

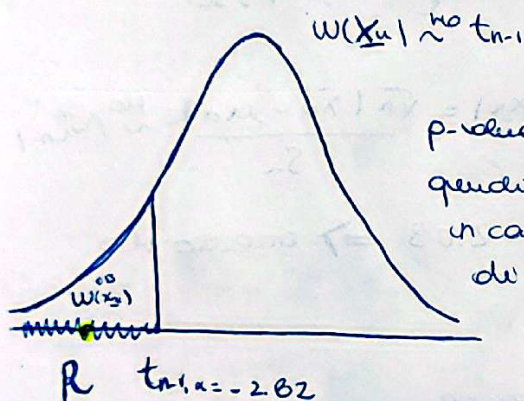
1) (Esercizio 3 Esercitazione 3) - Esercizio 10 Parte test - Intervalli di confidenza -

$N(\mu, \sigma^2)$ entrambi noti, $n=10$, $\bar{x} = 9.28$, $s_u^2 = 0.1619^2$, $\alpha = 0.10$

$$\begin{cases} H_0: \mu = 10.5 \\ H_1: \mu < 10.5 \end{cases} \Rightarrow R_\alpha = \left\{ \underline{x} \in \mathcal{X}^n: \frac{\sqrt{n}(\bar{x} - \mu_0)}{s_u} < t_{n-1, \alpha} \right\}$$

$$\frac{\sqrt{10}(9.28 - 10.5)}{0.1619} = -23.82 < t_{9, 0.1} = -2.82 \Rightarrow \text{rifiuto } H_0$$

• Calcolare il p-value:



$$p\text{-value} = P(W(\underline{x}) < -23.82) \approx 0$$

quindi questo vuol dire che la probabilità di osservare un campione ancora più "addentrato" nella regione di rifiuto rispetto a quello da noi osservato è praticamente nulla $\Rightarrow$ il campione da noi osservato ci porta a rifiutare con grande "forza" l'ipotesi H_0 .

2) $f_X(x, \theta) = (\theta+2)x^{\theta+1}$

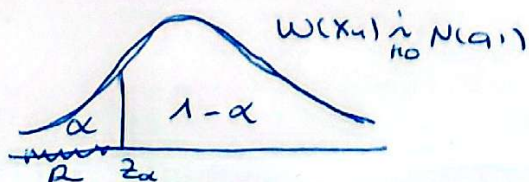
• ma la distribuzione asintotica di $\hat{\theta}_{MV} \sim N(\theta, cr(\theta))$

$$\begin{aligned} \ln(\theta) &= -m \mathbb{E} \left[\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \log f_X(x, \theta) \right] = -m \mathbb{E} \left[\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} [\log(\theta+2) + (\theta+1) \log x] \right] \\ &= -m \mathbb{E} \left[-\frac{1}{(\theta+2)^2} \right] = \frac{m}{(\theta+2)^2} \Rightarrow cr(\theta) = \ln''(\theta) = \frac{(\theta+2)^2}{m} \Rightarrow \hat{\theta}_{MV} \sim N\left(\theta, \frac{(\theta+2)^2}{n}\right) \end{aligned}$$

• Data $R = \{ \underline{x} \in \mathcal{X}^n: \hat{\theta}_{MV} < \kappa \}$ (test di Wald) si calcoli la regione specifica fissando l'ampiezza del test pari ad α . Dato il test $\begin{cases} H_0: \theta = \theta_0 \\ H_1: \theta < \theta_0 \end{cases}$

$$\begin{aligned} \alpha &= \sup_{\theta \in \Theta_0} \eta(\theta) = \eta(\theta_0) = P_{\theta_0}(R) = P_{\theta_0}(\hat{\theta}_{MV} < \kappa) = P_{\theta_0} \left(\frac{(\hat{\theta}_{MV} - \theta_0)\sqrt{n}}{(\theta_0+2)} < \frac{(\kappa - \theta_0)\sqrt{n}}{(\theta_0+2)} \right) = \alpha \\ &= \Phi \left(\frac{(\kappa - \theta_0)\sqrt{n}}{(\theta_0+2)} \right) = \alpha \Rightarrow \frac{(\kappa - \theta_0)\sqrt{n}}{(\theta_0+2)} = z_\alpha \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \kappa_\alpha = z_\alpha \frac{(\theta_0+2)}{\sqrt{n}} + \theta_0 \Rightarrow R_\alpha = \left\{ \underline{x} \in \mathcal{X}^n: \frac{(\hat{\theta}_{MV} - \theta_0)\sqrt{n}}{(\theta_0+2)} < z_\alpha \right\}$$



