

Esercizio 1

a)

Per determinare gli esponenti è sufficiente notare che possiamo definire una combinazione di $\hbar, \omega, m$ con le dimensioni di un'energia — è semplicemente $\hbar\omega$ — ed una combinazione con le dimensioni di una lunghezza — $x_0 = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}$

Dato che $e^{-x^2/2x_0^2}$ è ADIMENSIONALE, $[\hbar^\alpha m^\beta \omega^\gamma]$ ha le dimensioni di una energia. Quindi

$$\hbar^\alpha m^\beta \omega^\gamma = \hbar\omega \quad \alpha=1, \beta=0, \gamma=1$$

Analogamente

$$V_2(x) = \underbrace{\hbar^\delta m^\eta \omega^\xi}_{\text{dimensioni energia}} x_0 \underbrace{\left[\frac{x}{x_0} e^{-x^2/2x_0^2} \right]}_{\text{adimensionale}}$$

$$\text{Quindi } \hbar^\delta m^\eta \omega^\xi x_0 = \hbar\omega$$

$$\hbar^\delta m^\eta \omega^\xi = \frac{\hbar\omega}{x_0} = \hbar\omega \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} = \hbar^{1/2} m^{1/2} \omega^{3/2}$$

$$\delta = \frac{1}{2}, \eta = \frac{1}{2}, \xi = \frac{3}{2}$$

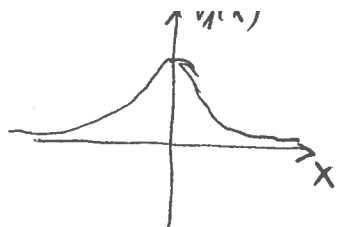
b)

Per capire la natura dello spettro è necessario studiare il comportamento del potenziali. Stati L_2 (discreti) sono possibili per quei valori di E per cui TUTTI i moti classici sono limitati.

Inoltre deve valere $E \geq V_{\min}$, dove $V_{\min}$ è il minimo del potenziale

TEO DI NON DEGENERAZIONE: STATI LEGATI SONO NON DEGENERI

H_1



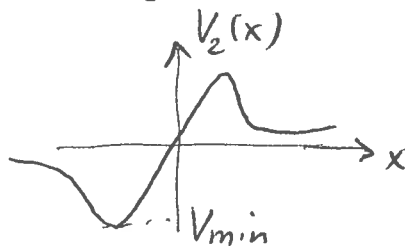
$V_{\min} = 0$, nessuna orbita limitata

Quindi: non vi sono autostati per $E \leq 0$

- per $E > 0$ spettro continuo, stati di diffusione (non in $L_2(\mathbb{R})$). La degenerazione è 2.

H_2

$$V_2(x) = \hbar\omega \frac{x}{x_0} e^{-x^2/2x_0^2}$$



Per calcolare $V_{\min}$ calcoliamo le soluzioni di $V_2'(x) = 0$

$$\begin{aligned} V_2'(x) &= \frac{\hbar\omega}{x_0} e^{-x^2/2x_0^2} + \frac{\hbar\omega x}{x_0} e^{-x^2/2x_0^2} \left(-\frac{x}{x_0^2}\right) \\ &= \frac{\hbar\omega}{x_0} e^{-x^2/2x_0^2} \left(1 - \frac{x^2}{x_0^2}\right) \quad V_2'(x) = 0 \Rightarrow x = \pm x_0 \end{aligned}$$

$$V_{\min} = V_2(-x_0) = -\hbar\omega e^{-1/2} = -\frac{\hbar\omega}{\sqrt{e}} < 0$$

Notiamo che orbite limitate esistono per $V_{\min} < E < 0$.

