Analisi Vettoriale AA 2024/25 (LT 30046) - E Montefusco - 20250214

Nome: Cognome:

ex.1	
ex.2	
ex.3	
ex.4	
tot.	

Avvertenze:
La valutazione degli esercizi aperti dipende dalla solidità dei ragionamenti svolti e dalla chiarezza dell'esposizione, come anche dalla correttezza dei passaggi matematici e del risultato finale.

Esercizio 1 (punti: 2+3+3). *Data la funzione* $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ *di legge* $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 - x_2^2 + \phi(x_3)$, *dove* ϕ *è una funzione di classe* $C^2(\mathbb{R})$*:*
i. si spieghi perché tale funzione è differenziabile in tutto lo spazio,
ii. si dica per quali ϕ *la funzione* f *è armonica in* $\mathbb{R}^3$*,*
iii. tra le precedenti si identifichino le funzioni ϕ *tali che* $f(O) = 0$*.*

Esercizio 2 (punti: 2+2+4). *Assegnati i vincoli di equazione*

$$V = \left\{x_1^2 + \frac{x_2^2}{4} + \frac{x_3^2}{9} = 1\right\}, M = \left\{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\right\} \subseteq \mathbb{R}^3$$

i. si spieghi perché che V *ed* M *sono chiusi e limitati,*
ii. si spieghi perché V *ed* M *sono misurabili secondo Lebesgue e si calcoli* $m_3(M)$*,*
iii. si trovi massimo e minimo della funzione $d(p, q) = \|p - q\|_2$*, al variare di* $p \in V$ *e* $q \in M$*.*

Esercizio 3 (punti: 2+3+3). *Dato* $E = \left\{x_1^2 + x_2^2 \le \cos^2(x_3), |x_3| \le \pi/2\right\} \subseteq \mathbb{R}^3$
i. si spieghi perché E *è limitato e misurabile secondo Lebesgue,*
ii. si calcoli il suo volume $m_3(E)$*,*
iii. si calcoli il flusso, uscente da E*, del campo vettoriale* $F = (x_2, x_1, \sin(x_3))$*.*

Esercizio 4 (punti: 3+3+2). *Data la parametrizzazione*

$$x(u_1, u_2) = \left(u_1^2, u_2^2, u_1^2 - u_2^2\right) \qquad (u_1, u_2) \in D = [0, 1]^2$$

i. si verifichi che la coppia (x, D) *è una superficie regolare orientabile,*
ii. si calcoli l'area della superficie,
iii. si calcoli il flusso del campo $F = (0, 0, x_3)$ *attraverso la superficie, orientata in modo che* $n \cdot e_3 > 0$*.*

ESERCIZIO 1 (punti: 2+3+3). *Data la funzione* $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ *di legge* $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 - x_2^2 + \phi(x_3)$, *dove* ϕ *è una funzione di classe* $C^2(\mathbb{R})$*:*
i. si spieghi perché tale funzione è differenziabile in tutto lo spazio,
ii. si dica per quali ϕ *la funzione* f *è armonica in* $\mathbb{R}^3$*,*
iii. tra le precedenti si identifichino le funzioni ϕ *tali che* $f(O) = 0$*.*

SVOLGIMENTO. i. La funzione f è definita in tutto lo spazio ed è somma del polinomio in due variabili $p(x) = x_1^2 - x_2^2$ e della funzione ϕ che accetta in entrata solo x_3. Essendo ϕ di classe C^2 e p di classe C^∞, possiamo concludere che $f \in C^2(\mathbb{R}^3) \subseteq C^1(\mathbb{R}^3)$, dal teorema del differenziale totale segue la differenziabilità di f in tutto lo spazio.
ii. Ricordiamo che una funzione (di classe C^2 si dice armonica se il suo laplaciano è nullo, nel nostro caso abbiamo che

$$\Delta f(x) = \partial_{11} f(x) + \partial_{22} f(x) + \partial_{33} f(x) = 2 - 2 + \phi''(x_3) = \phi''(x_3)$$

