ANALISI VETTORIALE AA 2024/25 (LT 30046) - E MONTEFUSCO - 20250721

Nome: Cognome:

AVVERTENZE: La valutazione degli esercizi aperti dipende dalla solidità dei ragionamenti svolti e dalla chiarezza dell'esposizione, come anche dalla correttezza dei passaggi matematici e del risultato finale.	ex.1	
	ex.2	
	ex.3	
	ex.4	
	tot.	

ESERCIZIO 1 (punti: 2+2+2+2). *Data la funzione* $g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ *definita come segue*

$$g(x_1, x_2) = x_1^2 - x_2^2 + x_1 - x_2$$

i. si spieghi perché tale funzione è differenziabile in tutto il suo dominio,
ii. si scriva l'equazione del piano tangente al grafico della funzione nel punto $(p, g(p))$,
iii. si trovi un vettore normale, nel punto $(p, g(p))$, *al grafico di* g,
iv. si verifichi che la funzione g *è armonica in* A.

ESERCIZIO 2 (punti: 2+3+3). *Data la funzione* $f : K \longrightarrow \mathbb{R}$ *dove*

$$f(x) = 2x_1^2 + x_2^2 \qquad e \qquad K = \left\{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 2x_1 - 2x_3 \le 16\right\} \subseteq \mathbb{R}^3$$

i. si spieghi perché K *è compatto,*
ii. si trovino e si classifichino tutti i punti critici di f *interni a* K,
iii. si trovino massimo e minimo assoluto della funzione.

ESERCIZIO 3 (punti: 3+3+2). *Dato il solido* $E = \left\{0 \le x_3 \le x_1, 1 \le 4\left(x_1^2 + x_2^2 - 2x_1\right) \le 4\right\} \subseteq \mathbb{R}^3$
i. si spieghi perché è limitato e misurabile secondo Lebesgue,
ii. si calcoli il volume di E,
iii. si calcolino le coordinate del baricentro di E.

ESERCIZIO 4 (punti: 3+3+2). *Sia* $S \subseteq \mathbb{R}^3$ *la superficie, immagine della parametrizzazione*

$$x(u) = x(u_1, u_2) = (u_1, u_2, u_1 u_2) \quad con \quad (u_1, u_2) \in D = B(O, \pi) \subseteq \mathbb{R}^2$$

i. si verifichi che S *è una superficie regolare ed orientabile,*
ii. si calcoli il rotore del campo vettoriale $F(x) = \left(-x_2^3, 2x_1^3, x_3^3\right)$,
iii. orientata S *concorde con* e_3, *si calcoli la circuitazione di* F *lungo la curva* ∂S^+.

ESERCIZIO 1 (punti: 2+2+2+2). *Data la funzione* $g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ *definita come segue*

$$g(x_1, x_2) = x_1^2 - x_2^2 + x_1 - x_2$$

i. si spieghi perché tale funzione è differenziabile in tutto il suo dominio,
ii. si scriva l'equazione del piano tangente al grafico della funzione nel punto $(p, g(p))$,
iii. si trovi un vettore normale, nel punto $(p, g(p))$, *al grafico di* g,
iv. si verifichi che la funzione g *è armonica in* A.

SVOLGIMENTO. i. La funzione g è un polinomio, quindi una funzione di classe $C^\infty(\mathbb{R}^2)$, in particolare possiamo osservare che anche le sue derivate parziali sono funzioni infinitamente derivabili e continue, in quanto polinomi

$$\nabla g(x) = (\partial_1 g(x_1, x_2), \partial_2 g(x_1, x_2)) = (2x_1 + 1, -2x_2 - 1)$$

questo fatto, ricordando il teorema del differenziale totale, ci permette di concludere che la funzione è differenziabile in tutto il piano.
ii. Rammentando la teoria studiata a lezione abbiamo che l'equazione del piano tangente al grafico della funzione nel punto $(p, g(p)) \in \mathbb{R}^3$ è la seguente espressione