Quindi: non vi sono autostati per $E \leq V_{\min} = -\frac{\hbar\omega}{\sqrt{e}}$

• spettro discreto non degenerato con stati $L_2(\mathbb{R})$ (stati legati) per $V_{\min} < E \leq 0$

- spettro continuo, stati di diffusione (non in $L_2(\mathbb{R})$), degenerazione 2 per $E > 0$

H_3

$$V_3 = \frac{1}{2} m\omega^2 x^2 + \hbar\omega e^{-x^2/2x_0^2}$$

Per calcolare il minimo calcoliamo

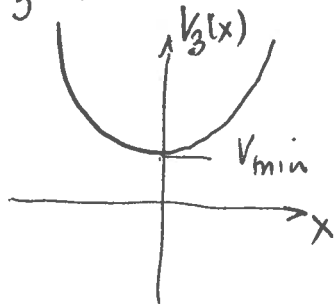
(3)

$$V_3'(x) = m\omega^2 x - \frac{\hbar\omega x}{x_0^2} e^{-x^2/x_0^2} \quad \frac{\hbar\omega}{x_0^2} = m\omega^2$$
$$= m\omega^2 x (1 - e^{-x^2/x_0^2})$$

Quindi

$$V_3'(x) = 0 \text{ se } \begin{cases} x = 0 \\ e^{-x^2/x_0^2} = 1 \end{cases} \Rightarrow x = 0$$

$V_3(x)$ ha un solo punto stazionario (minimo) in $x=0$



$$V_{\min} = V_3(0) = \hbar\omega$$

Tutte le orbite classiche sono limitate.

Quindi

- non vi sono autostati per $E \leq \hbar\omega$
- spettro discreto, non degenero con stati $L_2(\mathbb{R})$ (stati legati) per $E > \hbar\omega$

c)

Per $E=0$, il sistema è un oscillatore armonico.

Lo spettro è quindi $|n\rangle|\pm\rangle$, dove $|n\rangle$ è l'autofunzione del livello n dell'oscillatore e $|+\rangle, |-\rangle$ sono i due autostati dello spin. Ogni livello ha degenerazione 2.

Per calcolare l'effetto della perturbazione dobbiamo calcolare gli autovalori delle matrici della perturbazione

$$V = \begin{pmatrix} \langle 0|V_1|0\rangle & 0 \\ 0 & \langle 0|V_2|0\rangle \end{pmatrix}$$

dove abbiamo scelto la base $|0\rangle|+\rangle, |0\rangle|-\rangle$

La funzione d'onda dello stato fondamentale è (4)

$$\psi_0 = \pi^{-1/4} x_0^{-1/2} e^{-x^2/2x_0^2}$$

Quindi

$$\begin{aligned}\langle 0|V_1|0\rangle &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{x_0} \int_{-\infty}^{+\infty} dx \left(\hbar\omega e^{-x^2/2x_0^2} \right) e^{-x^2/x_0^2} \\ &= \frac{\hbar\omega}{\sqrt{\pi}x_0} \int_{-\infty}^{+\infty} dx e^{-\frac{3}{2} \frac{x^2}{x_0^2}} \quad y = \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{x}{x_0} \\ &= \frac{\hbar\omega}{\sqrt{\pi}x_0} x_0 \sqrt{\frac{2}{3}} \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} dy e^{-y^2}}_{\sqrt{\pi}} = \sqrt{\frac{2}{3}} \hbar\omega\end{aligned}$$

$$\langle 0|V_2|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{x_0} \int_{-\infty}^{+\infty} dx \underbrace{\left(\hbar\omega \frac{x}{x_0} e^{-x^2/2x_0^2} \right)}_{\text{dispari in } x} e^{-x^2/x_0^2} = 0$$

Quindi la matrice delle perturbazione è

$$\begin{pmatrix} \sqrt{\frac{2}{3}} \hbar\omega & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \lambda = \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{3}} \hbar\omega \\ 0 \end{cases}$$

Quindi lo stato fondamentale si separa in due livelli di energia

$$\frac{\hbar\omega}{2}, \quad \frac{\hbar\omega}{2} + \epsilon \sqrt{\frac{2}{3}} \hbar\omega$$

d)

Per calcolare i commutatori è utile scrivere $\psi(x)$ in termini dell'operatore di spin S_z .