quindi la funzione è armonica se e solo se

$$\phi''(x_3) = 0 \qquad \text{cioè} \qquad \phi(x_3) = mx_3 + q \quad \text{per } m, q \in \mathbb{R}$$

come è noto dalle teoria delle equazioni differenziali lineari omogenee a coefficienti costanti.
iii. concludiamo osservando che

$$f(x) = x_1^2 - x_2^2 + mx_3 + q \qquad f(O) = q = 0$$

da cui possiamo dedurre che le funzioni desiderate sono tutte e sole

$$f(x) = x_1^2 - x_2^2 + mx_3 \qquad m \in \mathbb{R}$$

□

ESERCIZIO 2 (punti: 2+2+4). *Assegnati i vincoli di equazione*

$$V = \left\{ x_1^2 + \frac{x_2^2}{4} + \frac{x_3^2}{9} = 1 \right\}, M = \left\{ x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1 \right\} \subseteq \mathbb{R}^3$$

i. si spieghi perché che V *ed* M *sono chiusi e limitati,*
ii. si spieghi perché V *ed* M *sono misurabili secondo Lebesgue e si calcoli* $m_3(M)$*,*
iii. si trovi massimo e minimo della funzione $d(p, q) = \|p - q\|_2$*, al variare di* $p \in V$ *e* $q \in M$*.*

SVOLGIMENTO. entrambi i vincoli sono insiemi chiusi, in quanto possiamo scrivere che

$$V = \left\{ x_1^2 + \frac{x_2^2}{4} + \frac{x_3^2}{9} - 1 = 0 \right\} = \{g_1(x) = 0\} \qquad M = \left\{ x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 1 = 0 \right\} = \{g_2(x) = 0\}$$

È noto che $\{0\} \subseteq (\mathbb{R}, d_2)$ è un insieme chiuso e poiché $g_1, g_2 \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$ (essendo polinomi) segue che V ed M sono chiusi in $\mathbb{R}^3$, perché controimmagine di un insieme chiuso tramite una funzione continua. Per provare la limitatezza dei due insiemi è sufficiente osservare che

$$M = \left\{ x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1 \right\} \subseteq \left\{ x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 < 4 \right\} = B(O, 2)$$

$$V = \left\{ x_1^2 + \frac{x_2^2}{4} + \frac{x_3^2}{9} = 1 \right\} \subseteq \left\{ \frac{x_3^2}{9} + \frac{x_3^2}{9} + \frac{x_3^2}{9} < 4 \right\} = B(O, 6)$$

ii. V ed M sono misurabili secondo Lebesgue in quanto chiusi, la loro misura m_3 è nulla, perché sono solo la frontiera di oggetti molto regolari (un ellissoide e una palla, rispettivamente), di fatto il testo chiede di calcolare il volume della sfera, cioè del bordo della palla, cioè di un oggetto senza "spessore".

È possibile provare la precedente affermazione nel seguente modo: restringiamo la nostra attenzione a V ed osserviamo che, per ogni $n \in \mathbb{N}$, vale

$$V \subseteq \left\{1 - \frac{1}{2^n} \le x_1^2 + \frac{x_2^2}{4} + \frac{x_3^2}{9} \le 1\right\} = \left\{x_1^2 + \frac{x_2^2}{4} + \frac{x_3^2}{9} \le 1\right\} \setminus \left\{x_1^2 + \frac{x_2^2}{4} + \frac{x_3^2}{9} < 1 - \frac{1}{2^n}\right\} = E_1 \setminus E_n$$

e per la monotonia della misura di Lebesgue possiamo dedurre

$$0 \le m_3(V) \le m_3(E_1) - m_3(E_n) = 6\pi\left[1 - \left(\frac{2^n}{2^n - 1}\right)^{3/2}\right] \longrightarrow 0$$

È possibile mostrare che la misura di M è nulla procedendo nello stesso modo.