• Dato un campione con $n=144$ e $\bar{y}_{MV}=1.6$, $\alpha=0.05$, $\rho_0=1.5$
 eseguire il test $\Rightarrow \frac{(1.6-1.5)\sqrt{144}}{(1.5+2)} = 0.34 \not\leq Z_{\alpha} = Z_{0.05} = -1.64$
 $\rightarrow$ accetto H_0

3) In una città il consumo d'acqua giornaliero per abitante abbia distribuzione normale di media μ e varianza σ^2 ignoti. Per un campione di dimensione $n=20$ si è osservato $\bar{x}_n = 353.8$ galloni e $s_n = 21.85$ galloni. Verifico il rischio d'ipotesi per il test $\alpha=0.05$.

$$\begin{cases} H_0: \mu = 350 \\ H_1: \mu \neq 350 \end{cases}$$

$$R = \{x_n \in \mathcal{X} : |W(x_n)| > |t_{n-1, 1-\frac{\alpha}{2}}|\} \quad \text{con } W(x_n) = \frac{\sqrt{n}(\bar{x}_n - \mu_0)}{s_n} \stackrel{H_0}{\sim} t_{n-1}$$

$$t_{\text{osservato}} = \left| \frac{\sqrt{20}(353.8 - 350)}{21.85} \right| = 0.78 \quad ? \quad |t_{13, 0.975}| = 2.03 \Rightarrow \text{accetto } H_0$$

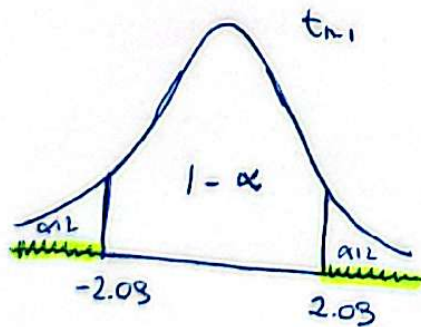
$\rightarrow$ NO

• Calcolare il p-value e si rappresenti graficamente

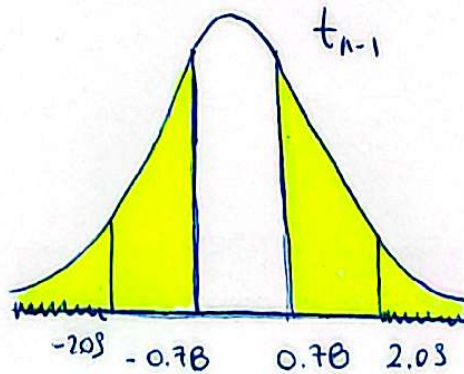
$$P = 2P[|t_{n-1}| > |t_{\text{oss}}|] = 2[1 - F_{t_{n-1}}(|t_{\text{oss}}|)] = 2[1 - F_{t_{13}}(0.78)] = 0.445$$

Si osserva che il p-value è elevato (i dati forniscono un'evidenza forte a favore di H_0)

Regione di rifiuto



p-value



4) $X_1, \dots, X_n$ iid $X_i | \theta \sim \text{Pois}(\theta)$ $E X = V X = \theta$

- determinare la distribuzione asintotica dello stimatore $\bar{X}_n$

$$\bar{X}_n \sim N(E\bar{X}_n, V\bar{X}_n) = N(EX, \frac{V(X)}{n}) = N(\theta, \frac{\theta}{n})$$