$$\begin{aligned} x_3 &= g(p) + \nabla g(p) \cdot (x - p) = p_1^2 - p_2^2 + p_1 - p_2 + (2p_1 + 1, -2p_2 - 1) \cdot (x_1 - p_1, x_2 - p_2) \\ &= (2p_1 + 1)x_1 - (2p_2 + 1)x_2 - p_1^2 + p_2^2 = \pi(x_1, x_2) \end{aligned}$$

iii. Ricordiamo che il concetto di vettore normale al grafico di una funzione è legato all'esistenza del piano tangente: infatti un vettore ortogonale al grafico di g è da pensare come ortogonale al piano tangente calcolato poco sopra, per cui abbiamo che

$$n(p) = (-\nabla\pi(p), 1) = (-(2p_1 + 1), (2p_2 + 1), 1)$$

pensando il piano come un superficie di livello di una funzione definita in $\mathbb{R}^3$ e il suo radiente come vettore ortogonale (nel senso prima specificato) a tale insieme.
iv. L'ultima domanda del testo è abbastanza veloce, infatti vale

$$\Delta g(x_1, x_2) = \partial_{11} g(x_1, x_2) + \partial_{22} g(x_1, x_2) = 2 - 2 = 0$$

l'unica difficoltà è ricordare la definizione di operatore di Laplace... □

ESERCIZIO 2 (punti: 2+3+3). *Data la funzione* $f : K \longrightarrow \mathbb{R}$ *dove*

$$f(x) = 2x_1^2 + x_2^2 \qquad e \qquad K = \left\{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 2x_1 - 2x_3 \leq 16\right\} \subseteq \mathbb{R}^3$$

i. si spieghi perché K *è compatto,*
ii. si trovino e si classifichino tutti i punti critici di f *interni a* K,
iii. si trovino massimo e minimo assoluto della funzione.

SVOLGIMENTO. i. Provare che K è compatto è equivalente a mostrare che K è chiuso e limitato. Osserviamo subito che K è chiuso perché controimmagine dell'insieme chiuso $(-\infty, 0] \subseteq (\mathbb{R}, d_2)$ rispetto alla funzione $h(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 2x_1 - 2x_3 - 16$ di classe $C^\infty(\mathbb{R}^3) \subseteq C^0(\mathbb{R}^3)$. Invece la limitatezza dell'insieme segue dal seguente ragionamento: se $x = (x_1, x_2, x_3) \in K$ allora vale

$$x_1^2 - 2x_1 + x_2^2 + x_3^2 - 2x_3 \leq 16 \quad \text{cioè} \quad (x_1 - 1)^2 + x_2^2 + (x_3 - 1)^2 \leq 18 \quad \text{da cui} \quad x \in B\left((1, 0, 1), 3\sqrt{2}\right)$$

ii. La funzione f è un polinomio, quindi i suoi punti critici interni sono individuabili cercando le soluzioni del sistema

$$\nabla f(x) = 0 \quad \text{cioè} \quad \begin{cases} \partial_1 f(x) = 4x_1 = 0 \\ \partial_2 f(x) = 2x_2 = 0 \\ \partial_3 f(x) = 0 = 0 \end{cases} \quad \text{le cui soluzioni sono} \quad P_s = (0, 0, s) \in \text{int}(K)$$

quindi abbiamo un intero segmento di punti critici P_s per $s \in (1-3\sqrt{2}, 1+3\sqrt{2})$. Tali punti critici sono tutti punti di minimo assoluto, visto che $f(P_s) = 0$ e $f(x) \geq 0$ per ogni x, essendo una somma di quadrati.
iii. Per completare la discussione sui punti estremali della funzione possiamo ricorrere al metodo dei moltiplicatori di Lagrange, quindi consideriamo la funzione di Lagrange

$$L(x, c) = f(x) + ch(x) = 2x_1^2 + x_2^2 + c\left(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 2x_1 - 2x_3 - 16\right)$$

e cerchiamo i suoi punti critici liberi, cioè le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} \partial_1 L(x, c) = 2(2+c)x_1 - 2c = 0 \\ \partial_2 L(x, c) = 2(1+c)x_2 = 0 \\ \partial_3 L(x, c) = 2c(x_3 - 1) = 0 \\ \partial_4 L(x, c) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 2x_1 - 2x_3 - 16 = 0 \end{cases}$$