Vi sono vari metodi per rispondere alla domanda

Metodo diretto

(5.1)

Per calcolare $[S_z, H]$ e $[S_x, H]$ notiamo che

$$[S_z, H] = \epsilon [S_z, V] \quad [S_x, H] = \epsilon [S_x, V]$$

Ora

$$[S_z, |+\rangle\langle+|] = S_z |+\rangle\langle+| - |+\rangle\langle+| S_z = 0$$

$$[S_z, |-\rangle\langle-|] = S_z |-\rangle\langle-| - |-\rangle\langle-| S_z = 0$$

$$\text{Quindi } [S_z, H] = \epsilon [S_z, V] = 0$$

$$\text{Nel caso di } S_x \text{ scriviamo } S_x = \frac{1}{2} (S_+ + S_-)$$

$$\begin{aligned} [S_x, V] &= \frac{1}{2} [S_+, V] + \frac{1}{2} [S_-, V] \\ &= \frac{1}{2} \left\{ V_1 S_+ |+\rangle\langle+| + V_2 S_+ |-\rangle\langle-| \right. \\ &\quad \left. - V_1 |+\rangle\langle+| S_+ - V_2 |-\rangle\langle-| S_+ \right\} + (\text{analogo con } S_-) \end{aligned}$$

Ovviamente $S_+ |+\rangle = S_- |-\rangle = 0$. Bisogna invece essere attenti nel calcolo di $\langle \pm | S_+$ e $\langle \pm | S_-$ dato che S_+ e S_- NON sono hermitiani.

$$\begin{aligned} \text{Per ogni } |\psi\rangle \quad \langle + | S_+ | \psi \rangle &= \\ (|+\rangle, S_+ | \psi \rangle) &= (S_+^\dagger |+\rangle, | \psi \rangle) \\ &= (S_- |+\rangle, | \psi \rangle) = \hbar (|-\rangle, | \psi \rangle) = \langle - | \psi \rangle \hbar \end{aligned}$$

$$\text{Quindi } \langle + | S_+ = \langle - | \hbar$$

$$\text{Analogamente } \langle - | S_- = \langle + | \hbar \text{ e}$$

$$\langle - | S_+ = 0 \quad \langle + | S_- = 0$$

Quindi

$$[S_x, V] = \frac{1}{2} (V_2 |+\rangle\langle-| - V_1 |+\rangle\langle-|) \hbar \quad \leftarrow (\text{da } S_+)$$

$$+ \frac{1}{2} (V_1 |-\rangle\langle+| - V_2 |-\rangle\langle+|) \hbar \quad \leftarrow (\text{da } S_-)$$

$$= \frac{\hbar}{2} (V_2 - V_1) (|+\rangle\langle-| - |-\rangle\langle+|)$$

Quindi

$$[S_x, H] = \frac{\epsilon \hbar}{2} (V_2 - V_1) (|+\rangle\langle -| - |-\rangle\langle +|)$$

In forma matriciale

$$|+\rangle\langle -| - |-\rangle\langle +| = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Quindi possiamo pure scrivere

$$[S_x, H] = \frac{\epsilon \hbar}{2} (V_2 - V_1) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Infine

$$[p, H] = [p, \frac{1}{2} m \omega^2 x^2] + [p, \epsilon V]$$

$$\text{Data che } [p, f(x)] = -i\hbar \frac{\partial f}{\partial x}$$

$$\begin{aligned} [p, H] &= -i\hbar m \omega^2 x + \epsilon |+\rangle\langle +| [p, V_1] + \epsilon |-\rangle\langle -| [p, V_2] \\ &= \left(m \omega^2 x + \epsilon |+\rangle\langle +| \frac{dV_1}{dx} + \epsilon |-\rangle\langle -| \frac{dV_2}{dx} \right) (-i\hbar) \end{aligned}$$

METODO FORMALE

È utile riscrivere $V(x)$ in termini dell'operatore S_z e dell'Identità nello spazio dello spin

Nelle basi $|+\rangle, |-\rangle$ (rappresentazione dello spin (53)
con S_z diagonale)

$$|+\rangle\langle+| = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad |-\rangle\langle-| = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ora $Id = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $S_z = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ per cui

$$Id + \frac{2S_z}{\hbar} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad Id - \frac{2S_z}{\hbar} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Segue

$$\begin{aligned} & V_1(x)|+\rangle\langle+| + V_2(x)|-\rangle\langle-| = \\ &= V_1(x) \frac{1}{2} \left(Id + \frac{2S_z}{\hbar} \right) + V_2(x) \frac{1}{2} \left(Id - \frac{2S_z}{\hbar} \right) \\ &= \frac{1}{2} (V_1(x) + V_2(x)) Id + \frac{S_z}{\hbar} (V_1(x) - V_2(x)) \end{aligned}$$

