.
- il sistema di riferimento degli osservatori tipici, e’ proprio il sistema assoluto (localmente inerziale) indicato dalla rotazione del piano del pendolo di Foucault
- ed e’ determinato dal moto delle galassie lontane,
- proprio come voleva Mach !

- su questo sfondo, le galassie si muovono con ***velocita’ peculiari*** determinate dall’ attrazione gravitazionale degli ammassi vicini, es. il moto della Via Lattea verso il Virgo cluster

3. Il tempo cosmico

- Ogni osservatore tipico ha il suo orologio,
- ma ce n'e' uno che batte un ***tempo universale***, ed e' la temperatura del CMB. Gli osservatori che vedono la stessa temperatura formano una varieta' 3 dimensionale nello spazio tempo;
- in altre parole, lo spazio tempo 4 dimensionale si puo' dividere in "fogli 3 dimensionali" e un asse delle temperature del CMB. I fogli 3dimensonali sono tutti simili tra loro, in quanto si passa dall'uno all'altro con un'espansione di Hubble, una semplice dilatazione di tutte le lunghezze.
- A sua volta, l'asse del tempo puo' essere segnato da un altro orologio universale, che e' l'espansione dell'Universo...
- ... determinata da una funzione a(t) che misura l'espansione delle distanze dovuta alla legge di Hubble, normalizzata ad un tempo t_0, che potrebbe essere il tempo di oggi.
- La distanza tra due galassie, al tempo (cosmico) t, e' $R(t)=R_0\, a(t)$ e la velocita' di allontanamento: $v(t)= R_0\, da(t)/dt=$ (legge di Hubble)$=H\, R(t)$, quindi:

$$H(t) = \frac{v(t)}{R(t)} = \frac{R_0 \dot{a}}{R_0 a} = \frac{\dot{a}(t)}{a(t)};$$

$$H(\text{oggi}) = H(t_0) = H \approx 70\ \frac{\text{km/sec}}{\text{Mpc}} \approx \frac{1}{14 \cdot 10^9\ \text{years}}$$