La terza equazione ci permette di iniziare ad analizzare l'insieme delle soluzioni prendendo in esame la seguente alternativa: o $c = 0$ oppure $x_3 = 1$.
Nel primo caso troviamo che la seconda equazione implica $x_2 = 0$, la prima fornisce $x_1 = 0$ e l'equazione del vincolo ci permette di ottenere che $x_3 = 1 \pm \sqrt{17}$.
Nel secondo caso abbiamo $x_3 = 1$ e, dalla seconda equazione, possiamo considerare una nuova alternativa. Se $x_2 = 0$, sostituendo nell'equazione del vincolo, otteniamo $x_1 = 1 \pm 3\sqrt{2}$. Invece se $c = -1$ ricaviamo dalla prima equazione che $x_1 = -1$ e sostituendo nella quarta equazione ricaviamo $x_2^2 = 14$, $x_2 = \pm\sqrt{14}$. Riassumendo abbiamo trovato i seguenti punti critici

$$A, B = (0, 0, 1 \pm \sqrt{17}) \qquad C, D = (1 \pm 3\sqrt{2}, 0, 1) \qquad E, F = (-1, \pm\sqrt{14}, 1)$$

che producono i seguenti output

$$f(A) = f(B) = 0 \qquad f(C) = 2(19 + 6\sqrt{2}) \qquad f(D) = 2(19 - 6\sqrt{2}) \qquad f(E) = f(F) = 16$$

permettendoci di concludere che

$$\max_K(f) = f(C) = 2(19 + 6\sqrt{2}) \qquad \text{e} \qquad \min_K(f) = f(P_s) = 0 \quad \text{per ogni } s \in \left[1 - 3\sqrt{2}, 1 + 3\sqrt{2}\right]$$

□

ESERCIZIO 3 (punti: 3+3+2). *Dato il solido* $E = \left\{0 \leq x_3 \leq x_1, 1 \leq 4\left(x_1^2 + x_2^2 - 2x_1\right) \leq 4\right\} \subseteq \mathbb{R}^3$
i. si spieghi perché è limitato e misurabile secondo Lebesgue,
ii. si calcoli il volume di E,
iii. si calcolino le coordinate del baricentro di E.

SVOLGIMENTO. i. Riscriviamo il dominio E cercando di ottenere una descrizione più utile ai nostri scopi

$$E = \left\{0 \leq x_3 \leq x_1, \frac{1}{4} \leq \left(x_1^2 + x_2^2 - 2x_1\right) \leq 1\right\} = \left\{0 \leq x_3 \leq x_1, \frac{5}{4} \leq (x_1 - 1)^2 + x_2^2 \leq 2\right\}$$

Le ultime relazioni rendono evidente il fatto che le variabili (x_1, x_2) appartengono ad una corona circolare, mentre la variabile x_3 deve essere non negativa e minore di x_1. Dalla precedente osservazione possiamo ricavare che

$$x_2^2 \leq (x_1 - 1)^2 + x_2^2 \leq 2 \qquad \text{da cui} \qquad -\sqrt{2} \leq x_2 \leq \sqrt{2}$$

$$(x_1 - 1)^2 \leq (x_1 - 1)^2 + x_2^2 \leq 2 \qquad \text{da cui} \qquad 1 - \sqrt{2} \leq x_1 \leq 1 + \sqrt{2}$$

$$0 \leq x_3 \leq x_1 \qquad \text{da cui} \qquad 0 \leq x_3 \leq 1 + \sqrt{2}$$

le precedenti disuguaglianze implicano la limitatezza dell'insieme visto che risulta

$$E \subseteq [-\sqrt{2}, \sqrt{2}] \times [1 - \sqrt{2}, 1 + \sqrt{2}] \times [0, 1 + \sqrt{2}]$$

