ANALISI VETTORIALE AA 2024/25 (LT 30046) - E MONTEFUSCO - 20250627

Nome: Cognome:

AVVERTENZE: La valutazione degli esercizi aperti dipende dalla solidità dei ragionamenti svolti e dalla chiarezza dell'esposizione, come anche dalla correttezza dei passaggi matematici e del risultato finale.		
	ex.1	
	ex.2	
	ex.3	
	ex.4	
	tot.	

ESERCIZIO 1 (punti: 2+3+3). *Data la funzione* $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ *definita come segue*

$$f(x_1, x_2) = \frac{1}{2}\ln\left(x_1^2 + x_2^2\right) \qquad A = \left\{x \in \mathbb{R}^2 : x \neq O\right\}$$

i. si spieghi perché tale funzione è differenziabile in tutto il suo dominio,
ii. si scriva l'equazione del piano tangente al grafico della funzione in $(p, f(p)) \in A \times \mathbb{R}$,
iii. si verifichi che la funzione f *è armonica in* A.

ESERCIZIO 2 (punti: 3+4). *Si consideri la funzione* $f : C \longrightarrow \mathbb{R}$ *dove*

$$f(x) = 2x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 \qquad e \qquad C = \left\{4x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \leq 16\right\} \subseteq \mathbb{R}^3$$

i. si spieghi perché C *è compatto,*
ii. si trovino e si classifichino tutti i punti critici della funzione.

ESERCIZIO 3 (punti: 1+2+2+3). *Dato il solido* $E = \left\{0 \leq x_3 \leq x_1^2 + x_2^2 \leq 1\right\} \subseteq \mathbb{R}^3$
i. si spieghi perché è limitato e misurabile secondo Lebesgue,
ii. si provi a disegnare il solido E,
iii. si calcoli la massa, di densità $d(x) = e^{-cx_3}$ *(con* $c > 0$*), contenuta in* E,
iv. si calcoli l'area della superficie totale ∂E.

ESERCIZIO 4 (punti: 3+3+2). *Sia* γ *la curva di parametrizzazione*

$$x(s) = \left(as + 1, bs, cs^2\right) \qquad con \quad s \in [0,1] \quad a, b, c \geq 0 \quad e \quad (a, b, c) \neq O$$

i. si verifichi che γ *è una curva regolare,*
ii. si calcoli il lavoro compito lungo γ *dalla forma differenziale*

$$\omega = \frac{x_1}{x_1^2 + x_2^2}dx_1 + \frac{x_2}{x_1^2 + x_2^2}dx_2 + x_3 dx_3$$

iii. si dica se ω *è chiusa e/o esatta.*

ESERCIZIO 5 (punti: 2+3+3). *Data la funzione* $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ *definita come segue*

$$f(x_1, x_2) = \frac{1}{2} \ln\left(x_1^2 + x_2^2\right) \qquad A = \left\{x \in \mathbb{R}^2 : x \neq 0\right\}$$

i. si spieghi perché tale funzione è differenziabile in tutto il suo dominio,
ii. si scriva l'equazione del piano tangente al grafico della funzione in $(p, f(p)) \in A \times \mathbb{R}$,
iii. si verifichi che la funzione f *è armonica in* A.

SVOLGIMENTO. i. La funzione f è composizione di un polinomio con una funzione di classe C^∞, quindi (dove esiste) la funzione è continua e derivabile, utilizzando le ben note regole di derivazione abbiamo che

$$\partial_1 f(x_1, x_2) = \frac{x_1}{\left(x_1^2 + x_2^2\right)} = \frac{x_1}{\|x\|_2^2} \quad \text{e} \quad \partial_2 f(x_1, x_2) = \frac{x_2}{\left(x_1^2 + x_2^2\right)} = \frac{x_2}{\|x\|_2^2} \qquad \text{con } (x_1, x_2) \in A$$

Poiché le derivate parziale sono delle funzioni razionali (rapporto di polinomi) ben definite in A, possiamo affermare che si tratta di funzioni continue (in realtà C^∞) in tutto A, dal teorema del differenziale totale segue la differenziabilità di f in tutto A.
ii. La differenziabilità di f è equivalente all'esistenza del piano tangente al grafico della funzione, la sua equazione è legata alla migliore approssimazione affine della funzione, cioè allo sviluppo di Taylor del primo ordine, quindi vale

$$\begin{aligned} x_3 &= f(p) + \nabla f(p) \cdot (x - p) = \frac{1}{2} \ln\left(\|p\|_2^2\right) + \frac{p}{\|p\|_2^2} \cdot (x - p) = \ln\left(\|p\|_2\right) + \frac{p \cdot x}{\|p\|_2^2} - \frac{p \cdot p}{\|p\|_2^2} \\ &= \ln\left(\left[p_1^2 + p_2^2\right]^{1/2}\right) - 1 + \frac{p_1 x_1 + p_2 x_2}{p_1^2 + p_2^2} \end{aligned}$$