iii. Utilizziamo la procedura dei moltiplicatori di Lagrange per trovare i punti critici della funzione d vincolata, però studieremo (per semplificare i calcoli) la funzione $f(p,q) = d^2(p,q) = \|p-q\|_2^2$ che ha gli stessi punti critici (aventi la stessa natura), questo perché le potenze pari sono iniettive e strettamente crescenti sulla semiretta $[0,+\infty)$. Scriviamo la funzione di Lagrange

$$\begin{aligned} L(p,q,c) &= f(p,q) - c_1 g_1(p) - c_2 g_2(q) \\ &= (p_1-q_1)^2 + (p_2-q_2)^2 + (p_3-q_3)^2 - c_1\left(p_1^2 + \frac{p_2^2}{4} + \frac{p_3^2}{9} - 1\right) - c_2\left(q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 - 1\right) \end{aligned}$$

e cerchiamo i suoi punti critici liberi, i punti in cui il gradiente di L è nullo, cioè le soluzioni delle seguenti equazioni

$$\begin{aligned} &\partial_1 L(p,q,c) = 2(p_1-q_1) - 2c_1p_1 = 0 && \partial_2 L(p,q,c) = 2(p_2-q_2) - \frac{1}{2}c_1p_2 = 0 \\ &\partial_3 L(p,q,c) = 2(p_3-q_3) - \frac{2}{9}c_1p_3 = 0 && \partial_4 L(p,q,c) = -2(p_1-q_1) - 2c_2q_1 = 0 \\ &\partial_5 L(p,q,c) = -2(p_2-q_2) - 2c_2q_2 = 0 && \partial_6 L(p,q,c) = -2(p_3-q_3) - 2c_2p_3 = 0 \\ &\partial_7 L(p,q,c) = -\left(p_1^2 + \frac{p_2^2}{4} + \frac{p_3^2}{9} - 1\right) && \partial_8 L(p,q,c) = -\left(q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 - 1\right) \end{aligned}$$

Dalle prime sei equazioni otteniamo che o $p = q$ e $c_1 = c_2 = 0$, e siccome $p \in V$ e $q \in M$ segue che $p_a = q_a = e_1$, oppure valgono le seguenti relazioni

$$q_1 = (1-c_1)p_1 = \frac{1}{1-c_2}p_1 \qquad q_2 = \frac{1}{4}(1-c_1)p_2 = \frac{1}{1-c_2}p_2 \qquad q_3 = \frac{1}{9}(1-c_1)p_3 = \frac{1}{1-c_2}p_3$$

che sono soddisfatte esclusivamente se

$$q_a = p_a = e_1 \quad \text{o} \quad q_b = \frac{1}{2}p_a = e_2 \quad \text{o} \quad q_c = \frac{1}{3}p_c = e_3$$

per opportuni valori dei moltiplicatori $c = (c_1, c_2)$. A questo punto possiamo calcolare i valori che la funzione d assume sui punti critici individuati

$$\begin{aligned} &d(p_a,q_a) = \|p_a - q_a\|_2 = \|e_1 - e_1\|_2 = 0 \\ &d(p_b,q_b) = \|2e_2 - e_2\|_2 = \|e_2\|_2 = 1 \qquad \text{e} \qquad d(p_c,q_c) = \|3e_3 - e_3\|_2 = 2 \end{aligned}$$

quindi possiamo concludere che il punto di massimo assoluto della funzione d vincolata alle due superfici è (p_c,q_c), mentre il minimo assoluto è (p_a,q_a). □

Esercizio 3 (punti: 2+3+3). *Dato* $E = \left\{x_1^2 + x_2^2 \le \cos^2(x_3), |x_3| \le \pi/2\right\} \subseteq \mathbb{R}^3$

i. si spieghi perché E *è limitato e misurabile secondo Lebesgue,*

ii. si calcoli il suo volume $m_3(E)$,

iii. si calcoli il flusso, uscente da E, *del campo vettoriale* $F = (x_2, x_1, \sin(x_3))$.

