

ESERCIZIO 1

a)

Calcoliamo innanzitutto lo spettro.

Una base di autofunzioni è data da

$$|L J J_y\rangle$$

Dato che $J = L \pm \frac{1}{2}$, J può assumere solo valori seminteri. Inoltre dato J , J_y può essere pari solo a $J - \frac{1}{2}$ e $J + \frac{1}{2}$

Abbiamo quindi due famiglie di autofunzioni

$$\begin{cases} |J - \frac{1}{2} J J_y\rangle & \frac{1}{2} - J \leq J_y \leq J - \frac{1}{2} \\ |J + \frac{1}{2} J J_y\rangle & -\frac{1}{2} - J \leq J_y \leq J + \frac{1}{2} \end{cases}$$

Si noti che usiamo una base di autofunzioni di J_y e non J_z , ma questo è irrilevante dato che J_y e J_z hanno lo stesso spettro.

Quindi

$$|J - \frac{1}{2} J J_y\rangle \rightarrow E^{(1)} = \frac{1}{2I} \hbar^2 (J - \frac{1}{2})(J + \frac{1}{2}) + \alpha \hbar^2 J_y^2$$

$$= \frac{\hbar^2}{2I} (J^2 - \frac{1}{4}) + \alpha \hbar^2 J_y^2$$

$$|J + \frac{1}{2} J J_y\rangle \rightarrow E^{(2)} = \frac{\hbar^2}{2I} (J + \frac{1}{2})(J + \frac{3}{2}) + \alpha \hbar^2 J_y^2$$

Il momento di inerzia è positivo. Quindi per $\alpha \geq 0$ abbiamo sempre $E > 0$. Supponiamo ora $\alpha < 0$.

A J fissato

$$\min_{J_y} E^{(1)}(J, J_y) = \frac{\hbar^2}{2I} (J^2 - \frac{1}{4}) + \alpha \hbar^2 (J - \frac{1}{2})^2 = E^{(1)}(J)$$

$$\min_{J_y} E^{(2)}(J, J_y) = \frac{\hbar^2}{2I} (J + \frac{1}{2})(J + \frac{3}{2}) + \alpha \hbar^2 (J + \frac{1}{2})^2 = E^{(2)}(J)$$

Abbiamo

$$E^{(1)}(J) = \left(J - \frac{1}{2}\right) \left[\frac{\hbar^2}{2I} \left(J + \frac{1}{2}\right) + \alpha \hbar^2 \left(J - \frac{1}{2}\right) \right]$$

$$= \left(J - \frac{1}{2}\right) \left[\left(\frac{\hbar^2}{2I} + \alpha \hbar^2\right) J + \frac{1}{2} \left(\frac{\hbar^2}{2I} - \alpha \hbar^2\right) \right]$$

Questa quantità è limitata inferiormente per

$$\frac{\hbar^2}{2I} + \alpha \hbar^2 \geq 0 \quad \alpha \hbar^2 \geq -\frac{\hbar^2}{2I} \quad \alpha \geq -\frac{1}{2I}$$

$$E^{(2)}(J) = \left(J + \frac{1}{2}\right) \left[\frac{\hbar^2}{2I} \left(J + \frac{3}{2}\right) + \alpha \hbar^2 \left(J + \frac{1}{2}\right) \right]$$

$$= \left(J + \frac{1}{2}\right) \left[\left(\frac{\hbar^2}{2I} + \alpha \hbar^2\right) J + \frac{\hbar^2}{2I} \cdot \frac{3}{2} + \frac{\alpha \hbar^2}{2} \right]$$

Si ottiene anche qui la stessa condizione

$$\alpha \geq -\frac{1}{2I}$$

(b)

Per $J = \frac{1}{2}$ abbiamo

$$|0 \ J = \frac{1}{2} \ J_y \rangle \Rightarrow E = \alpha \hbar^2 \frac{1}{4} = \frac{\hbar^2}{4I} \text{ degenerare 2 volte } (J_y = \pm \frac{1}{2})$$

$$|1 \ J = \frac{1}{2} \ J_y \rangle \Rightarrow E = \frac{\hbar^2}{I} + \frac{\alpha \hbar^2}{4} \text{ degenerare 2 volte } (J_y = \pm \frac{1}{2})$$

$$= \frac{5}{4I} \hbar^2$$

Per $J = \frac{3}{2}$

$$|1 \ J = \frac{3}{2} \ J_y \rangle \Rightarrow \begin{cases} E = \frac{\hbar^2}{I} + \frac{\alpha \hbar^2}{4} = \frac{5}{4I} \hbar^2 & \text{degenerare } J_y = \pm \frac{1}{2} \text{ volte} \\ E = \frac{\hbar^2}{I} + \frac{9\hbar^2}{4} = \frac{13}{4I} \hbar^2 & \text{degenerare 2 volte } (J_y = \pm \frac{3}{2}) \end{cases}$$

