

Esercizio 1

(1)

a) La funzione d'onda $\psi(x)$ è un polinomio di 2° grado in p per $e^{-p^2/2}$, quindi è una combinazione lineare delle autofunzioni dello oscillatore armonico $\psi_0(x), \psi_1(x), \psi_2(x)$.

$$\psi_0 = \left(\frac{m\omega}{\hbar\pi}\right)^{1/4} e^{-p^2/2}$$

$$\psi_1 = \left(\frac{m\omega}{\hbar\pi}\right)^{1/4} \sqrt{2} p e^{-p^2/2}$$

$$\psi_2 = \left(\frac{m\omega}{\hbar\pi}\right)^{1/4} \frac{1}{\sqrt{2}} (2p^2 - 1) e^{-p^2/2}$$

Abbiamo

$$\psi(x) = A(1 + 2ip\sqrt{2} - 2p^2) e^{-p^2/2}$$

$$= -A(2p^2 - 1) e^{-p^2/2} + 2iA p\sqrt{2} e^{-p^2/2}$$

$$= -A \left(\frac{\hbar\pi}{m\omega}\right)^{1/4} \sqrt{2} \psi_2 + A \left(\frac{\hbar\pi}{m\omega}\right)^{1/4} 2i \psi_1(x)$$

$$= -A \left(\frac{\hbar\pi}{m\omega}\right)^{1/4} (\sqrt{2} \psi_2 - 2i \psi_1)$$

La condizione di normalizzazione è

$$|A| \left(\frac{\hbar\pi}{m\omega}\right)^{1/2} (2 + 4) = 1 \quad A = -\frac{1}{\sqrt{6}} \left(\frac{m\omega}{\hbar\pi}\right)^{1/4}$$

Quindi

$$\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{6}} (\sqrt{2} \psi_2 - 2i \psi_1) = \frac{1}{\sqrt{3}} \psi_2 - \sqrt{\frac{2}{3}} i \psi_1$$

$$\langle \psi | H | \psi \rangle = \frac{1}{3} \cdot \frac{5}{2} \hbar\omega + \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2} \hbar\omega = \left(\frac{5}{6} + 1\right) \hbar\omega = \frac{11}{6} \hbar\omega$$

Ovviamente tale valor medio non dipende da p

b)

(2)

$$\psi(x,t) = \frac{1}{\sqrt{3}} e^{-iE_2 t/\hbar} \psi_2 - \sqrt{\frac{2}{3}} i e^{-iE_1 t/\hbar} \psi_1$$

(modulo fase) $\frac{1}{\sqrt{3}} \psi_2 - \sqrt{\frac{2}{3}} i e^{i(E_2 - E_1)t/\hbar} \psi_1$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}} \psi_2 + \sqrt{\frac{2}{3}} e^{i\omega t} i \psi_1$$

In notazione di Dirac

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}} |2\rangle + i \sqrt{\frac{2}{3}} e^{i\omega t} |1\rangle$$

Ora

$$\begin{aligned} \langle \psi | x | \psi \rangle &= \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \langle 2 | + i \sqrt{\frac{2}{3}} e^{-i\omega t} \langle 1 | \right) x \left(\frac{1}{\sqrt{3}} | 2 \rangle + i \sqrt{\frac{2}{3}} e^{i\omega t} | 1 \rangle \right) \\ &= \frac{1}{3} \langle 2 | x | 2 \rangle + \frac{2}{3} \langle 1 | x | 1 \rangle + i \frac{\sqrt{2}}{3} e^{-i\omega t} \langle 1 | x | 2 \rangle \\ &\quad - i \frac{\sqrt{2}}{3} e^{i\omega t} \langle 2 | x | 1 \rangle \end{aligned}$$

Ora $\langle 2 | x | 2 \rangle = \langle 1 | x | 1 \rangle = 0$ per parità

Per calcolare $\langle 2 | x | 1 \rangle$ e $\langle 1 | x | 2 \rangle = \langle 2 | x | 1 \rangle^*$ utilizziamo

$$a = \frac{1}{\sqrt{2m\hbar\omega}} (ip + m\omega q) \quad a^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2m\hbar\omega}} (-ip + m\omega q)$$

$$x = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}} (a + a^\dagger)$$

$$\begin{aligned} \langle 2 | x | 1 \rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}} \left(\langle 2 | a + a^\dagger | 1 \rangle \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}} (0 + \sqrt{2}) = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}} \end{aligned}$$