Per concludere la prima parte dell'esercizio osserviamo che

$$E = \{x_3 \geq 0\} \cap \{x_3 - x_1 \leq 0\} \cap \left\{x_1^2 + x_2^2 - 2x_1 \geq \frac{1}{4}\right\} \cap \left\{x_1^2 + x_2^2 - 2x_1 \leq 1\right\}$$

quindi il solido può essere descritto come l'intersezione di quattro insiemi chiusi (infatti ogni singolo insieme è controimmagine di un chiuso, tramite una funzione continua), quindi E è chiuso cioè misurabile secondo Lebesgue.
ii. Nel punto i, tra le altre cose, abbiamo mostrato che il solido E è ottenuto da un cilindro (con asse di simmetria la retta $\{x_1 = 1, x_2 = 0\}$ avente sezione una corona circolare, delimitato dai due iperpiani $\{x_3 = 0\}$ e $\{x_3 = x_1\}$, questa discussione ci suggerisce che il calcolo dell'integrale di volume possa essere più semplice utilizzando delle opportune coordinate cilindriche

$$x_1 = 1 + \rho\cos(\theta) \qquad x_2 = \rho\sin(\theta) \qquad x_3 = t$$

da cui otteniamo

$$\begin{aligned} m_3(E) &= \int_E dx = \int_{E\cap\{x_3=0\}} \left[\int_0^{x_1} dx_3\right] dx_1 dx_2 = \int_{\sqrt{5}/2}^{\sqrt{2}} \left[\int_0^{2\pi} \left[\int_0^{1+\rho\cos(\theta)} \rho dt\right] d\theta\right] d\rho \\ &= \int_{\sqrt{5}/2}^{\sqrt{2}} \rho \left[\int_0^{2\pi} [1+\rho\cos(\theta)]\, d\theta\right] d\rho = 2\pi \int_{\sqrt{5}/2}^{\sqrt{2}} \rho d\rho = \pi\left[\rho^2\right]_{\sqrt{5}/2}^{\sqrt{2}} = \frac{3}{4}\pi \end{aligned}$$

iii. Per definizione il baricentro di $E \subseteq \mathbb{R}^3$, assumendo densità di massa costante pari ad 1, in modo che massa e volume coincidano come valori (ovviamente non come unità di misura), è

$$x_{E,j} = \frac{1}{m_3(E)} \int_E x_j dx \qquad \text{per } j = 1, 2, 3$$

quindi procediamo utilizzando le coordinate cilindriche introdotte prima

$$\begin{aligned} x_{E,1} &= \int_E x_1 dx = \int_{\sqrt{5}/2}^{\sqrt{2}} \rho \left[\int_0^{2\pi} (1+\rho\cos(\theta))^2 d\theta\right] d\rho = \int_{\sqrt{5}/2}^{\sqrt{2}} \left[2\pi\rho + \pi\rho^3\right] d\rho = \frac{87}{64}\pi \\ x_{E,2} &= \int_E x_2 dx = \int_{\sqrt{5}/2}^{\sqrt{2}} \rho \left[\int_0^{2\pi} (1+\rho\cos(\theta))(1+\rho\sin(\theta)) d\theta\right] d\rho = 2\pi \int_{\sqrt{5}/2}^{\sqrt{2}} \rho d\rho = \frac{3}{4}\pi \\ x_{E,3} &= \int_E x_3 dx = \int_{\sqrt{5}/2}^{\sqrt{2}} \rho \left[\int_0^{2\pi} \frac{1}{2}(1+\rho\cos(\theta))^2 d\theta\right] d\rho = \int_{\sqrt{5}/2}^{\sqrt{2}} \left[\pi\rho + \frac{1}{2}\pi\rho^3\right] d\rho = \frac{87}{128}\pi \end{aligned}$$

e abbiamo le coordinate del baricentro di E

$$x_E = \left(\frac{87}{48}, 1, \frac{87}{96}\right)$$

□

ESERCIZIO 4 (punti: 3+3+2). *Sia* $S \subseteq \mathbb{R}^3$ *la superficie, immagine della parametrizzazione*

$$x(u) = x(u_1, u_2) = (u_1, u_2, u_1 u_2) \quad \textit{con} \quad (u_1, u_2) \in D = \overline{B(0, \pi)} \subseteq \mathbb{R}^2$$

i. si verifichi che S *è una superficie regolare ed orientabile,*
ii. si calcoli il rotore del campo vettoriale $F(x) = \left(-x_2^3, 2x_1^3, x_3^3\right)$,
iii. orientata S *concorde con* e_3, *si calcoli la circuitazione di* F *lungo la curva* ∂S^+.