$$|2 \ J = \frac{3}{2} \ J_y \rangle \Rightarrow \begin{cases} E = \frac{3\hbar^2}{I} + \frac{\alpha \hbar^2}{4} = \frac{13}{4I} \hbar^2 & \text{degenerare 2 volte } (J_y = \pm \frac{1}{2}) \\ E = \frac{3\hbar^2}{I} + \frac{9\hbar^2}{4} = \frac{21}{4I} \hbar^2 & \text{degenerare 2 volte } (J_y = \pm \frac{3}{2}) \end{cases}$$

Per $J_y = \frac{5}{2}$

12 $J = \frac{5}{2}$ $J_y >$

$E < \frac{3\hbar^2}{I} + \frac{\hbar^2}{4} = \frac{13}{4I} \hbar^2$ deg. 2v. ($J_y = \frac{1}{2}$)
termini con energie più alte
($J_y = \frac{3}{2}$)
($J_y = \frac{5}{2}$)

Spettro

$E = \frac{\hbar^2}{4I}$ $10 \quad \frac{1}{2} \quad \pm \frac{1}{2} >$ deg 2

$E = \frac{5\hbar^2}{4I}$ $\left\{ \begin{array}{l} |1 \quad \frac{1}{2} \quad \pm \frac{1}{2} > \\ |1 \quad \frac{3}{2} \quad \pm \frac{1}{2} > \end{array} \right\}$ deg. 4

$E = \frac{13\hbar^2}{4I}$ $\left\{ \begin{array}{l} |1 \quad \frac{3}{2} \quad \pm \frac{3}{2} > \\ |2 \quad \frac{3}{2} \quad \pm \frac{1}{2} > \\ |2 \quad \frac{5}{2} \quad \pm \frac{1}{2} > \end{array} \right\}$ deg. 6

c)
i) È combinazione dei 6 stati con energie $\hbar^2/4I$ e $5\hbar^2/4I$

iii) È combinazione dei tre stati con $J_y = +\frac{1}{2}$
 $|\psi\rangle = a|0 \quad \frac{1}{2} \quad \frac{1}{2}\rangle + b|1 \quad \frac{1}{2} \quad \frac{1}{2}\rangle + c|1 \quad \frac{3}{2} \quad \frac{1}{2}\rangle$

ii) $|c|^2 = \frac{1}{3} \Rightarrow$
iv) $|b|^2 + |c|^2 = \frac{1}{3} \Rightarrow |b|^2 = 0 \rightarrow b=0$

Quindi, per normalizzazione $|a|^2 + |c|^2 = 1 \Rightarrow |a|^2 = \frac{2}{3}$
Con opportuna scelta di fase

$$|\psi\rangle = \sqrt{\frac{2}{3}} |0 \frac{1}{2} \frac{1}{2}\rangle + \sqrt{\frac{1}{3}} e^{i\alpha} |1 \frac{3}{2} \frac{1}{2}\rangle$$

con α fase arbitraria

d) Utilizziamo le tabelle CG (non è rilevante che le basi contenga J_y e non J_z)

$$|0 \frac{1}{2} \frac{1}{2}\rangle = |0 \frac{1}{2}\rangle | \frac{1}{2} \frac{1}{2}\rangle$$

$$|1 \frac{3}{2} \frac{1}{2}\rangle = \sqrt{\frac{1}{3}} |1 1\rangle | \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}} |1 0\rangle | \frac{1}{2} \frac{1}{2}\rangle \quad \left(\begin{array}{c} \text{tabelle} \\ 1 \times \frac{1}{2} \end{array} \right)$$

Quindi

$$|\psi\rangle = \sqrt{\frac{2}{3}} |0 0\rangle | \frac{1}{2} \frac{1}{2}\rangle + \frac{1}{3} e^{i\alpha} |1 1\rangle | \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\rangle + \frac{\sqrt{2}}{3} e^{i\alpha} |1 0\rangle | \frac{1}{2} \frac{1}{2}\rangle$$

$$\text{Prob}(L_y = 0) = \frac{2}{3} + \frac{2}{9} = \frac{8}{9}$$

$$\text{Prob}(L_y = \hbar) = \frac{1}{9}$$

$$e) \quad |\psi\rangle = |\psi_+\rangle | \frac{1}{2} \frac{1}{2}\rangle + |\psi_-\rangle | \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\rangle$$

$$|\psi_+\rangle = \sqrt{\frac{2}{3}} |0 0\rangle + \frac{\sqrt{2}}{3} e^{i\alpha} |1 0\rangle$$

$$|\psi_-\rangle = \frac{1}{3} e^{i\alpha} |1 1\rangle$$

Tenuto conto dell'ortogonalità delle funzioni di spin

$$\langle \psi | \gamma | \psi \rangle = \langle \psi_+ | \gamma | \psi_+ \rangle + \langle \psi_- | \gamma | \psi_- \rangle$$