Sottintendendo, come usuale, l'operatore identità Id ,
abbiamo

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} m \omega^2 x^2 + \frac{\epsilon}{2} (V_1 + V_2) + \frac{\epsilon S_z}{\hbar} (V_1 - V_2)$$

Segue

$$[S_z, H] = 0$$

$$\begin{aligned} [S_x, H] &= [S_x, \frac{\epsilon S_z}{\hbar} (V_1 - V_2)] = [S_x, S_z] \frac{\epsilon}{\hbar} (V_1 - V_2) \\ &= i\hbar \epsilon_{132} S_y \frac{\epsilon}{\hbar} (V_1 - V_2) = -i S_y (V_1 - V_2) \epsilon \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [p, H] &= [p, \frac{1}{2} m \omega^2 x^2] + [p, \frac{\epsilon}{2} (V_1 + V_2)] + [p, \frac{\epsilon S_z}{\hbar} (V_1 - V_2)] \\ &= -i\hbar \left[m \omega^2 x + \frac{\epsilon}{2} \left(\frac{dV_1}{dx} + \frac{dV_2}{dx} \right) + \frac{\epsilon S_z}{\hbar} \left(\frac{dV_1}{dx} - \frac{dV_2}{dx} \right) \right] \end{aligned}$$

(abbiamo usato $[p, f(x)] = -i\hbar \frac{df}{dx}$)

Era possibile rispondere alla domanda, utilizzando la rappresentazione matriciale dello spin:

$$[S_z, H] = [S_z, V] = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \epsilon V_1 & 0 \\ 0 & \epsilon V_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \epsilon V_1 & 0 \\ 0 & \epsilon V_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \frac{\hbar}{2} = 0$$

$$\begin{aligned} [S_x, H] &= [S_x, V] = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \epsilon V_1 & 0 \\ 0 & \epsilon V_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \epsilon V_1 & 0 \\ 0 & \epsilon V_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \frac{\hbar}{2} \\ &= \frac{\epsilon \hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & V_2 \\ V_1 & 0 \end{pmatrix} - \frac{\epsilon \hbar}{2} \begin{pmatrix} V_1 & 0 \\ 0 & V_2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{\epsilon \hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & V_2 - V_1 \\ V_1 - V_2 & 0 \end{pmatrix} = \frac{\epsilon \hbar}{2} (V_1 - V_2) \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

che coincide con il risultato precedente dato che

$$-i S_y = -i \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Infine

$$\begin{aligned} \cancel{[p, H]} [p, V] &= \epsilon [p, V_1] |+\rangle \langle +| + \epsilon [p, V_2] |-\rangle \langle -| \\ &= -i\hbar \epsilon \frac{dV_1}{dx} |+\rangle \langle +| - i\hbar \epsilon \frac{dV_2}{dx} |-\rangle \langle -| \end{aligned}$$

che si può
pure scrivere
come

$$\left. \begin{array}{l} \text{che si può} \\ \text{pure scrivere} \\ \text{come} \end{array} \right\} \rightarrow -i\hbar \epsilon \begin{pmatrix} \frac{dV_1}{dx} & 0 \\ 0 & \frac{dV_2}{dx} \end{pmatrix}$$

Quindi

$$[p, H] = -i\hbar \left[m\omega^2 x + \epsilon \frac{dV_1}{dx} |+\rangle \langle +| + \epsilon \frac{dV_2}{dx} |-\rangle \langle -| \right]$$

Prendiamo una base formata da autofunzioni di L_{1z}, L_{2z}, S_1, S_2 con $\bar{S} = \bar{S}_1 + \bar{S}_2 : |m_1\rangle_1 |m_2\rangle_2 |S S_z\rangle$

Qui $m_i \in \mathbb{Z}$ (tutti gli interi positivi e negativi, 0 incluso)

Dato che le due particelle hanno spin 1, S può assumere i valori 0, 1, 2.