iii. Ricordiamo che una funzione si dice armonica se il suo laplaciano è nullo, e infatti vale

$$\Delta f(x) = \partial_{11} f(x) + \partial_{22} f(x) = 0 \qquad \text{per ogni } x \in A$$

visto che

$$\partial_{11} f(x) = \partial_1\left(\frac{x_1}{\|x\|_2^2}\right) = \frac{x_1^2 + x_2^2 - 2x_1^2}{\left(x_1^2 + x_2^2\right)^2} = \frac{x_2^2 - x_1^2}{\|x\|_2^4} \quad \text{e} \quad \partial_{22} f(x) = \frac{x_1^2 - x_2^2}{\|x\|_2^4}$$

ESERCIZIO 6 (punti: 3+4). *Si consideri la funzione* $f : C \longrightarrow \mathbb{R}$ *dove*

$$f(x) = 2x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 \qquad e \qquad C = \left\{4x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \leq 16\right\} \subseteq \mathbb{R}^3$$

i. si spieghi perché C *è compatto,*
ii. si trovino e si classifichino tutti i punti critici della funzione.

SVOLGIMENTO. i. Sappiamo che, in $\mathbb{R}^n$, un insieme è compatto se e solo se è chiuso e limitato. Osserviamo subito che C è limitato, infatti per ogni $x = (x_1, x_2, x_3) \in C$ vale

$$0 \leq 4x_1^2, x_2^2, x_3^2 \leq 4x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \leq 16 \quad \text{da cui} \quad |x_1| \leq 2 \text{ e } |x_2|, |x_3| \leq 4$$

il che implica $C \subseteq [-2, 2] \times [-4, 4] \times [-4, 4] \subseteq B(0, R)$, per ogni $R > 6$. Vale anche

$$C = \left\{4x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 16 \leq 0\right\} = \{H(x) \leq 0\} = H^{-1}((-\infty, 0])$$

siccome $H(x) = 4x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 16$ è una funzione continua (essendo un polinomio), C è controimmagine (attraverso una funzione continua) di un intervallo chiuso, per cui possiamo concludere che C è chiuso, quindi compatto.
ii. I punti critici della funzione possono appartenere all'aperto int(C) o al suo bordo ∂C. nel primo caso, essendo la funzione $f \in C^\infty(C)$, tali punti saranno individuati dal sistema $\nabla f(x) = 0$, cioè

$$(\partial_1 f(x), \partial_2 f(x), \partial_3 f(x)) = (4x_1, 2x_2, -2x_3) = (0, 0, 0) \quad \text{che ha soluzione} \quad x = 0$$

Poiché vale

$$\mathrm{H}f(x_1,x_2,x_3) = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \qquad \text{per ogni } x = (x_1,x_2,x_3) \in \mathrm{int}(C)$$

possiamo dedurre che la matrice hessiana nel punto critico non è definita, per cui il punto O è una sella. Per identificare i punti critici vincolati sul bordo del dominio possiamo ricorrere al metodo dei moltiplicatori di Lagrange, quindi dobbiamo cercare i punti critici non vincolati della funzione

$$L(x,c) = f(x) + cH(x) = 2x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 + c(4x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 16) \qquad (x,c) \in \mathbb{R}^4$$

e per farlo dobbiamo calcolare le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} \partial_1 L(x,c) = 4(1+2c)x_1 = 0 \\ \partial_2 L(x,c) = 2(1+c)x_2 = 0 \\ \partial_1 L(x,c) = 2(c-1)x_3 = 0 \\ \partial_1 L(x,c) = 4x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 16 = 0 \end{cases}$$

Se $c \notin \{-1,-1/2,1\}$, le prime tre equazioni implicano che $x_1 = x_2 = x_3 = 0$, tale punto non soddisfa la quarta relazione, per cui non otteniamo nulla.
Se $c = -1$ il sistema si riduce alle equazioni

$$-4x_1 = -4x_3 = 4x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 16 = 0$$

che ha soluzioni $A_{1,2} = (0,\pm 4,0)$. Ragionando in maniera analoga nei casi $c = -1/2$ e $c = 1$, troviamo (rispettivamente) i punti $B_{1,2} = (\pm 2,0,0)$ e $C_{1,2} = (0,0,\pm 4)$. Poiché vale

$$f(A_{1,2}) = 16 \qquad f(B_{1,2}) = 8 \qquad f(C_{1,2}) = -16 \qquad f(O) = 0$$

possiamo concludere che $A_{1,2}$ sono punti di massimo assoluto, $C_{1,2}$ sono punti di minimo assoluto e $B_{1,2}$ ed O sono punti di sella.

