Dim. della convergenza puntuale della serie di Fourier, nell'ipotesi semplificata che $f(x)$ sia regolare a tratti e continua.

---

Voglio provare che

$$\lim_{n\to+\infty}\left(s_n(x)-f(x)\right)=0 \quad \forall x\in\mathbb{R}.$$

Cominciamo a scrivere $s_n(x)$ in modo esplicito:

$$s_n(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}\left[a_k\cos(kx)+b_k\sin(kx)\right]=$$

[ricordando la definizione dei coefficienti di Fourier]

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(y)\,dy+\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(y)\cos ky\,dy\right)\cos kx\,+$$

$$+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{\pi}f(y)\,\mathrm{sen}\,ky\,dy\right)\sin kx=$$

[scrivo come un unico integrale]

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(y)\left[\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\underbrace{\left(\cos ky\cos kx+\sin ky\sin kx\right)}_{\cos(ky-kx)}\right]dy$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y) \left[ \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos(k(y-x)) \right] dy =$$

[cambio di variabile $\quad y - x = t \Rightarrow dy = dt$]

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi-x}^{\pi-x} f(x+t) \left[ \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos kt \right] dt =$$

[l'integrando è periodico $\Rightarrow$ posso traslare l'intervallo di integrazione].

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) \underbrace{\left[ \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos kt \right]} dt$$

Cerchiamo di riscriverlo in forma più semplice

<u>LEMMA</u>

$$\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos kt = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen}\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right)}{2 \operatorname{sen} \frac{t}{2}} & t \neq 2h\pi \\[2ex] n + \dfrac{1}{2} & t = 2h\pi \end{cases}$$

# Dim Lemma

Formula di Prostaferesi:

$$\sin\left(\left(k+\frac{1}{2}\right)x\right) - \operatorname{sen}\left(\left(k-\frac{1}{2}\right)x\right) = 2 \operatorname{sen}\frac{x}{2}\cos kx$$

Sommiamo per $k = 1 \ldots n$.

$$\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right) - \operatorname{sen}\frac{x}{2} = 2 \operatorname{sen}\frac{x}{2}\sum_{k=1}^{n}\cos kx$$

Da cui la tesi. $\square$

---

Riprendiamo il conto, e otteniamo

$$\boxed{S_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)\,\frac{\operatorname{sen}\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right)}{2\operatorname{sen}\frac{t}{2}}\,dt}$$

Quindi, ponendo

$$F_n(t) = \frac{\operatorname{sen}\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\operatorname{sen}\frac{t}{2}}$$

abbiamo provato che

$$s_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)\,F_n(t)\,dt$$

La funzione $F_n(t)$ si chiama "nucleo di Fejér" (Lipót Fejér, 1880-1959, matematico ungherese).

Osserviamo inoltre che

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F_n(t)\,dt = 1.$$

Infatti

$$\int_{-\pi}^{\pi} F_n(t)\,dt = \int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n}\cos kt\right)dt =$$

tutte queste funzioni hanno integrale nullo

$$= \int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{2}\,dt = \pi.$$

Pertanto

$$S_n(x) - f(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)\,F_n(t)\,dt \;-\; f(x) =$$

moltiplico per

$$1 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F_n(t)\,dt$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)\,F_n(t)\,dt - \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,F_n(t)\,dt =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \big(f(x+t) - f(x)\big)\,F_n(t)\,dt$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\big(f(x+t) - f(x)\big)}{2\,\mathrm{sen}\,\frac{t}{2}}\,\mathrm{sen}\Big(\big(n+\tfrac{1}{2}\big)t\Big)\,dt$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} G(t)\,\mathrm{sen}\Big(\big(n+\tfrac{1}{2}\big)t\Big)\,dt$$

dove abbiamo posto

$$G(t) = \frac{f(x+t) - f(x)}{2\,\mathrm{sen}\,\frac{t}{2}}$$

Notiamo anche che $G(t)$ non è definita in $t=0$, tuttavia è limitata e integrabile, in quanto, se $f$ è derivabile nel punto $x$ si ha $G(t) \longrightarrow f'(x)$ per $t \to 0$

Se invece $x$ è un punto angoloso per $f$, allora comunque esistono finiti i limiti destri e sinistri di $G$, in quanto

$$\lim_{t \to 0^{\pm}} G(t) = f'_{\pm}(x) .$$

Si ha:

$$s_n(x) - f(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} G(t) \operatorname{sen}\left(\left(n + \frac{1}{2}\right) t\right) dt =$$

[per le formule di prostaferesi]

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} G(t) \cos \frac{t}{2} \operatorname{sen} nt \, dt +$$

$$+ \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} G(t) \operatorname{sen} \frac{t}{2} \cos nt \, dt$$

Dobbiamo solo provare che gli ultimi due integrali tendono a zero per $n \to \infty$.

Infatti quelli appena scritti non sono altro che dei coefficienti di Fourier:

infatti $\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} G(t)\cos\frac{t}{2}\,\text{sen}\,nt\,dt$ è

il coefficiente di Fourier $b_n$ della funzione (limitata e integrabile) $G(t)\cos\frac{t}{2}$; analogamente,

$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} G(t)\,\text{sen}\,\frac{t}{2}\cos nt\,dt$ è il coefficiente

di Fourier $a_n$ della funzione $G(t)\,\text{sen}\,\frac{t}{2}$.

Resta solo da osservare che, fissata una funzione limitata e integrabile in $(-\pi,\pi)$, i suoi coefficienti di Fourier $a_n$ e $b_n$ verificano

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} b_n = 0.$$

Questo segue immediatamente dalla disuguaglianza di Bessel, che assicura che la serie

$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)$ converge.