Quindi

$$\begin{aligned} \langle \psi | x | \psi \rangle &= \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}} i \frac{\sqrt{2}}{3} (e^{-i\omega t} - e^{i\omega t}) \\ &= \frac{1}{3} \sqrt{\frac{2\hbar}{m\omega}} i (-2i) \sin \omega t = \frac{2\sqrt{2}}{3} \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}} \sin \omega t \end{aligned}$$

il valore di $\langle \psi | p | \psi \rangle$ si può fare utilizzando le equazioni di Hamilton

$$\begin{aligned}\langle \psi | p | \psi \rangle &= \frac{d}{dt} \langle \psi | m q | \psi \rangle \\ &= \frac{2\sqrt{2}}{3} \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}} m\omega \cos \omega t \\ &= \frac{2\sqrt{2}}{3} \sqrt{m\hbar\omega} \cos \omega t\end{aligned}$$

Si può pure fare per calcolo diretto

Ricordando $\langle 1 | p | 1 \rangle = \langle 2 | p | 2 \rangle = 0$ per parità abbiamo

$$\langle \psi | p | \psi \rangle = i \frac{\sqrt{2}}{3} e^{-i\omega t} \langle 1 | p | 2 \rangle - i \frac{\sqrt{2}}{3} e^{i\omega t} \langle 2 | p | 1 \rangle$$

$$\text{Ora } p = -\frac{i}{\sqrt{2}} \sqrt{m\hbar\omega} (a - a^\dagger)$$

Quindi

$$\begin{aligned}\langle 2 | p | 1 \rangle &= -\frac{i}{\sqrt{2}} \sqrt{m\hbar\omega} \langle 2 | a - a^\dagger | 1 \rangle \\ &= -\frac{i}{\sqrt{2}} \sqrt{m\hbar\omega} (0 - \sqrt{2}) = +i \sqrt{m\hbar\omega}\end{aligned}$$

$$\langle 1 | p | 2 \rangle = \langle 2 | p | 1 \rangle^* = -i \sqrt{m\hbar\omega}$$

Quindi

$$\begin{aligned}\langle \psi | p | \psi \rangle &= +\sqrt{m\hbar\omega} \left[\frac{\sqrt{2}}{3} e^{-i\omega t} + \frac{\sqrt{2}}{3} e^{i\omega t} \right] \\ &= \frac{2\sqrt{2}}{3} \sqrt{m\hbar\omega} \cos \omega t\end{aligned}$$

c)

$$\Delta E = \lambda m \omega^2 \left(\langle 0 | x^2 | 0 \rangle - 4x_0 \langle 0 | x | 0 \rangle + 4x_0^2 \right)$$

$\uparrow = 0$ per parità

$$\text{Ora } \langle 0 | x^2 | 0 \rangle = \| x | 0 \rangle \|^2$$

$$x|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}} a^\dagger |0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}} |1\rangle$$

Quindi

$$\begin{aligned} \Delta E &= \lambda m \omega^2 \left[\frac{1}{2} \frac{\hbar}{m\omega} + 4x_0^2 \right] \\ &= \lambda m \omega^2 \left(\frac{1}{2} + 4 \right) x_0^2 = \frac{9}{2} \lambda m \omega^2 x_0^2 = \frac{9}{2} \lambda \hbar \omega \end{aligned}$$

d)

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} m \omega^2 x^2 + \lambda m \omega^2 (x - x_0)^2$$

Il potenziale è un polinomio quadratico ossia una ~~parabola~~ parabola. È quindi limitato inferiormente se il coefficiente del termine x^2 è positivo

$$\text{Data che } \frac{1}{2} m \omega^2 x^2 + \lambda m \omega^2 x^2 = \frac{1}{2} (1 + 2\lambda) m \omega^2 x^2$$

$$\text{La condizione è } (1 + 2\lambda) > 0 \text{ ossia } \lambda > -\frac{1}{2}$$