Ora

$$\langle \psi_- | \gamma | \psi_- \rangle = \frac{1}{9} \langle 1 1 | \gamma | 1 1 \rangle = 0$$

per parità [γ ha elementi di matrice non nulli solo tra stati con l diverso]

$$\begin{aligned}
 \langle \psi_+ | \psi_+ \rangle &= \frac{2}{3} \langle 00 | \psi | 00 \rangle + \frac{2}{9} \langle 10 | \psi | 10 \rangle \\
 &\quad + \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\sqrt{2}}{3} e^{-i\alpha} \langle 10 | \psi | 00 \rangle \\
 &\quad + \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\sqrt{2}}{3} e^{i\alpha} \langle 00 | \psi | 10 \rangle \\
 &= \frac{2}{3\sqrt{3}} (e^{-i\alpha} \langle 10 | \psi | 00 \rangle + e^{i\alpha} \langle 00 | \psi | 10 \rangle)
 \end{aligned}
 \tag{5}$$

Ora abbiamo che la base usata è $|L\ m\rangle$ e stiamo calcolando il valor medio di y .

Quindi, ridefinendo gli assi abbiamo

$$\begin{aligned}
 \langle 1\ 0 | \psi | 0\ 0 \rangle &= \langle 1\ 0 | \frac{L_z}{R} | 0\ 0 \rangle \quad (R=1) \\
 &= \int d\Omega Y_1^0 \frac{1}{R} Y_0^0 = \int d\cos\theta d\varphi \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos\theta \cos\theta \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \\
 &= \frac{\sqrt{3}}{4\pi} 2\pi \int d\cos\theta \cos^2\theta \\
 &= \frac{\sqrt{3}}{2} \int_{-1}^1 dx x^2 = \frac{\sqrt{3}}{2} 2 \cdot \frac{1}{3} = \frac{\sqrt{3}}{3}
 \end{aligned}$$

Ovviamente

$$\langle 0\ 0 | \psi | 1\ 0 \rangle = \langle 1\ 0 | \psi | 0\ 0 \rangle^* = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Quindi

$$\langle \psi | \psi \rangle = \frac{2}{3\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} 2 \cos\alpha = \frac{4}{9} \cos\alpha$$

Il minimo corrisponde ad $\alpha = \pi$. Quindi

$$|\psi\rangle = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{vmatrix} L & J & J_y \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} - \sqrt{\frac{1}{3}} \begin{vmatrix} L & J & J_y \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

Esercizio 2

(6)

(a)

Dimensioni. Data che $[\psi] = [L]^{-1/2}$ $\left[\int |\psi|^2 dx = 1 \right]$

$$[N] = [L]^{-1/2}$$

Poi $[\alpha] = [L]^{-2}$, $[\beta] = [L]$

$$[\gamma] = [\hbar][L^{-1}] = [L^2 T^{-1} M][L^{-1}] = [L T^{-1} M]$$

[Le dimensioni di γ sono quelle di un impulso]

Normalizzazione

$$1 = |N|^2 \int_{-\infty}^{+\infty} dx e^{-2\alpha(x-\beta)^2}$$

$$\sqrt{2\alpha}(x-\beta) = y$$

$$= |N|^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dy}{\sqrt{2\alpha}} e^{-y^2} = |N|^2 \sqrt{\frac{\pi}{2\alpha}}$$

$$N = \left(\frac{2\alpha}{\pi} \right)^{1/4} \quad (N > 0)$$

(b)

$$a = \frac{i}{\sqrt{2m\hbar\omega}} (p - em\omega q) = (RS)$$

$$= \frac{i}{\sqrt{2m\hbar\omega}} (-i)\hbar \left(\frac{d}{dx} + \frac{m\omega}{\hbar} x \right)$$