Per particelle non identiche la base considerata è una base di autofunzioni di H

$$H |m_1\rangle_1 |m_2\rangle_2 |S S_z\rangle = E |m_1\rangle_1 |m_2\rangle_2 |S S_z\rangle$$

$$E = \hbar^2 a (m_1^2 + m_2^2) - \gamma S_z$$

Per determinare funzioni compatibili con il principio di Pauli, definiamo una base spaziale di autofunzioni dell'operatore di scambio

$|m m\rangle_S = |m\rangle_1 |m\rangle_2$ (stato con $m_1 = m_2$) è simmetrico

Gli stati $|m_1\rangle_1 |m_2\rangle_2$ e $|m_2\rangle_1 |m_1\rangle_2$ non sono autostati dell'op. di scambio. Definiamo ($m_1 \neq m_2$)

$$|m_1 m_2\rangle_S = \frac{1}{\sqrt{2}} (|m_1\rangle_1 |m_2\rangle_2 + |m_2\rangle_1 |m_1\rangle_2) \quad \text{simmetrica}$$

$$|m_1 m_2\rangle_A = \frac{1}{\sqrt{2}} (|m_1\rangle_1 |m_2\rangle_2 - |m_2\rangle_1 |m_1\rangle_2) \quad \text{antisimmetrica}$$

Qui abbiamo ordinato m_1, m_2 in modo che $\underline{m_1 > m_2}$

Ora

• $|00\rangle$ e $|2 S_z\rangle$ sono simmetrici sotto scambio

• $|1 S_z\rangle$ è antisimmetrico sotto scambio

• La funzione d'onda totale (spazio + spin) deve essere SIMMETRICA (Pauli)

Quindi sono accettabili solo

(7)

$$|m_1 m_2\rangle_S |00\rangle$$

$$m_1 \geq m_2$$

$$|m_1 m_2\rangle_S |2 S_2\rangle$$

$$m_1 \geq m_2$$

$$-2, -1, 0, 1, 2 = S_2$$

$$|m_1 m_2\rangle_A |1 S_2\rangle$$

$$m_1 > m_2$$

$$S_2 = -1, 0, 1$$

Quindi per ogni coppia (m_1, m_2) con $m_1 \geq m_2$, $m_1, m_2 \in \mathbb{Z}$, vi sono stati compatibili con il principio di Pauli. Lo spettro è quindi

$$E = a\hbar^2(m_1^2 + m_2^2) - \gamma\hbar S_2 \stackrel{\gamma=0}{=} a\hbar^2(m_1^2 + m_2^2)$$

Notiamo anche che per ogni m_1, m_2 vi è uno stato che ha spin 2. Quindi ogni livello presente per $\gamma=0$ si separa in 5 sottolivelli (corrispondenti a $S_2 = -2, -1, 0, 1, 2$) quando $\gamma \neq 0$.

Perciò per calcolare i primi 10 livelli di H è sufficiente considerare i due livelli più bassi presenti per $\gamma=0$.

Dato che $E = \hbar^2 a(m_1^2 + m_2^2)$, $m_1 \geq m_2$ i livelli più bassi corrispondono a

fond. $m_1 = m_2 = 0$

I ecc. $\begin{cases} m_1 = +1 & m_2 = 0 \\ m_1 = 0 & m_2 = -1 \end{cases}$

Per $\gamma \neq 0$ lo stato fondamentale si separa in

$$|00\rangle_S |2-2\rangle$$

$$|00\rangle_S |2-1\rangle, |00\rangle_S |20\rangle$$

$$|00\rangle_S |20\rangle, |00\rangle_S |00\rangle$$

$$|00\rangle_S |21\rangle$$

$$|00\rangle_S |22\rangle$$

$$E = 2\hbar\gamma \quad \text{non deg.}$$

$$E = \hbar\gamma \quad \text{non deg.}$$

$$E = 0 \quad \text{deg} = 2$$

$$E = -\hbar\gamma \quad \text{non deg.}$$

$$E = -2\hbar\gamma \quad \text{non deg.}$$

Per il I ecc gli stati possibili sono

⑥

$$\begin{array}{ll} |10\rangle_S |2S_2\rangle & |0-1\rangle_S |2S_2\rangle \\ |10\rangle_A |1S_2\rangle & |0-1\rangle_A |1S_2\rangle \\ |10\rangle_S |00\rangle & |0-1\rangle_A |00\rangle \end{array}$$