- utilizzarla per costruire $IC_{1-\alpha}$ per $\psi = e^{-\theta}$ (utilizzo il metodo delta)
osservando che $\hat{\theta}_{MV} = \bar{X}_n \Rightarrow \psi_{MV} = e^{-\hat{\theta}_{MV}}$ (per equivarianza)

$$= e^{-\bar{X}_n}$$

$$\psi_{MV} = e^{-\bar{X}_n} \sim N\left(e^{-\theta}, \frac{\psi'(\theta)^2}{n}\right)$$

$$\Rightarrow \psi'(\theta) = \frac{d}{d\theta} e^{-\theta} = -e^{-\theta}$$

$$\Rightarrow \psi_{MV} = e^{-\bar{X}_n} \sim N\left(\underbrace{e^{-\theta}}_{\psi}, \frac{e^{-2\theta}}{n}\right)$$

$$\hat{Q}(\bar{X}_n) = \frac{(\psi_{MV} - \psi) \sqrt{n}}{\sqrt{e^{-2\bar{X}_n} \bar{X}_n}} \sim N(0, 1)$$

ricavo l'intervallo $\tilde{IC}_{1-\alpha} = \left[g(\hat{\theta}_{MV}) \pm z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{g'(\theta)^2 \frac{1}{n}} \right]$

$$= \left[e^{-\bar{X}_n} \pm z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{e^{-2\bar{X}_n} \bar{X}_n}{n}} \right]$$

- Calcolare $\tilde{IC}_{1-\alpha}$ con $\alpha = 0.05$, $n = 100$ e $\bar{X}_n = 0.2$

$$\tilde{IC}_{1-\alpha} = \left[e^{-0.2} \pm 1.96 \sqrt{\frac{e^{-0.4} \cdot 0.2}{100}} \right] = [0.747, 0.830]$$

- In base al risultato precedente con formato due vie test $\begin{cases} H_0: \psi = 0.8 \\ H_1: \psi \neq 0.8 \end{cases}$
con $\alpha = 0.05$?

Poiché $0.8 \notin [0.747, 0.830] \rightarrow$ il valore 0.8 è compatibile
con i dati osservati $\Rightarrow$ accetto H_0 .

- Dato il test $\begin{cases} H_0: \theta \leq 1.8 \\ H_1: \theta > 1.8 \end{cases}$ e spendo di avere determinata la regione di rifiuto $R = \{x_n \in X: \sum x_i > 24\}$

Calcola la funzione di potenza esatta:

$$\begin{aligned} \pi(\theta) &= P_\theta[R] = P_\theta[\sum x_i > 24] = 1 - P_\theta[\sum x_i \leq 24] = 1 - P_\theta\left[\frac{\sum x_i}{n} \leq \frac{24}{n}\right] \\ &= 1 - P_\theta\left[\bar{X}_n \leq \underbrace{\left(\frac{24}{n}\right)}_{0.24}\right] = 1 - P_\theta\left[\underbrace{\frac{(\bar{X}_n - \theta)\sqrt{n}}{\sqrt{\theta}}}_{\sim N(0,1)} \leq \frac{(0.24 - \theta)\sqrt{n}}{\sqrt{\theta}}\right] \end{aligned}$$

$$= 1 - \Phi\left(\frac{(0.24 - \theta)\sqrt{n}}{\sqrt{\theta}}\right) = \Phi\left(\frac{\sqrt{n}(\theta - 0.24)}{\sqrt{\theta}}\right)$$

↳ proprietà di simmetria della normale $\Rightarrow$

$$1 - \Phi(x) = \Phi(-x)$$

- Calcola l'ampiezza α del test

$$\Rightarrow \alpha = P_{\theta_0}[R] = \Phi\left(\frac{\sqrt{n}(\theta_0 - 0.24)}{\sqrt{\theta_0}}\right) = \Phi\left(\frac{\sqrt{100}(1.8 - 0.24)}{\sqrt{1.8}}\right)$$

5) Un prodotto viene commercializzato con due confezioni diverse (A e B) e si assume che il ricavo delle vendite del prodotto con confezione $j = A, B$ segua un andamento normale di parametri (θ_j, σ^2) . Si sono raccolti 2 campioni indipendenti tra loro dei ricavi in 3 punti vendita

$$\Rightarrow (X_1^A, \dots, X_n^A) \quad \text{e} \quad (X_1^B, \dots, X_n^B)$$

$\Downarrow$

si è registrato $\bar{X}_{nA}^A = 1.22$

$\Downarrow$

si è registrato $\bar{X}_{nB}^B = 1.44$

• determina $IC_{1-\alpha}$ con $\alpha = 0.05$ per il parametro $\Delta = \theta_A - \theta_B$ assumendo $\sigma^2 = 0.16$ con si può concludere del risultato?