Se $\lambda > -\frac{1}{2}$ si tratta di un oscillatore armonico che oscilla intorno ad x_{eq} con x_{eq} dato da

$$\left[V(x) = \frac{1}{2} m \omega^2 x^2 + \lambda m \omega^2 (x - x_0)^2 \text{ è il potenziale} \right]$$

$$\left. \frac{\partial V}{\partial x} \right|_{x=x_{eq}} = 0 \Rightarrow m \omega^2 x_{eq} + 2\lambda m \omega^2 (x_{eq} - x_0) = 0$$

$$x_{eq} + 2\lambda (x_{eq} - x_0) = 0$$

$$x_{eq} = \frac{2\lambda x_0}{1 + 2\lambda}$$

Abbiamo poi

$$\begin{aligned} V(x_{eq}) &= \frac{1}{2} m \omega^2 \left(\frac{4\lambda}{1+2\lambda} \right)^2 x_0^2 + \lambda m \omega^2 \left(\frac{4\lambda}{1+2\lambda} - 2 \right)^2 x_0^2 \\ &= m \omega^2 x_0^2 \left[\frac{1}{2} \left(\frac{4\lambda}{1+2\lambda} \right)^2 + \lambda \frac{4}{(1+2\lambda)^2} \right] \\ &= \hbar \omega \frac{1}{(1+2\lambda)^2} (8\lambda^2 + 4\lambda) = \hbar \omega \frac{4\lambda(1+2\lambda)}{(1+2\lambda)^2} = \hbar \omega \frac{4\lambda}{1+2\lambda} \end{aligned}$$

Dato che

$$\begin{aligned} V(x) &= V(x_{eq}) + \left. \frac{\partial V}{\partial x} \right|_{x_{eq}} (x - x_{eq}) + \frac{1}{2} \left. \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \right|_{x_{eq}} (x - x_{eq})^2 \\ &= \frac{1}{2} (1+2\lambda) m \omega^2 X^2 + \hbar \omega \frac{4\lambda}{1+2\lambda} \end{aligned}$$

con $X = x - x_{eq}$

Se definiamo $\Omega = \omega \sqrt{1+2\lambda}$ lo spettro esatto è

$$E_n = \hbar \Omega \left(n + \frac{1}{2} \right) + \hbar \omega \frac{4\lambda}{1+2\lambda}$$

Al primo ordine in λ

$$\Omega = \omega (1 + \lambda + O(\lambda^2))$$

$$E_n = \hbar \omega (1 + \lambda) \left(n + \frac{1}{2} \right) + 4\lambda \hbar \omega + O(\lambda^2)$$

STATO FOND:

$$E_0 = \hbar \omega (1 + \lambda) \frac{1}{2} + 4\lambda \hbar \omega + O(\lambda^2)$$

$$= \frac{\hbar \omega}{2} + \hbar \omega \lambda \left(\frac{1}{2} + 4 \right) + O(\lambda^2)$$

$$= \frac{\hbar \omega}{2} + \hbar \omega \lambda \frac{9}{2} + O(\lambda^2)$$

OK

Esercizio 2

116)

Riscriviamo la funzione d'onda data in termini delle autofunzioni del problema Coulombiano

$$R_{10} = \frac{2}{a_0^{3/2}} e^{-r/a_0}$$

$$R_{21} = \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{1}{(2a_0)^{3/2}} \frac{r}{a_0} e^{-r/(2a_0)}$$

$$Y_{00}^0 = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \quad Y_1^0 = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos \theta$$

Quindi

$$e^{-r/a_0} = R_{10} Y_0^0 \frac{a_0^{3/2}}{2} \sqrt{4\pi}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{4\sqrt{2}} \cos \theta \frac{r}{a_0} e^{-r/2a_0} &= \frac{1}{4\sqrt{2}} \sqrt{\frac{4\pi}{3}} \sqrt{3} 2\sqrt{2} a_0^{3/2} R_{21} Y_1^0 \\ &= \frac{1}{2} a_0^{3/2} \sqrt{4\pi} R_{21} Y_1^0 \end{aligned}$$

Quindi

$$\psi = N \frac{a_0^{3/2}}{2} \sqrt{4\pi} (\psi_{100} | + \rangle + i \psi_{210} | - \rangle)$$

$$\begin{array}{ll} \psi_{100} = R_{10} Y_0^0 & \psi_{210} = R_{21} Y_1^0 \\ (nlm) & (nlm) \end{array}$$