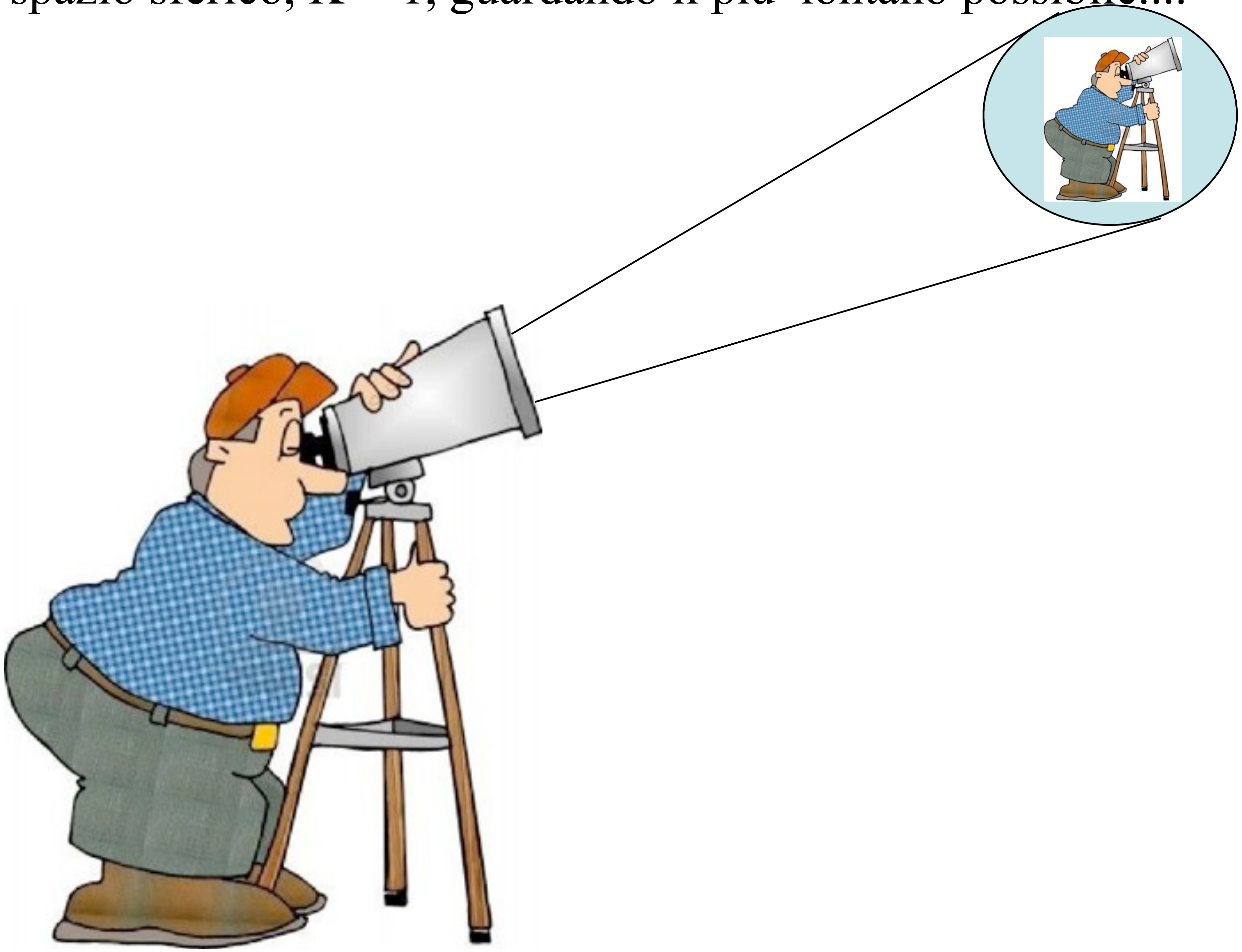
La metrica di Robertson e Walker

$$ds^2 = dt^2 + [a(t)]^2 \left[dr^2 + \frac{r^2(d\theta^2 + \sin\theta^2 d\phi^2)}{1 - Kr^2} \right]$$

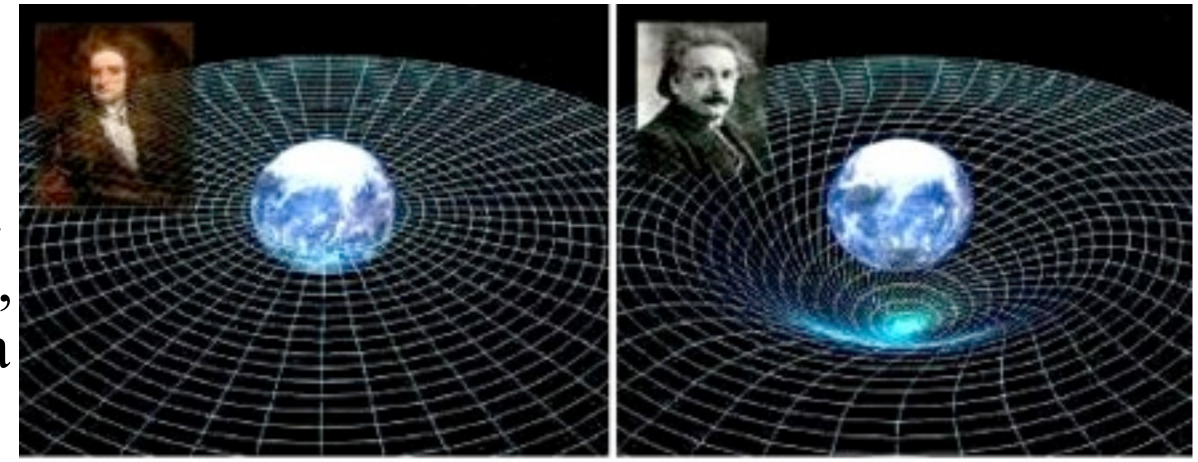
$$K = \text{curvatura} = -1, 0, +1$$

- Intervallo tra due eventi molto vicini
- le coordinate (r, θ,φ) sono coordinate polari fisse per un dato osservatore tipico (coordinate comoventi), mentre nel tempo le distanze si estendono secondo il fattore a(t)
- tra parentesi [] la metrica del foglio 3 dimensionale che, per l'omogeneita' implicata dal P. Cosmologico, puo' solo essere di tre tipi: euclideo (K=0), sferico (K=+1), iperbolico (K=-1). Il primo e il terzo sono di dimensione infinita, il secondo e' di volume finito ma illimitato (dopo un giro si torna al punto di partenza e si inizia un nuovo giro)
- L'espansione e' dovuta all'azione della gravita' e quindi a(t) e K devono essere determinati dalle equazioni della Relativita' Generale

- Nello spazio sferico, K=+1, guardando il piu' lontano possibile....



5. Le equazioni di Einstein



- Newton attibuiva la azioni gravitazionali ad una Forza tra corpi presente in uno spazio di geometria fissata
- Le equazioni di Einstein, invece, collegano la geometria dello spazio tempo (il tensore di Riemann e la curvatura, il primo membro dell'equazione) al contenuto di energia e momento dello spazio stesso (il tensore energia-impulso a secondo membro, G e' la costante di Newton).
- Le modifiche dello spazio tempo incurvano le traiettorie di pianeti ed i raggi di luce, nei dintorni del Sole.

