ESERCIZI SULLE SERIE DI FOURIER

Graziano Crasta, 8 maggio 2014

Data $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ periodica di periodo 2π e localmente integrabile, la serie di Fourier associata a f è

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)]$$

dove i coefficienti di Fourier a_k e b_k sono dati da

$$\begin{aligned} a_k &:= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, \cos(kx)\, dx, \qquad k = 0, 1, \dots, \\ b_k &:= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, \sin(kx)\, dx, \qquad k = 1, 2, \dots. \end{aligned}$$

Ricordiamo che vale l'uguaglianza di Parseval

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)^2\, dx = \pi \left[\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2) \right].$$

Esercizio 1. Sia $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione periodica di periodo $T > 0$, localmente integrabile. Dimostrare che

$$\int_{x}^{T+x} f(t)\, dt = \int_0^T f(t)\, dt \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Soluzione. Osserviamo che, facendo il cambiamento di variabile $s = t - T$ e sfruttando la periodicità di f, si ha che

$$\int_T^{T+x} f(t)\, dt = \int_0^x f(s+T)\, ds = \int_0^x f(s)\, ds\,.$$

Da qui si ottiene subito

$$\int_x^{T+x} f(t)\, dt = \int_0^T f(t)\, dt + \int_T^{T+x} f(t)\, dt - \int_0^x f(t)\, dt = \int_0^T f(t)\, dt\,. \qquad \square$$

Esercizio 2. Sia $D_n\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ il *nucleo di Dirichlet*, definito da

$$D_n(x) := \begin{cases} n + 1/2, & \text{se } x = 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}, \\ \dfrac{\sin((n+1/2)x)}{2\sin(x/2)}, & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Dimostrare che

$$\int_{-\pi}^{\pi} D_n(x)\, dx = \pi, \quad \forall n \in \mathbb{N}^+, \qquad \lim_{n\to+\infty} \int_{-\pi}^{\pi} |D_n(x)|\, dx = +\infty.$$

Soluzione. La prima uguaglianza discende dall'identità

$$D_n(x) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos(kx)\,.$$

Per quanto riguarda la seconda, poiché $|2\sin(x/2)| \leq |x|$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ abbiamo che

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} |D_n(x)|\, dx &\geq 2\int_0^{\pi} \frac{1}{x}\, |\sin((n+1/2)x)|\, dx = 2\int_0^{(n+1/2)\pi} \frac{|\sin t|}{t}\, dt \\ &> 2\sum_{k=1}^{n} \int_{(k-1)\pi}^{k\pi} \frac{|\sin t|}{t}\, dt \geq 2\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k\pi} \int_{(k-1)\pi}^{k\pi} |\sin t|\, dt = \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\end{aligned}$$

e l'ultima sommatoria diverge a $+\infty$ per $n \to +\infty$ dal momento che è la somma parziale n-esima della serie armonica. □

Esercizio 3. Si consideri la funzione $f(x) = |x|$, $x \in [-\pi, \pi]$, estesa con periodicità a tutto $\mathbb{R}$ (*onda triangolare*).

(a) Calcolare i coefficienti di Fourier di f.
(b) Discutere la convergenza puntuale e uniforme della serie di Fourier associata ad f.
(c) Dimostrare che

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}\,, \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^4} = \frac{\pi^4}{96}\,.$$

Soluzione. (a) La funzione f è pari, dunque i coefficienti b_k, $k \in \mathbb{N}^+$, sono tutti nulli. Calcoliamo i coefficienti a_k: per $k = 0$ si ha

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\, dx = \pi,$$

mentre per $k \in \mathbb{N}^+$, integrando per parti si ottiene

$$\begin{aligned}a_k &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\, \cos(kx)\, dx = \frac{2}{\pi}\left[\frac{x\, \sin(kx)}{k}\right]_0^{\pi} - \frac{2}{k\pi}\int_0^{\pi} \sin(kx)\, dx \\ &= 2\,\frac{\cos(k\pi) - 1}{k^2\pi} = \begin{cases} 0, & \text{se } k \text{ è pari,} \\ -\frac{4}{k^2\pi}, & \text{se } k \text{ è dispari.}\end{cases}\end{aligned}$$

(b) Poiché f è continua e di classe C^1 a tratti, la sua serie di Fourier converge uniformemente a f su tutto $\mathbb{R}$; in particolare

$$f(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(2k-1)x}{(2k-1)^2} \qquad \forall x \in \mathbb{R}\,.$$

(c) Per calcolare la somma della prima serie è sufficiente usare l'identità

$$0 = f(0) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2}\,.$$

La somma della seconda serie discende invece dall'uguaglianza di Parseval. □

Esercizio 4. Sia $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione 2π–periodica definita in $(-\pi, \pi]$ da $f(x) = -1$, se $x \in (-\pi, 0]$, $f(x) = 1$, se $x \in (0, \pi]$ (*onda quadra*).