Quindi

$$E = \hbar^2 a + 2\hbar\gamma \quad |10\rangle_S |22\rangle, |0-1\rangle_S |22\rangle \quad \text{deg} = 2$$

$$E = \hbar^2 a + \hbar\gamma \quad \begin{cases} |10\rangle_S |21\rangle, |0-1\rangle_S |21\rangle \\ |10\rangle_A |11\rangle, |0-1\rangle_A |11\rangle \end{cases} \quad \text{deg} = 4$$

$$E = \hbar^2 a \quad \begin{cases} |10\rangle_S |20\rangle, |0-1\rangle_S |20\rangle \\ |10\rangle_A |10\rangle, |0-1\rangle_S |10\rangle \\ |10\rangle_S |00\rangle, |0-1\rangle_S |00\rangle \end{cases} \quad \text{deg} = 6$$

$$E = \hbar^2 a + \hbar\gamma \quad \begin{cases} |10\rangle_S |2-1\rangle, |0-1\rangle_S |2-1\rangle \\ |10\rangle_A |1-1\rangle, |0-1\rangle_A |1-1\rangle \end{cases} \quad \text{deg} = 4$$

$$E = \hbar^2 a + 2\hbar\gamma \quad |10\rangle_S |2-2\rangle, |0-1\rangle_S |2-2\rangle \quad \text{deg} = 2$$

b)

Dato che $S_2 = -1$, lo stato ψ ha spin $S = 1$. Quindi la funzione d'onda spaziale deve essere antisimmetrica ~~ossia deve essere $|m_1 m_2\rangle_A$~~ Consideriamo come base le autofunzioni di H . Soddisfanno i) e iii) ed il principio di Pauli gli stati $|m_1 m_2\rangle_A |1-1\rangle$. Ora

$$(L_{12} + L_{22}) |m_1 m_2\rangle_A |1-1\rangle = \hbar(m_1 + m_2) |m_1 m_2\rangle_A |1-1\rangle$$

$$\text{Quindi } m_1 + m_2 = -1, \quad m_2 = -1 - m_1$$

Quindi gli stati rilevanti sono

$$|m \quad -1-m\rangle |1-1\rangle$$

$$\text{La condizione } m_1 > m_2 \Rightarrow m > -1 - m \Rightarrow 2m > -1, \quad m \geq 0.$$

Quindi
$$\psi = \sum_{m=0}^{\infty} C_m \overbrace{|m \ -1 \ -m\rangle}^{\text{autostato con } E_m = \hbar a [m(m+1)] + \hbar \gamma} |1 \ -1\rangle \quad (\sum |C_m|^2 = 1)$$

$$\langle \psi | H | \psi \rangle = \sum_{m=0}^{\infty} |C_m|^2 E_m$$

Il valore minimo (consistente con $\sum |C_m|^2 = 1$) si ottiene prendendo $C_0 = 1$, $C_m = 0$ per $m \geq 1$, ossia prendendo come stato ψ quello di energia più bassa tra tutti quelli compatibili con i), ii), iii).

Quindi
$$|\psi\rangle = \overset{m_1 \ m_2}{|0 \ -1\rangle}_A \overset{S \ S_z}{|1 \ -1\rangle}$$

c) Scriviamo $H = H_0 - \gamma S_x$ $H_0 = a(L_{1z}^2 + L_{2z}^2)$ (parte spaziale)

$$\langle \psi(t) | S_z | \psi(t) \rangle = \langle \psi | e^{iHt/\hbar} S_z e^{-iHt/\hbar} | \psi \rangle$$

Ora

$$\left. \begin{aligned} e^{iHt/\hbar} &= e^{iH_0 t/\hbar} e^{-i\gamma S_x t/\hbar} \\ e^{iH_0 t/\hbar} S_z e^{-iH_0 t/\hbar} &= S_z \end{aligned} \right\} \text{dato che } [S_x, H_0] = 0$$

Quindi

$$\begin{aligned} \langle \psi(t) | S_z | \psi(t) \rangle &= \langle \psi | e^{-i\gamma S_x t/\hbar} S_z e^{i\gamma S_x t/\hbar} | \psi \rangle \\ &= \langle 1 \ -1 | e^{-i\gamma S_x t/\hbar} S_z e^{i\gamma S_x t/\hbar} | 1 \ -1 \rangle \end{aligned}$$