Esercizio 7 (punti: 1+2+2+3). *Dato il solido* $E = \left\{0 \le x_3 \le x_1^2 + x_2^2 \le 1\right\} \subseteq \mathbb{R}^3$
i. si spieghi perché è limitato e misurabile secondo Lebesgue,
ii. si provi a disegnare il solido E,
iii. si calcoli la massa, di densità $d(x) = e^{-cx_3}$ *(con* $c > 0$*), contenuta in* E,
iv. si calcoli l'area della superficie totale ∂E.

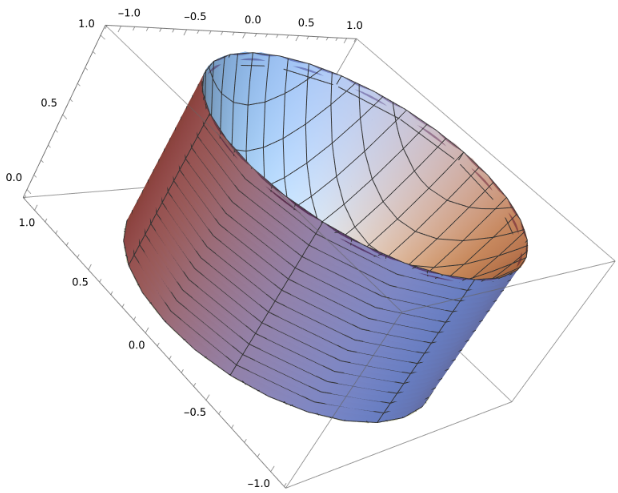
Svolgimento. i. È possibile descrivere il solido E nel seguente modo

$$E = \left\{0 \le x_3 \le x_1^2 + x_2^2 \le 1\right\} = \left\{x_1^2 + x_2^2 \le 1\right\} \cap \left\{x_3 - (x_1^2 + x_2^2) \le 0\right\} \cap \{x_3 \ge 0\}$$

quindi E è chiuso, in quanto intersezione di chiusi, e quindi misurabile secondo Lebesgue. Infine notiamo che dalla precedente descrizione dell'insieme segue anche

$$E \subseteq \overline{B(0,1)} \times [0,1] \subseteq \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^3$$

il che mostra la limitatezza dell'insieme.
ii. Le relazioni che definiscono E ci suggeriscono che la variabile x_3 deve essere nel'intervallo $[0,1]$, mentre (x_1,x_2) devono trovarsi nel cerchio chiuso centrato in $(0,0)$ di raggio 1, quindi il solido è contenuto in un cilindro retto avente raggio di base e altezza pari ad 1 con asse di simmetria l'asse x_3, inoltre i punti di E devono trovarsi sotto il grafico del paraboloide di equazione $\{x_3 = x_1^2 + x_2^2\}$, queste informazioni sono riassunte nell'immagine che segue



iii. Ricordiamo che per ottenere la massa totale dell'oggetto è necessario integrare la funzione densità di massa sul volume, quindi

$$M_E = \iiint_E d(x)dx = \int_{B(O,1)} \left[\int_0^{x_1^2+x_2^2} e^{-cx_3} dx_3 \right] dx_1 dx_2 = -\frac{1}{c} \int_{B(O,1)} \left[e^{-cx_3} \right]_0^{x_1^2+x_2^2} dx_1 dx_2$$
$$= -\frac{1}{c} \int_0^1 \left[\int_0^{2\pi} \left[e^{-cr^2} - 1 \right] d\theta \right] rdr = -\frac{2\pi}{c} \int_0^1 r\left[e^{-cr^2} - 1 \right] dr = \frac{\pi}{c} \left[r^2 + \frac{1}{c} e^{-cr^2} \right]_0^1$$
$$= \frac{\pi}{c^2} \left[c + e^{-c} - 1 \right]$$

Si noti che prima abbiamo usato il teorema di Fubini integrando "per fili" lungo la direzione e_3, poi siamo passati alle coordinate polari nel piano per sfruttare la simmetria del cerchio $B(O,1) \subseteq \mathbb{R}^2$, il che spiega la comparsa del fattore r.