SVOLGIMENTO. i. Cominciamo osservando che

$$E = \left\{x_1^2 + x_2^2 - \cos^2(x_3) \le 0\right\} \cap \left\{|x_3| \le \frac{\pi}{2}\right\}$$

quindi l'insieme è chiuso in quento intersezione di due insiemi chiusi, questo implica che E è misurabile secondo Lebesgue., inoltre possiamo scrivere che

$$E \subseteq \left\{x_1^2 + x_2^2 \le 1\right\} \cap \left\{|x_3| \le \frac{\pi}{2}\right\} \subseteq [-1,1] \times [-1,1] \times \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

da cui possiamo concludere che E è un insieme limitato nello spazio.
Si noti che il dominio è definito da una limitazione relativa alla variabile x_3 e da una relazione che dice che, per x_3 fissato, le altre due varibili appartengono ad una circonferenza centrata in $(0,0)$ con raggio che dipende (in modo molto regolare, dalla terza variabile. Le precedenti osservazioni mostrano che il dominio è un solido di rotazione, con asse di simmetria la retta di equazioni $\{x_1 = x_2 = 0\}$.
ii. A scopo didattico illustriamo due procedimenti differenti per il calcolo del volume di E.
Sappiamo, dalla teoria della misura che

$$m_3(E) = \iiint_E dx = \int_{\mathbb{R}} m_2(S(t))dt \qquad \text{dove } S(t) = E \cap \{x_3 = t\}$$

$S(t)$ è la sezione E a quota $x_3 = t$. Tale insieme è non vuoto solo per $t \in [-\pi/2, \pi/2]$ e siccome $S(t)$ è un cerchio di raggio $r = |\cos(t)|$, vale che $m_2(S(t)) = \pi \cos^2(t)$, da cui abbiamo che

$$m_3(E) = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \pi \cos^2(t)dt = \frac{\pi}{2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} [1 + \cos(2t)]\, dt = \frac{\pi^2}{2}$$

In alternativa è naturale sfruttare la simmetria assiale di E e utilizzare le coordinate cilindriche per il calcolo dell'integrale di volume nel seguente modo

$$m_3(E) = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left[\int_0^{2\pi} \left[\int_0^{\cos(x_3)} \rho d\rho \right] d\theta \right] dx_3 = \pi \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2(x_3)dx_3$$

il risultato è identico al precedente, perché non deve dipendere dalla strategia seguita per studiare il problema, e perché le due procedure (a guardare bene) si appoggiano sulla stessa idea legata alle proprietà di simmetria del dominio.

□

ESERCIZIO 4 (punti: 3+3+2). *Data la parametrizzazione*

$$x(u_1, u_2) = \left(u_1^2, u_2^2, u_1^2 - u_2^2\right) \qquad (u_1, u_2) \in D = [0,1]^2$$

i. si verifichi che la coppia (x, D) *è una superficie regolare orientabile,*
ii. si calcoli l'area della superficie,
iii. si calcoli il flusso del campo $F = (0, 0, x_3)$ *attraverso la superficie, orientata in modo che* $n \cdot e_3 > 0$.

SVOLGIMENTO. i. Osserviamo subito che D è il quadrato chiuso di $\mathbb{R}^2$ aventi vertici i punti O, e_1 ed e_2 e che le componenti della funzione vettoriale x sono dei polinomi, cioè funzioni analitiche, da cui deduciamo che $x \in C^\infty(D) \subseteq C^1(D)$. Per poter concludere la regolarità della superficie dobbiamo anoca mostrare due proprietà della mappa: l'iniettività dell'applicazione e l'esistenza dei piani tangenti.
L'iniettività di x è equivalente all'implicazione

$$x(u) = \left(u_1^2, u_2^2, u_1^2 - u_2^2\right) = \left(w_1^2, w_2^2, w_1^2 - w_2^2\right) = x(w) \qquad \text{se e solo se} \qquad u = w$$

per $u, w \in D$. Tale affermazione è vera perché le potenze pari (in particolare la potenza 2) sono strettamente crescenti (quindi iniettive) sulla semiretta $[0, +\infty)$ e quindi sull'intervallo $[0,1]$.
Per mostrare che l'immagine di x ha piano tangente per ogni $u \in \mathrm{int}(D)$ è sufficiente mostrare l'esistenza di vettori normali, cioè che

$$\partial_1 x(u) \wedge \partial_2 x(u) \neq O \qquad \text{per ogni } u \in \mathrm{int}(D)$$