Imponendo la normalizzazione di ψ :

$$|N|^2 \frac{a_0^3}{4} \cdot 4\pi (1+1) = 1$$

$$|N|^2 a_0^3 2\pi = 1$$

$$N = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{a_0^{3/2}} \quad (\text{con opportuna scelta di fase})$$

Quindi

(26)

$$\psi = \frac{1}{\sqrt{2}} \psi_{100} |+\rangle + \frac{i}{\sqrt{2}} \psi_{210} |-\rangle$$

Per calcolare la densità di probabilità notiamo che

probabilità che la particella sia in un guscio con $a < r < b$ ed abbia spin con $S_z = +\frac{\hbar}{2}$:

$$\begin{aligned} & \int_{\text{guscio}} d^3r \frac{1}{2} |\psi_{100}|^2 = \\ &= \frac{1}{2} \int_a^b dr r^2 \int d\Omega R_{10}^2 |Y_{00}|^2 \\ &= \frac{1}{2} \int_a^b dr r^2 R_{10}^2 \quad \left[\int d\Omega |Y_0^0|^2 = 1 \right] \end{aligned}$$

analogamente la probabilità che la particella sia in un guscio con $a < r < b$ ed abbia spin $S_z = -\frac{\hbar}{2}$

$$\begin{aligned} & \int_{\text{guscio}} d^3r \frac{1}{2} |\psi_{210}|^2 \\ &= \frac{1}{2} \int_a^b dr r^2 \int d\Omega R_{21}^2 |Y_1^0|^2 = \frac{1}{2} \int_a^b dr r^2 R_{21}^2 \end{aligned}$$

Quindi la probabilità di che la particella si trovi in $r \in [a, b]$ indep. dallo spin è

$$P(a < r < b) = \frac{1}{2} \int_a^b dr r^2 (R_{10}^2 + R_{21}^2)$$

La DENSITA' DI PROBABILITA' è quindi

$$P(r) = \frac{1}{2} r^2 (R_{10}^2 + R_{21}^2)$$

Quindi

(3b)

$$P(r) = \frac{r^1}{2} \left[\frac{4}{a_0^3} e^{-2r/a_0} + \frac{1}{3} \frac{1}{8a_0^3} \frac{r^2}{a_0^2} e^{-r/a_0} \right]$$

$$= \frac{1}{a_0} \left[2x^2 e^{-2x} + \frac{1}{48} x^4 e^{-x} \right]$$

$$= \frac{1}{a_0} f(x)$$

$$x = r/a_0$$

$$\boxed{x \geq 0}$$

Calcoliamo

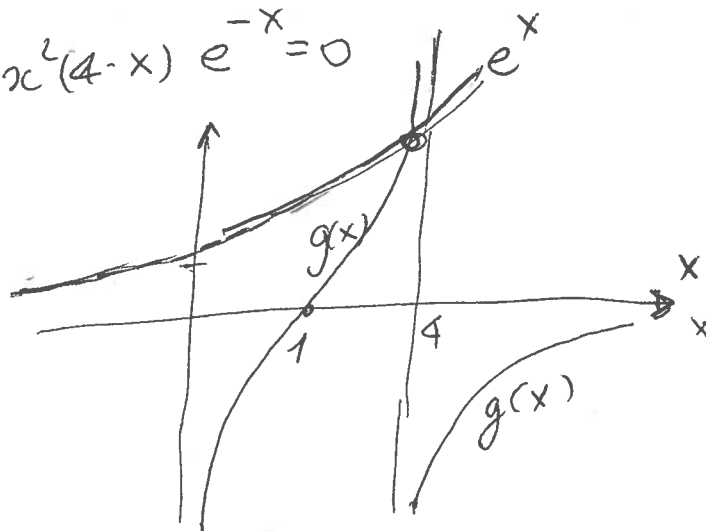
$$f'(x) = 4x e^{-2x} - 4x^2 e^{-2x} + \left(\frac{1}{12} x^3 - \frac{1}{48} x^4 \right) e^{-x}$$

