Esame di Meccanica Quantistica 01/07/2025

Esercizio 1. Si consideri un oscillatore armonico unidimensionale di massa m e pulsazione ω centrato nell'origine. Al tempo $t = 0$ la particella ha funzione d'onda normalizzata

$$\psi(x) = A(1 + i\rho\sqrt{2})^2 e^{-\rho^2/2} \quad \rho = \frac{x}{x_0} \quad x_0 = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}.$$

- a) Si calcoli la costante A ed il valore medio dell'energia al variare del tempo.
- b) Si calcolino i valori medi di x e p al variare del tempo.
- c) Il sistema viene perturbato aggiungendo alla Hamiltoniana H_0 dell'oscillatore armonico il termine

$$V(x) = \lambda m\omega^2(x - 2x_0)^2.$$

Si calcoli l'energia dello stato fondamentale della Hamiltoniana $H = H_0 + V$, al primo ordine in λ assumendo $|\lambda| \ll 1$.

- d) Si determinino i valori di λ per cui lo spettro di H è limitato inferiormente. Per tali valori, si calcoli lo spettro di H esattamente. Si verifichi la correttezza del risultato ottenuto al punto c), sviluppando il risultato esatto per l'energia dello stato fondamentale al primo ordine in λ .

Esercizio 2. Si consideri un elettrone la cui Hamiltoniana è data da

$$\hat{H}_0 = \frac{\hat{p}^2}{2m} - \frac{\alpha}{\hat{r}},$$

dove $\alpha = e^2$ nel sistema di Gauss e $\alpha = e^2/(4\pi\epsilon_0)$ nel sistema internazionale. Lo stato del sistema è descritto dalla seguente funzione d'onda

$$\langle \mathbf{r} | \psi \rangle = \mathcal{N} \left(e^{-\frac{r}{a_0}} |+\rangle + \frac{i}{4\sqrt{2}} \cos\theta \frac{r}{a_0} e^{-\frac{r}{2a_0}} |-\rangle \right),$$

dove $a_0 \equiv \frac{\hbar^2}{m\alpha}$ è il raggio di Bohr, r è la coordinata radiale, θ l'angolo polare, $\mathcal{N} > 0$ una costante di normalizzazione e $\hat{S}_z |\pm\rangle = \pm \frac{\hbar}{2} |\pm\rangle$.

- a) Si calcoli la costante di normalizzazione $\mathcal{N}$ e si faccia un grafico qualitativo della densità di probabilità radiale $P(r)$ ($P(r)$ soddisfa la condizione di normalizzazione $\int_0^{+\infty} P(r) dr = 1$).
- b) Se si effettuano misure degli operatori $\hat{S}_z$, $\hat{L}^2$, $\hat{J}_z$ e $\hat{J}^2$, che valori si possono ottenere e con quali probabilità?
- c) Si determini la probabilità di trovare la particella nel primo ottante ($x > 0, y > 0, z > 0$).

Si consideri ora la perturbazione

$$\hat{V} = \lambda \frac{E_I}{\hbar a_0} \hat{\mathbf{S}} \cdot \hat{\mathbf{r}},$$

con $0 < \lambda \ll 1$ e $E_I \equiv \frac{m\alpha^2}{2\hbar^2}$.

- d) Si calcolino i commutatori $[\hat{L}_z, \hat{V}]$, $[\hat{S}_z, \hat{V}]$, $[\hat{J}_z, \hat{V}]$ e $[\hat{H}_0, \hat{V}]$.
- e) Si calcoli la correzione all'energia del livello fondamentale di $\hat{H}_0$ al primo ordine in λ .