Quindi

$$\begin{aligned} a\psi &= -\frac{\hbar N}{\sqrt{2m\hbar\omega}} \left[-2\alpha(x-\beta) + \frac{1}{\hbar} + \frac{m\omega}{\hbar} x \right] e^{-\alpha(x-\beta)^2 - 1/2} \\ &= -\frac{\hbar}{\sqrt{2m\hbar\omega}} \left[\left(\frac{m\omega}{\hbar} - 2\alpha \right) x + 2\alpha\beta + \frac{1}{\hbar} \right] \psi(x) \end{aligned}$$

Perché $\psi(x)$ è autofunzione di a se

$$\frac{m\omega}{\hbar} = 2\alpha \quad \alpha = \frac{m\omega}{2\hbar}$$

In questo caso

$$a\psi = -\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} \left(\frac{m\omega}{\hbar} \beta + \frac{1}{\hbar} x \right) \psi(x)$$

$$\lambda = -\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} \left(\frac{m\omega}{\hbar} \beta + \frac{1}{\hbar} x \right)$$

(b2)
A [LEZIONE] prion sappiamo che a^+ non ha autovettori

$$a^+ = \frac{\hbar}{\sqrt{2m\omega}} \left(\frac{d}{dx} - \frac{m\omega}{\hbar} x \right)$$

$$a^+\psi = -\frac{\hbar}{\sqrt{2m\hbar\omega}} \left[\left(-\frac{m\omega}{\hbar} - 2\alpha \right) x + 2\alpha\beta + \frac{1}{\hbar} x \right] \psi(x)$$

$\psi(x)$ sarebbe autofunzione di a^+ se

$$-\frac{m\omega}{\hbar} - 2\alpha = 0 \quad \alpha = -\frac{m\omega}{\hbar}$$

Dato che α DEVE essere positivo questa condizione non è mai verificata.

(c)

$$\psi(x) = N e^{-\frac{3m\omega}{2\hbar} x^2 + \frac{1}{\hbar} x} \quad N = \left(\frac{3m\omega}{\pi\hbar} \right)^{1/4}$$

Dobbiamo calcolare $|\langle \psi_0 | \psi \rangle|^2$ dove ψ_0 è l'autofunzione dello stato fondamentale

~~$\psi_0(x) = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar} \right)^{1/4} e^{-\rho^2/2}$~~

$$\psi_0(x) = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar} \right)^{1/4} e^{-\rho^2/2}$$

$$\rho = \frac{x}{\beta} \quad \beta = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}$$

Ora

$$-\frac{3m\omega}{2\hbar} x^2 + \frac{1}{\hbar} x = -\frac{3}{2} \rho^2 - i \frac{1}{\hbar} \beta \rho$$

$$b = \frac{1}{\hbar} \beta = \frac{1}{\hbar} \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}} = \frac{1}{\sqrt{\hbar m\omega}}$$

$$\langle \psi_0 | \psi \rangle = \left(\frac{3m\omega}{\pi\hbar} \right)^{1/4} \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar} \right)^{1/4} \quad [dx = \beta dp] \quad (8)$$

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{+\infty} \beta dp e^{-p^2/2} e^{-3/2 p^2 - 1bp} \\ &= 3^{1/4} \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar} \right)^{1/2} \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}} \int_{-\infty}^{+\infty} dp e^{-2p^2 - 1bp} \\ &= \frac{3^{1/4}}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} dp e^{-2p^2 - 1bp} \end{aligned}$$

Ora

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} dp \exp[-2p^2 - 1bp] \quad \text{poniamo } \sqrt{2}p = x + a$$

$$\begin{aligned} -2p^2 + 1bp &= -2 \frac{(x+a)^2}{2} + 1b \frac{x+a}{\sqrt{2}} \\ &= -x^2 - a^2 - 2ax + \frac{1b}{\sqrt{2}}x + \frac{1ba}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

Scegliamo a in modo che il coefficiente di x sia nullo

$$-2a + \frac{1b}{\sqrt{2}} = 0 \quad a = \frac{1b}{2\sqrt{2}}$$

$$-2p^2 + 1bp = -x^2 + \frac{b^2}{8} - \frac{b^2}{4} = -x^2 - \frac{b^2}{8}$$

Quindi

$$I = \frac{1}{\sqrt{2}} \int dx e^{-x^2 - b^2/8} = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}} e^{-b^2/8}$$

(9)

(9)

Quinti

$$\text{Prob} = \frac{\sqrt{3}}{2} e^{-b^2/4} = \frac{\sqrt{3}}{2} \exp\left(-\frac{r^2}{4m\hbar\omega}\right)$$

(d)