(a) Calcolare i coefficienti di Fourier di f.
(b) Discutere la convergenza puntuale e uniforme della serie di Fourier associata ad f.
(c) Dimostrare che

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} = \frac{\pi}{4}\,, \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}\,.$$

(d) [*Fenomeno di Gibbs*] Detta s_n la somma parziale n-esima della serie di Fourier, dimostrare che

$$s_n'(x) = \begin{cases} 4n/\pi, & \text{se } x = k\pi,\ k \in \mathbb{Z}, \\ \dfrac{2}{\pi} \cdot \dfrac{\sin(2nx)}{\sin x}, & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Dedurre che s_n ha un punto di massimo relativo (risp. minimo relativo) in $\delta_n := \pi/(2n)$ (risp. $-\delta_n$). Posto $\Delta_n := s_n(\delta_n) - s_n(-\delta_n)$, valutare $\lim_n \Delta_n$ in termini della *costante di Wilbraham–Gibbs* G definita da

$$G := \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin x}{x}\, dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{\sin x}{x}\, dx \simeq 1.178980...$$

Soluzione. (a) La funzione, nell'intervallo $[-\pi, \pi]$, differisce in tre punti da una funzione dispari; di conseguenza, i coefficienti a_k sono tutti nulli. Calcoliamo i coefficienti b_k, $k \in \mathbb{N}^+$:

$$b_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x) \sin(kx)\, dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \sin(kx)\, dx = \begin{cases} 0, & \text{se } k \text{ è pari}, \\ \frac{4}{k\pi}, & \text{se } k \text{ è dispari}. \end{cases}$$

(b) La funzione f è di classe C^1 a tratti; la sua serie di Fourier converge quindi puntualmente a

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x = k\pi,\, k \in \mathbb{Z}, \\ f(x), & \text{altrimenti}, \end{cases}$$

dal momento che nei punti di discontinuità $x = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, si ha

$$\tilde{f}(k\pi) := \frac{f(k\pi^+) + f(k\pi^-)}{2} = 0\,.$$

Si ha dunque che

$$\tilde{f}(x) = \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(2k-1)x}{2k-1}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

La convergenza non è uniforme (dal momento che $\tilde{f}$ non è continua).

(c) La prima serie può essere ricavata valutando la serie di Fourier in $x = \pi/2$, mentre la seconda discende dall'uguaglianza di Parseval.

(d) Abbiamo che

$$s_n(x) = \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{n} \frac{\sin(2k-1)x}{2k-1}, \qquad s_n'(x) = \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{n} \cos(2k-1)x\,.$$

Poiché $\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$, sommando per $k = 1, \ldots, n$ le identità

$$\sin 2kx - \sin(2k-2)x = 2\sin x\, \cos(2k-1)x$$

si ottiene la forma voluta di s_n', e da questa si deduce subito la presenza di un massimo e un minimo relativo rispettivamente in δ_n e $-\delta_n$. Poiché s_n è dispari abbiamo che

$$\Delta_n = 2\, s_n(\delta_n) = 2\int_0^{\delta_n} s_n'(t)\, dt = \frac{4}{\pi}\int_0^{\pi/(2n)} \frac{\sin 2nt}{\sin t}\, dt = \frac{4}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{\sin s}{s} \cdot \frac{(s/2n)}{\sin(s/2n)}\, ds\,.$$

Osserviamo che le funzioni

$$f_n(s) := \begin{cases} 1, & \text{se } s = 0, \\ \frac{\sin s}{s} \cdot \frac{(s/2n)}{\sin(s/2n)}, & \text{altrimenti}, \end{cases}$$

sono continue su $[0,\pi]$ e convergono puntualmente alla funzione continua

$$f(s) := \begin{cases} 1, & \text{se } s = 0, \\ \frac{\sin s}{s} & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Poiché la funzione $t/\sin t$ è positiva e monotona crescente in $(0,\pi)$, si verifica facilmente che $f_n(s) \geq f_{n+1}(s)$ per ogni $s \in [0,\pi]$; di conseguenza, per il piccolo teorema del Dini la successione (f_n) converge uniformemente a f in $[0,2\pi]$. Possiamo dunque passare al limite sotto al segno di integrale ottenendo

$$\lim_{n\to+\infty} \Delta_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{4}{\pi} \int_0^\pi f_n(s)\,ds = \frac{4}{\pi} \int_0^\pi f(s)\,ds = 2G.$$

Vediamo dunque come il salto della funzione f nell'origine, di ampiezza 2, venga amplificato del fattore G nell'andamento delle somme parziali della serie di Fourier in un intorno dell'origine. □

Esercizio 5. Date le funzioni 2π-periodiche definite in $(-\pi,\pi]$ come segue, determinarne lo sviluppo in serie di Fourier e discuterne la convergenza puntuale e uniforme:

$$(a) \quad f(x) = x^2, \qquad (b) \quad f(x) = x.$$

Dimostrare inoltre che

$$\sum_{k=1}^\infty \frac{(-1)^{k+1}}{k^2} = \frac{\pi^2}{12}\,, \qquad \sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}\,, \qquad \sum_{k=0}^\infty \frac{(-1)^k}{2k+1} = \frac{\pi}{4}\,.$$

Soluzione. (a) La funzione è continua e regolare a tratti in $\mathbb{R}$, quindi la sua serie di Fourier converge uniformemente ad f su tutto $\mathbb{R}$. La serie di Fourier è data da

$$\frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{k=1}^\infty \frac{(-1)^k}{k^2}\,\cos(kx)\,.$$

(b) La funzione è regolare a tratti ma è discontinua nei punti $x = (2k+1)\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. La serie di Fourier converge quindi puntualmente, ma non uniformemente, alla funzione

$$\widetilde{f}(x) := \begin{cases} 0, & \text{se } x = (2k+1)\pi,\ k \in \mathbb{Z}, \\ f(x), & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Somma delle serie numeriche. La somma delle prime due serie numeriche si ottiene valutando la serie di Fourier (a) rispettivamente in $x = 0$ e $x = \pi$, mentre la terza si ottiene valutando la serie di Fourier (b) in $x = \pi/2$. □