Quindi calcoliamo

$$\partial_1 x(u) = (2u_1, 0, 2u_1) \qquad \text{e} \qquad \partial_2 x(u) = (0, 2u_2, -2u_2)$$

$$\partial_1 x(u) \wedge \partial_2 x(u) = 4\,(u_1u_2, u_1u_2, u_1u_2) \neq 0 \qquad \text{per ogni } u \in \mathrm{int}(D)$$

A questo punto possiamo dire che $\Sigma = \mathrm{Im}(x) = x(D)$ è una superficie regolare di parametrizzazione (x, D).
Concludiamo osservando che il versore normale indotto dalla parametrizzazione è un vettore costante, infatti (ricordando che $u_1, u_2 \in [0,1]$) vale

$$n(u) = \frac{\partial_1 x(u) \wedge \partial_2 x(u)}{\|\partial_1 x(u) \wedge \partial_2 x(u)\|_2} = \frac{4\,(u_1u_2, u_1u_2, u_1u_2)}{4\sqrt{3}u_1u_2} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)$$

e questo implica che Σ è una porzione di un piano, quindi una superficie orientabile.
ii. Per calcolare l'area della superficie utilizziamo la definizione e sfruttiamo il fatto che $D = [0,1]\times[0,1]$ è un quadrato, quindi un insieme normale rispetto ad entrambe le variabili

$$A(\Sigma) = \int_\Sigma d\sigma = \iint_D \|\partial_1 x(u) \wedge \partial_2 x(u)\|_2 du = \iint_D 4\sqrt{3}u_1u_2 du$$
$$= 4\sqrt{3}\int_0^1 u_1 \left[\int_0^1 u_2 du_2\right] du_1 = 4\sqrt{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \sqrt{3}$$

iii. Abbiamo calcolato precdentemente il versore normale, per cui abbiamo già verificato che la parametrizzazione x orienta la superficie come richiesto dal testo dell'esercizio, ricordando la definizione di integrale di flusso possiamo procedere come segue

$$\Phi_\Sigma(F) = \int_\Sigma [F(x)\cdot n(x)]\, d\sigma = \int_\Sigma [(0,0,x_3)\cdot n(x)]\, d\sigma$$
$$= \iint_D \left[(0,0,x_3(u))\cdot \frac{\partial_1 x(u) \wedge \partial_2 x(u)}{\|\partial_1 x(u) \wedge \partial_2 x(u)\|_2}\right] \|\partial_1 x(u) \wedge \partial_2 x(u)\|_2 du$$
$$= \iint_D \left[\left(0,0,u_1^2 - u_2^2\right)\cdot \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)\right] 4\sqrt{3}u_1u_2 du$$
$$= 4\int_0^1 u_1 \left[\int_0^1 \left(u_1^2 - u_2^2\right) u_2 du_2\right] du_1 = 4\int_0^1 u_1 \left[\frac{1}{2}u_1^2u_2^2 - \frac{1}{4}u_2^4\right]_0^1 du_1$$
$$= 4\int_0^1 \left[\frac{1}{2}u_1^3 - \frac{1}{4}u_1\right] du_1 = 4\left[\frac{1}{8}u_1^4 - \frac{1}{8}u_1^2\right]_0^1 = 0$$

Questo calcolo conclude lo svolgimento. Si osservi che Σ **non** è il bordo di un dominio regolare di $\mathbb{R}^3$, quindi non è possibile utilizzare il teorema della divergenza per trasformare l'integrale di superficie in un integrale di volume. □