$$= 4x(1-x) e^{-2x} + \frac{x^3}{48} (4-x) e^{-x}$$

$f'(x) = 0$ per $x=0$ e per

$$192(1-x) e^{-2x} + x^3(4-x) e^{-x} = 0$$

$$-\frac{192(1-x)}{x^3(4-x)} = e^x$$
$$\underbrace{\hspace{10em}}_{g(x) = e^x}$$



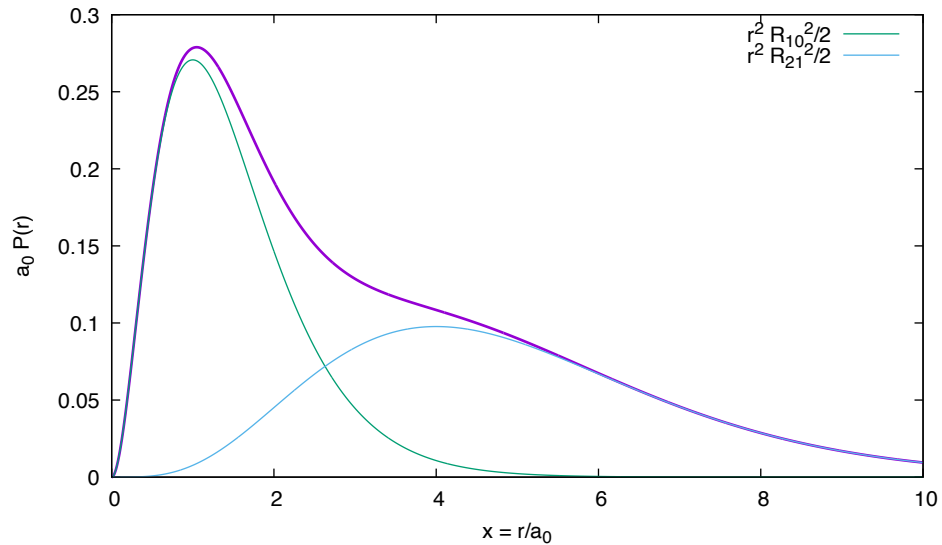
Vi è una sola intersezione con $1 \leq x \leq 4$
[quindi zero di $f'(x)/x$]

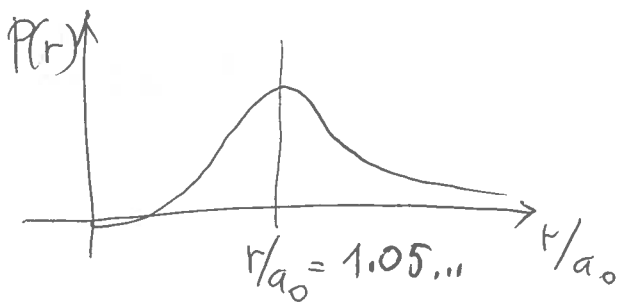
Quindi

$$0 = f'(x) \Rightarrow \begin{cases} 0 = x & \text{minimo} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = x_{\text{int}} & \text{massimo} \end{cases} \quad 1 \leq x_{\text{int}} < 4$$

$$[\text{Numericamente } x_{\text{int}} = 1.04818]$$





b)

Misura di S_z

$$\text{Prob}(S_z = \frac{\hbar}{2}) = \frac{1}{2}$$

$$\text{Prob}(S_z = -\frac{\hbar}{2}) = \frac{1}{2}$$

Misura di L^2

$$\text{Prob}(L^2 = 0) = \frac{1}{2}$$

$$\text{Prob}(L^2 = 2\hbar^2) = \frac{1}{2}$$

$$\psi = \frac{1}{\sqrt{2}} \underset{\substack{\uparrow \\ L=0}}{\psi_{100}} |+\rangle + \frac{i}{\sqrt{2}} \underset{\substack{\uparrow \\ L=1}}{\psi_{210}} |-\rangle$$