Osservando che $\bar{X}_{nA}^A \sim N(\theta_A, \sigma^2/m)$ e $\bar{X}_{nB}^B \sim N(\theta_B, \sigma^2/m)$

$$\bar{X}_{nA}^A - \bar{X}_{nB}^B \sim N(\mathbb{E}(\bar{X}_{nA}^A - \bar{X}_{nB}^B), V(\bar{X}_{nA}^A - \bar{X}_{nB}^B))$$

$\hookrightarrow$ combinazione lineare di variabili indipendenti
 $\Rightarrow$ è una normale

$$\mathbb{E}(\bar{X}_{nA}^A - \bar{X}_{nB}^B) = \mathbb{E}(\bar{X}_{nA}^A) - \mathbb{E}(\bar{X}_{nB}^B) = \theta_A - \theta_B = \Delta$$

$$V(\bar{X}_{nA}^A - \bar{X}_{nB}^B) = V(\bar{X}_{nA}^A) + V(\bar{X}_{nB}^B) = \frac{\sigma^2}{n} + \frac{\sigma^2}{n} = \frac{2\sigma^2}{n}$$

$\hookrightarrow$ no covarianza perché sono indipendenti

$$\text{Quindi } \bar{X}_{nA}^A - \bar{X}_{nB}^B \sim N(\Delta, \frac{2\sigma^2}{n})$$

$$Q(X_n) = \frac{(\bar{X}_{nA}^A - \bar{X}_{nB}^B) - \Delta}{\sigma \sqrt{2/n}} \sim N(0, 1)$$

$$\Rightarrow IC_{1-\alpha} = \left[\bar{X}_{nA}^A - \bar{X}_{nB}^B \pm z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sigma \sqrt{\frac{2}{n}} \right] = [-0.59, 0.15]$$

Cosa posso concludere? Poiché $0 \in (-0.59, 0.15) \Rightarrow$ nella base dei dati disponibili non possiamo escludere che $\Delta = \theta_A - \theta_B = 0$ ovvero che $\theta_A = \theta_B$
 $\hookrightarrow$ per il livello di significatività al 55%.

Non possiamo concludere dicendo che esista una differenza significativa tra θ_A e θ_B e che quindi non possiamo dire che il confezionamento determina una differenza statisticamente significativa nei ricavi.

• Si sottoponga a verifica il sistema $\begin{cases} H_0 : \Delta = 0 = \Delta_0 \\ H_0 : \Delta \neq 0 \neq \Delta_0 \end{cases}$ con $\alpha = 0.05$

Ho 2 modi per rispondere:

1°) Poiché $0 \in [-0.58, 0.157] \Rightarrow$ accetto H_0 (sto chiedendo gli stessi dati nel test e nell'intervallo e stesso valore di α)

2°) Siamo nel caso di ipotesi bilaterale con modello normale con quanto noto

$$\Rightarrow R = |W(\underline{x}_A, \underline{x}_B)| > |Z_{1-\frac{\alpha}{2}}| \quad \text{con } W(\underline{x}_A, \underline{x}_B) = \frac{(\bar{X}_{n_A}^1 - \bar{X}_{n_B}^2 - \Delta_0) \sqrt{n}}{\sigma \sqrt{2}}$$

$$\left| \frac{((1.22 - 1.44) - 0) \sqrt{9}}{\sqrt{0.16 \times 2}} \right| = 1.17 > 1.96$$

$\rightarrow$ No quindi ~~refuto~~ ^{Accetto} H_0