SVOLGIMENTO. i.Per definizione S è una parte del grafico della funzione differenziabile $f(x_1, x_2) = x_1 x_2$, questa osservazione, alla luce di quanto studiato a lezione, è sufficiente a provare che S è una superficie regolare ed orientabile, in ogni caso procediamo ad una verifica più meticolosa.

Osserviamo subito che $D = \overline{B(0,\pi)} = \{u_1^2 + u_2^2 \leq \pi^2\}$ è chiusura di un aperto limitato e connesso con frontiera regolare, le componenti della mappa x sono polinomiali, quindi analitiche, e le prime due componenti sono l'identità (quindi x è un'applicazione iniettiva). Infine possiamo scrivere che

$$\partial_1 x(u) = (1, 0, u_2) \qquad \partial_2 x(u) = (0, 1, u_1) \qquad (\partial_1 x \wedge \partial_2 x)(u) = (-u_2, -u_1, 1) \neq 0$$

ottenendo che S è una superficie regolare. L'orientabilità segue dal fatto che si tratta di una porzione del grafico di una funzione.
ii. Il rotore del campo vettoriale è un calcolo, tutto sommato, relativamente semplice a patto di ricordare la defінzione

$$\mathrm{rot}(F)(x) = \nabla \wedge F(x) = \nabla \wedge \left(-x_2^3, 2x_1^3, x_3^3\right) = \left(0, 0, 6x_1^2 + 3x_2^2\right)$$

iii. Poiché $(\partial_1 x \wedge \partial_2 x)(u) \cdot e_3 = 1 > 0$ per ogni $u \in D$, possiamo dire che la superficie è orientata come richiesto dal testo, quindi dobbiamo calcolare la circuitazione del campo lungo la curva che descrive il bordo della superficie S, cioè

$$\begin{aligned}
\Gamma_{\partial S^+}(F) &= \int_{\partial S^+} [F(x) \cdot T]\, ds = \int_0^{2\pi} \Big[F(x(u(t)) \cdot u'(t)\Big]\, dt \\
&= \int_0^{2\pi} \left(-\pi^3 \sin^3(t), 2\pi^3 \cos^3(t), \pi^6 \sin^3(t)\cos^3(t)\right) \cdot \left(-\pi \sin(t), \pi \cos(t), \pi^2 \cos(2t)\right) dt \\
&= \int_0^{2\pi} \left[\pi^4 \sin^2(t) + 2\pi^4 \cos^2(t) - \frac{3}{4}\pi^4 \sin^2(2t) + \frac{1}{8}\pi^8 \sin^3(2t)\cos(2t)\right] dt = \frac{9}{4}\pi^5
\end{aligned}$$

dove abbiamo parametrizzato il bordo di D nel seguente modo: $u(t) = \pi(\cos(t), \sin(t)$ per $t \in [0, 2\pi]$.
Ricordando il teorema del rotore di Stokes è possibile anche procedere nel seguente modo

$$\begin{aligned}
\Gamma_{\partial S^+}(F) &= \int_{\partial S^+} [F(x) \cdot T]\, ds = \int_S [\mathrm{rot}(F)(x) \cdot n]\, d\sigma \\
&= \int_D [\mathrm{rot}(F)(x(u)) \cdot (\partial_1 x \wedge \partial_2 x)(u)]\, du = \int_D \Big[\left(0, 0, 6u_1^2 + 3u_2^2\right) \cdot (-u_2, -u_1, 1)\Big]\, du \\
&= \int_D (6u_1^2 + 3u_2^2)\, du_1 du_2 = \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} (6r^2 \cos^2(\theta) + 3r^2 \sin^2(\theta)) r\, dr d\theta \\
&= 9\pi \int_0^{\pi} r^3 dr = \frac{9}{4}\pi^5
\end{aligned}$$

naturalmente abbiamo ottenuto lo stesso risultato con entrambi i procedimenti, come è giusto... □