Misura di J_z (dato che lo stato ha $L_z = 0$ è equivalente a S_z)

$$\text{Prob}(J_z = \frac{\hbar}{2}) = \frac{1}{2}$$

$$\text{Prob}(J_z = -\frac{\hbar}{2}) = \frac{1}{2}$$

Misura di J^2

Dobbiamo cambiare base. Riscriviamo

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \underset{n \ell L_z S_z}{|100 \frac{1}{2}\rangle} + \frac{i}{\sqrt{2}} \underset{n \ell L_z S_z}{|210 -\frac{1}{2}\rangle}$$

$$\text{Ora } |100 \frac{1}{2}\rangle = \underset{n \ell 1 1_z}{|10 \frac{1}{2} \frac{1}{2}\rangle_J}$$

$$|210 -\frac{1}{2}\rangle = \sqrt{\frac{2}{3}} |21 \frac{3}{2} -\frac{1}{2}\rangle_J + \sqrt{\frac{1}{3}} |21 \frac{1}{2} -\frac{1}{2}\rangle_J \quad (\text{tabella CG } 1 \times \frac{1}{2})$$

Quindi

$$\text{Prob}(J^2 = \frac{3}{4} \hbar^2) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

$$\text{Prob}(J^2 = \frac{15}{4} \hbar^2) = \frac{1}{2} - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$

c)

(46)

$$\psi = \frac{1}{\sqrt{2}} R_{10} Y_{00} |+\rangle + \frac{i}{\sqrt{2}} R_{21} Y_1^0 |-\rangle$$

Mediando su r (coordinata radiale) e lo spin

$$\text{Prob}(x>0, y>0, z>0) = \frac{1}{2} \int_{\text{Iott}} |Y_{00}|^2 d\Omega + \frac{1}{2} \int_{\text{Iott}} |Y_1^0|^2 d\Omega$$

$$\int_{\text{Iott}} |Y_0^0|^2 d\Omega = \frac{1}{8}$$

$$\begin{aligned} \int_{\text{Iott}} |Y_1^0|^2 d\Omega &= \frac{3}{4\pi} \int_0^{\pi/2} d\cos\theta \int_0^{\pi/2} d\varphi \cos^2\theta \\ &= \frac{3}{8} \int_0^1 dx x^2 = \frac{1}{8} \end{aligned}$$

Quindi

$$\text{Prob}(x>0, y>0, z>0) = \frac{1}{8}$$

d) Posso $\mu = \lambda \frac{E_F}{\hbar a_0}$

$$\begin{aligned} [L_z, V] &= \mu [L_z, \vec{S} \cdot \vec{r}] = \\ &= \mu S_x [L_z, x] + \mu S_y [L_z, y] \\ &= \mu S_x i\hbar \epsilon_{312} y + \mu S_y i\hbar \epsilon_{321} x \\ &= i\hbar \mu (S_x y - S_y x) \end{aligned}$$

Più in generale

$$\begin{aligned} [L_i, V] &= [L_i, \mu \vec{S} \cdot \vec{r}] = \mu \sum_j S_j [L_i, r_j] \\ &= i\hbar \sum_j S_j \epsilon_{ijk} r_k = i\hbar (\vec{S} \times \vec{r})_i \end{aligned}$$

• $[S_z, V] =$ uguale a prima

$$= \mu [S_z, S_x] x + \mu [S_z, S_y] y$$

$$= i\hbar \mu (S_y x - S_x y)$$

$$[S_i, V] = i\hbar (\vec{r} \times \vec{S})_i$$

• $[J_z, V] = 0$ dato che V è uno scalare.

Ovviamente si può pure scrivere

$$[J_z, V] = [L_z, V] + [S_z, V] =$$

$$= i\hbar \mu (S_x y - S_y x) + i\hbar \mu (S_y x - S_x y) = 0$$

• $[H, V] = \left[\frac{p^2}{2m}, \mu \vec{S} \cdot \vec{r} \right]$

$$= \frac{\mu}{2m} \sum_i [p^2, S_i r_i]$$

$$= \frac{\mu}{2m} \sum_{ij} S_i [p_j^2, r_i]$$

$$= \frac{\mu}{2m} \sum_{ij} S_i (p_j [p_j, r_i] + [p_j, r_i] p_j)$$

$$= \frac{\mu}{2m} \sum_{ij} S_i (-i\hbar \delta_{ij}) 2 p_j$$

$$= -i\hbar \frac{\mu}{m} \vec{S} \cdot \vec{p}$$

e)
Per parità $\langle \psi_{100} | \vec{r} | \psi_{100} \rangle = 0$

Quindi

$$\Delta E = \langle \psi_{100} | V | \psi_{100} \rangle = 0 \quad [\text{lo spin non conta}]$$