A. D. 1915: $$R_{\mu\nu} - g_{\mu\nu}R = \frac{8\pi G}{c^2}\Theta_{\mu\nu}$$

- Lo stesso Einstein, negli anni successivi, applico' le sue equazioni all'Universo in grande
- Tuttavia, Einstein pensava ad un Universo statico e si accorse che le sue equazioni non ammettevano una tale soluzione
- l'evoluzione dell'Universo, supponendo che, ad un dato momento, esso sia in uno stato di espansione, e' come il moto di un sasso lanciato in verticale. L'attrazione gravitazionale rallenta la salita e puo' portare a tre casi:
  - velocita' inferiore alla velocita' di fuga, il sasso dopo un certo tempo ricade
  - velocita' pari alla velocita' di fuga: il sasso continua a salire e arriva all'infinito con velocita' zero
  - velocita' superiore alla velocita' di fuga: il sasso esce per sempre dall'attrazione della terra
- in ogni caso, non ***c'e' una soluzione in cui il sasso si ferma*** in uno stato di equilibrio!!!
- Einstein si accorse che si poteva estendere la sua equazione (in un solo modo!), aggiungendo un termine di "repulsione cosmica" che avrebbe bilanciato l'attrazione gravitazionale:

A. D. 1917: $$R_{\mu\nu} - g_{\mu\nu}R = \frac{8\pi G}{c^2}\Theta_{\mu\nu} - \Lambda g_{\mu\nu}$$

La natura fisica del substrato

- Dopo aver mediato sulle irregolarita' dovute alle galassie, possiamo descrivere lo stato fisico dell'Universo con alcune funzioni che ne specificano la composizione.
- Sulla base del P. Cosmologico, queste funzioni dipendono dal tempo cosmico, come a(t), ma sono costanti nel foglio 3D dei punti ad un dato tempo
- Per un fluido relativistico, in ogni punto abbiamo:
  - densita' di energia, ρ(t), e pressione, p(t)
  - queste grandezze appaiono nel Tensore Energia-Impulso della materia e della radiazione, che e' una 4-matrice

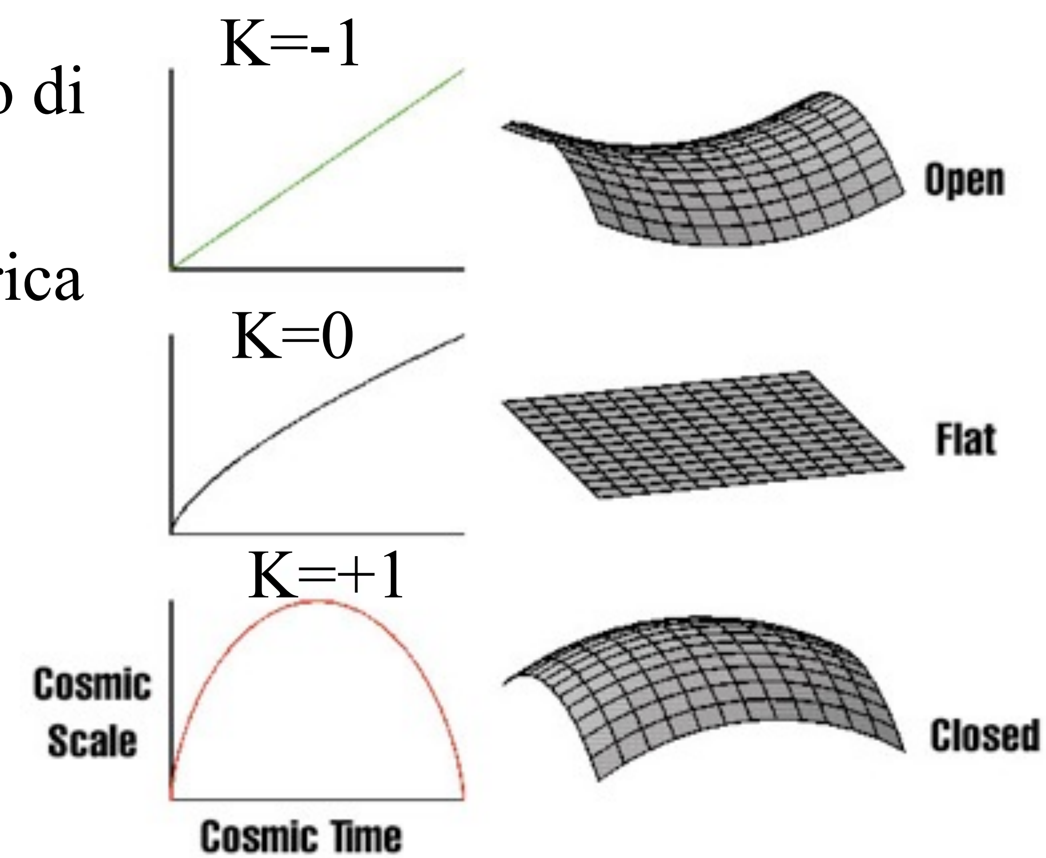
$$\Theta^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p \end{pmatrix}, \quad \mu, \nu = 0, 1, 2, 3$$