iv. Abbiamo visto precedentemente che il solido è un cilindro "scavato", quindi la sua superficie totale è la somma di tre contributi: l'area del fondo, la superficie laterale e l'area della superficie che sovrasta la struttura. Il fondo di E è il cerchio $\{x_1^2 + x_2^2 \leq 1\} \times x_3 = O$ la cui area è π, mentre la superficie laterale è la supercie laterale di un cilindro avente raggio di base 1 e altezza 1, l'area di questa superficie è 2π. Infine il tetto del solido è la parte del grafico della funzione $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$ contenuta nel cilindro $\{x_1^2 + x_2^2 \leq 1\}$ la cui area si calcola con il seguente integrale

$$A = \int_{B(O,1)} \left[1 + 4u_1^2 + 4u_2^2 \right]^{1/2} du_1 du_2 = 2\pi \int_0^1 \left[1 + 4r^2 \right]^{1/2} rdr = \frac{\pi}{6} \left[(1 + 4r^2)^{3/2} \right]_0^1 = \frac{\pi}{6} \left[5\sqrt{5} - 1 \right]$$

dove abbiamo usato la seguente parametrizzazione regolare

$$x(u) = \left(u_1, u_2, u_1^2 + u_2^2 \right) \qquad u \in \overline{B(O,1)} \subseteq \mathbb{R}^2$$

ESERCIZIO 8 (punti: 3+3+2). *Sia γ la curva di parametrizzazione*

$$x(s) = \left(as + 1, bs, cs^2 \right) \qquad \textit{con} \quad s \in [0,1] \quad a, b, c \geq O \quad \textit{e} \quad (a, b, c) \neq O$$

i. si verifichi che γ è una curva regolare,
ii. si calcoli il lavoro compito lungo γ dalla forma differenziale

$$\omega = \frac{x_1}{x_1^2 + x_2^2} dx_1 + \frac{x_2}{x_1^2 + x_2^2} dx_2 + x_3 dx_3$$

iii. si dica se ω è chiusa e/o esatta.

SVOLGIMENTO. i. x è un'applicazione a valori in $\mathbb{R}^3$ le cui componenti sono dei polinomi, quindi è una funzione che appartiene allo spazio vettoriale $C^\infty\left([0,1],\mathbb{R}^3\right)$, per mostrare la regolarità della curva dobbiamo provare che in ogni punto della curva esiste un vettore tangente, il che è equivalente a verificare che il vettore velocità non è mai nullo per $s \in (0,1)$, infatti vale

$$x'(s) = (a, b, 2cs) \neq 0 \qquad \text{in quanto} \qquad (a, b, c) \neq 0$$

ii. Ricorriamo alla definzione di lavoro di una 1-forma lungo una curva per calcolare la quantità richiesta

$$\begin{aligned}
\int_\gamma \omega &= \int_0^1 \left[\frac{x_1(s)}{x_1^2(s) + x_2^2(s)} x_1'(s) + \frac{x_2(s)}{x_1^2(s) + x_2^2(s)} x_2'(s) + x_3(s)x_3'(s) \right] ds \\
&= \int_0^1 \left[\frac{as+1}{(as+1)^2 + b^2s^2} \cdot a + \frac{bs}{(as+1)^2 + b^2s^2} \cdot b + cs^2 \cdot 2cs \right] ds \\
&= \int_0^1 \left[\frac{1}{2} \frac{2a(as+1) + 2b^2s}{(as+1)^2 + b^2s^2} + 2c^2s^3 \right] ds = \frac{1}{2} \left[\ln\left((as+1)^2 + b^2s^2\right) + c^2s^4 \right]_0^1 \\
&= \frac{1}{2} \left[\ln\left((a+1)^2 + b^2\right) + c^2 \right]
\end{aligned}$$

iii. Verificare che la 1-forma ω è esatta è solo questione di alcuni calcoli, posto $\omega = A(x)dx_1 + B(x)dx_2 + C(x)dx_3$ possiamo scrivere che

$$\partial_2 A(x) = -\frac{2x_1x_2}{(x_1^2 + x_2^2)^2} = \partial_1 B(x) \qquad \partial_3 A(x) = 0 = \partial_1 C(x) \qquad \partial_3 B(x) = 0 = \partial_2 C(x)$$

provando che la forma differenziale è chiusa. Poiché ω non ha dominio esplicitamente dichiarato e il suo dominio massimale è $D = \mathbb{R}^3 \setminus \{x_1^2 + x_2^2 \neq 0\}$ che non è semplicemente connesso, non possiamo ricorrere direttamente a teoremi noti per concludere che la forma è esatta, però è sufficiente produrre una sua primitiva per avere conferma dell'esattezza di ω, ponendo uguale a 0 la costante addivitiiva nulla abbiamo

$$F(x) = \frac{1}{2} \left[\ln\left(x_1^2 + x_2^2\right) + x_3^2 \right]$$

infatti è possibile verificare che $\nabla F(x) = (A(x), B(x), C(x))$. Dalla primitiva F della forma differenziale è possibile ricavare, con meno calcoli, il lavoro richesto al punto ii, infatti vale

$$\int_\gamma \omega = F(x(1)) - F(x(0)) = F(a+1, b, c) - F(1, 0 0) = \frac{1}{2} \left[\ln\left((a+1)^2 + b^2\right) + c^2 \right]$$

senza particolari sorprese...