At tempo $t=0$

$$\begin{aligned} \langle \psi | x | \psi \rangle &= \int N^2 e^{-2\alpha(x-\beta)^2} x = \quad x-\beta = y \\ &= \int N^2 e^{-2\alpha y^2} (y+\beta) = \beta \int N^2 dy e^{-2\alpha y^2} \\ &\quad \uparrow \\ &\quad = 0 \text{ per parità} \\ &= \beta \left(\frac{2\alpha}{\pi} \right)^{1/2} \left(\frac{\pi}{2\alpha} \right)^{1/2} = \beta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle \psi | p | \psi \rangle &= \int dx N^2 e^{-\alpha(x-\beta)^2 - i\gamma x/\hbar} (-i\hbar \frac{d}{dx}) e^{-\alpha(x-\beta)^2 + i\gamma x/\hbar} \\ &= \int dx N^2 e^{-2\alpha(x-\beta)^2} (-i\hbar) [-2\alpha(x-\beta) + i\gamma/\hbar] \quad (x-\beta=y) \\ &= -i\hbar N^2 \int dy e^{-2\alpha y^2} (-2\alpha y + i\gamma/\hbar) \\ &\qquad\qquad = 0 \text{ per partià} \\ &= \gamma N^2 \int dy e^{-2\alpha y^2} = \gamma \end{aligned}$$

Per calcolare il valore a $t \neq 0$ utilizziamo le equazioni di Hamilton

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \langle \psi | q | \psi \rangle = \langle \psi | p | \psi \rangle \frac{1}{m} \\ \frac{d}{dt} \langle \psi | p | \psi \rangle = -m\omega^2 \langle \psi | q | \psi \rangle \end{cases}$$

Quindi

$$\frac{d^2}{dt^2} \langle \psi | q | \psi \rangle = -\omega^2 \langle \psi | q | \psi \rangle$$

Da cui

$$\langle \psi | q | \psi \rangle = A \cos \omega t + B \sin \omega t$$

$$\begin{aligned} \langle \psi | p | \psi \rangle &= m \frac{d}{dt} \langle \psi | q | \psi \rangle = \\ &= -m A \omega \sin \omega t + m B \omega \cos \omega t \end{aligned}$$

Al tempo $t=0$

$$A = \langle \psi | q | \psi \rangle|_{t=0} = \beta$$

$$B = \frac{1}{m\omega} \langle \psi | p | \psi \rangle|_{t=0} = \frac{\gamma}{m\omega}$$

Quindi al tempo t

$$\begin{cases} \langle \psi | q | \psi \rangle = \beta \cos \omega t + \frac{\gamma}{m\omega} \sin \omega t \\ \langle \psi | p | \psi \rangle = -m\beta\omega \sin \omega t + \gamma \cos \omega t \end{cases}$$

Per calcolare $\langle \psi | \Pi | \psi \rangle$, Π operatore di parità, notiamo che $[\Pi, H] = 0$ per cui il valor medio non dipende da t

$$\begin{aligned} \langle \psi | \Pi | \psi \rangle &= N^2 \int dx e^{-\alpha(x-\beta)^2 - i\gamma x/\hbar} e^{-\alpha(x+\beta)^2 - i\gamma x/\hbar} \\ &= N^2 \int dx e^{-2\alpha x^2 - 2\alpha\beta^2 - 2i\gamma x/\hbar} \end{aligned}$$

Di nuovo facciamo una traslazione $x = y + a$ (11)

$$E_F = -2\alpha x^2 - 2\alpha\beta^2 - 2i\gamma x/\hbar$$

$$= -2\alpha(y+a)^2 - 2\alpha\beta^2 - 2i\gamma(y+a)/\hbar$$

$$= -2\alpha y^2 - 2\alpha 2ay - 2\alpha a^2 - 2\alpha\beta^2 - 2i\gamma y/\hbar - 2ia\gamma$$

Scegliamo a in modo che

$$-4\alpha ay - 2i\gamma y/\hbar = 0$$

$$a = -\frac{i\gamma}{2\alpha\hbar}$$

Quindi l'esponente E_F è dato da

$$E_F = -2\alpha y^2 - 2\alpha\beta^2 + 2\alpha \frac{\gamma^2}{4\alpha^2\hbar^2} - 2i\gamma \left(\frac{-i\gamma}{2\alpha\hbar} \right)$$

$$= -2\alpha y^2 - 2\alpha\beta^2 + \frac{\gamma^2}{2\alpha\hbar^2}$$

$$\langle \psi | \Pi | \psi \rangle = N^2 \int dy e^{-2\alpha y^2} e^{-2\alpha\beta^2 - \frac{\gamma^2}{2\alpha\hbar^2}}$$
$$= e^{-2\alpha\beta^2 - \gamma^2/2\alpha\hbar^2}$$