- dobbiamo distinguere tra particelle con massa zero, i fotoni, o comunque massa piccola rispetto alle temperature in gioco, e particelle materiali non relativistiche, es i nuclei alle temperature presenti
- le relazioni tra densita' e pressione, per queste due popolazioni sono
  - p= ρ/3, radiazione
  - p=0, materia non relativistica
  - termine cosmologico: p=-ρ=Λ

$$\text{in ogni caso}: \; p = w\rho,$$
$$w = 1/3(\text{radiazione}), = 0(\text{materia}), = -1(\text{cost. cosm.})$$

6. Gli universi di Friedman e Lemaitre

- negli anni ’20 e ’30, Alexander Friedmann, Georges Lemaître, Howard P. Robertson and Arthur Geoffrey Walker risolvono le equazioni di Einstein con e senza costante cosmologica e le applicano all’Universo in espansione che si stava scoprendo con le osservazioni di Hubble e altri
- le soluzioni davano la funzione di scala, a(t), per fissati valori della composizione dell’Universo, in termini di ρ, p e Λ
- come per il sasso lanciato in verticale, le soluzioni sono di tre tipi, U. aperto, limite e chiuso
- corrispondono ai tre valori della curvatura K nella metrica di R&W
- il valore di K e’ determinato dal contenuto di massa-energia nell’Universo, a sua volta individuato da un parametro cosmologico indicato con Ω
- definiamo:



$$\Omega_i = \frac{8\pi G}{3H_0^2}\rho_i, \ (\mathrm{i = mat., \ rad.}), \ \Omega_\Lambda = \frac{\Lambda}{3H_0^2}$$

$$\Omega_{tot} = \sum_i \Omega_i + \Omega_\Lambda = 1 + \frac{K}{R_0 H_0^2}$$

$$\mathrm{Universo\ chiuso/piatto/aperto} : \Omega_{tot} = (>1, \ 1, \ <1)$$

densita’ critica:

$$\rho_c = \frac{3H_0^2}{8\pi G} = 0.915 \cdot 10^{-29}\ \mathrm{gr/cm}^3 \left(\frac{H_0}{70\ \mathrm{km/s/Mpc}}\right)^2$$

$$\approx 5\ \mathrm{protoni/m}^3$$

Strategia per la ricerca delle soluzioni

$$R_{\mu\nu} - g_{\mu\nu}R = \frac{8\pi G}{c^2}\Theta_{\mu\nu} - \Lambda g_{\mu\nu}$$

- Il primo membro dell'equazione di Einstein contiene la geometria, in pratica produce combinazioni di a(t), le sue derivate prime e seconde, r e K
- il secondo membro contiene ρ(t), p(t) e Λ, che in genere si assume non dipenda da t
- si trovano due equazioni (dette di Friedman)
- p(t) si elimina in favore di ρ(t), introducendo la costante w, cosi' abbiamo due equazioni nelle due incognite ρ(t) e a(t)
- ρ(t) si puo' ridurre ad a(t) dalla conservazione dell'energia, che da' una dipendenza tipica per la radiazione e una (diversa) per la materia
  - radiazione, o materia ultra-relativistica: il numero di particelle e' proporzionale ad $a(t)^{-3}$ e l'energia dei fotoni scala come $a(t)^{-1}$ (e' il red-shift) quindi $\rho_{rad}(t)$ scala come $a(t)^{-4}$,
  - materia non-relativistica: il numero di particelle scala come $a(t)^{-3}$ mentre l'energia e' l'energia di riposo, mc^2, che non dipende da a(t), quindi $\rho_{mat}(t)$ scala come $a(t)^{-3}$
- Otteniamo quindi una sola equazione per a(t), che si puo' risolvere per tempi piccoli (Universo iniziale) in modo indipendente da K e da Λ, ottenendo
  - radiazione dominante: $a(t)= (t/t_0)^{1/2}$, materia dominante, $a(t)= (t/t_0)^{2/3}$