Esame di Meccanica Quantistica 17/07/2025

Esercizio 1. Una particella di spin 1/2 si muove sulla superficie di una sfera di raggio R con Hamiltoniana

$$H = \frac{L^2}{2I} + \alpha J_y^2\,, \tag{1}$$

dove I è il momento di inerzia, α è un parametro reale, $\vec{L}$ è il momento angolare orbitale e $\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$ è il momento angolare totale.

a) Si determini per quali valori di α lo spettro degli autovalori di H è limitato inferiormente.

b) Si assuma in questa domanda e nelle successive $\alpha = 1/I$. Si calcolino le energie dei primi 3 livelli energetici, la loro degenerazione e le corrispondenti autofunzioni (o autoket).

c) Si determinino tutti gli stati $|\psi\rangle$ normalizzati tali che: i) una misura di energia dà sempre un risultato minore di $(11/4)\hbar^2/I$; ii) la probabilità che una misura di J^2 dia come risultato $15\hbar^2/4$ è $1/3$; iii) una misura di J_y dà sempre $\hbar/2$ come risultato; iv) la probabilità che una misura di energia dia come risultato $(5/4)\hbar^2/I$ è $1/3$.

d) Si calcoli la probabilità che una misura di L_y sugli stati $|\psi\rangle$ dia 0 come risultato.

e) Tra tutti gli stati $|\psi\rangle$ determinati al punto c) si trovi quello per cui il valor medio $\langle\psi|\frac{y}{R}|\psi\rangle$ è minimo.

Esercizio 2. Si consideri un oscillatore armonico unidimensionale di massa m e pulsazione ω centrato nell'origine. Il sistema si trova nel seguente stato quantistico normalizzato:

$$\psi(x) = \langle x|\psi\rangle = \mathcal{N} e^{-\alpha(x-\beta)^2 + i\frac{\gamma x}{\hbar}}\,,$$

dove $\mathcal{N}, \alpha, \beta$ e γ sono delle costanti reali; inoltre $\mathcal{N} > 0$ e $\alpha > 0$.

a) Determinare le dimensioni di $\mathcal{N}, \alpha, \beta$ e γ. Determinare $\mathcal{N}$ come funzione di α, β e γ.

b1) Determinare per quali valori di α, β e γ lo stato $|\psi\rangle$ è autostato dell'operatore di distruzione (detto anche di discesa) $\hat{a}$. In caso tali valori esistano, si determini l'autovalore di $\hat{a}$ corrispondente a $|\psi\rangle$.
b2) Si risponda alla domanda del punto b1) considerando l'operatore $\hat{a}^\dagger$.

c) Se si effettua una misura di energia su $|\psi\rangle$, con che probabilità si può ottenere il valore $E = \frac{\hbar\omega}{2}$? Si calcoli tale probabilità per $\alpha = 3m\omega/(2\hbar)$, $\beta = 0$ e valori generici di γ.

d) Si calcolino i valori medi di $\hat{x}, \hat{p}$ e dell'operatore parità $\hat{\mathcal{P}}$ al variare del tempo per valori generici di α, β e γ.