Si tratta quindi di risolvere il problema nello spazio dello spin

Per risolvere il problema si può ragionare in vari modi

METODO DELLE ROTAZIONI

Se $\theta = \gamma t$, vogliamo calcolare

$$e^{-i\theta S_x/\hbar} S_z e^{i\theta S_x/\hbar} = F(\theta)$$

Ora $e^{i\theta S_x/\hbar}$ è l'operatore di rotazione di un angolo θ intorno all'asse x . Se $\theta \ll 1$ (infinitesimo)

$$F(\theta) \approx (1 - i\theta S_x/\hbar) S_z (1 + i\theta S_x/\hbar) + O(\theta^2)$$

$$= S_z - \frac{i\theta}{\hbar} [S_x, S_z] + O(\theta^2)$$

$$= S_z - \frac{i\theta}{\hbar} i\hbar (-S_y) = S_z - \theta S_y$$

Per θ non infinitesimo vale

$$F(\theta) = \cos \theta S_z - \sin \theta S_y$$

Quindi

$$\begin{aligned} \langle \psi(t) | S_z | \psi(t) \rangle &= \cos \gamma t \langle \psi | S_z | \psi \rangle \\ &\quad - \sin \gamma t \langle \psi | S_y | \psi \rangle \end{aligned}$$

$$\text{Ora } \langle \psi | S_y | \psi \rangle = \langle 1-1 | \frac{1}{2i} (S_+ - S_-) | 1-1 \rangle = 0$$

$$\langle \psi | S_z | \psi \rangle = \langle 1-1 | S_z | 1-1 \rangle = -\hbar$$

Segue

$$\langle \psi(t) | S_z | \psi(t) \rangle = -\hbar \cos \gamma t$$

CON LE EQUAZIONI DEL MOTO DI HEISENBERG

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} F(t) &= -\frac{i}{\hbar} e^{-i\gamma S_x t/\hbar} [S_x, S_z] e^{i\gamma S_x t/\hbar} \\ &= -i \frac{\gamma}{\hbar} e^{-i\gamma S_x t/\hbar} (-i\hbar S_y) e^{i\gamma S_x t/\hbar} \end{aligned}$$

$$= -\gamma e^{-i\gamma S_x t/\hbar} S_y e^{i\gamma S_x t/\hbar}$$

(11)

Se definiamo $G(\gamma t) = e^{-i\gamma S_x t/\hbar} S_y e^{i\gamma S_x t/\hbar}$

$$\frac{d}{dt} F(\gamma t) = -\gamma G(\gamma t)$$

Si ha poi

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} G(\gamma t) &= -\frac{i\gamma}{\hbar} e^{-i\gamma S_x t/\hbar} [S_x, S_y] e^{i\gamma S_x t/\hbar} \\ &= \gamma e^{-i\gamma S_x t/\hbar} S_z e^{i\gamma S_x t/\hbar} = \gamma F(\gamma t) \end{aligned}$$

Quindi

$$\frac{d^2}{dt^2} F(\gamma t) = -\gamma \frac{dG(\gamma t)}{dt} = -\gamma^2 F(\gamma t)$$

$$\begin{cases} F(\gamma t) = A \cos \gamma t + B \sin \gamma t \\ G(\gamma t) = -\frac{1}{\gamma} F(\gamma t) = A \sin \gamma t - B \cos \gamma t \end{cases}$$

Dato che $F(0) = S_z = A$ e $G(0) = S_y = -B$

$$F(\gamma t) = S_z \cos \gamma t - S_y \sin \gamma t \quad \left[\begin{array}{l} \text{Abbiamo, de facto,} \\ \text{ridimostro la relazione} \\ \text{per le rotazioni} \end{array} \right]$$

Come prima $\langle \psi(t) | S_z | \psi(t) \rangle = -\hbar \cos \gamma t$

METODO DIRETTO

Utilizziamo le autofunzioni di S_x nella base delle autofunzioni di S_z : $\{|1\rangle_z, |0\rangle_z, |-1\rangle_z\}$

[calcolo in fondo]

$$|1\rangle_x = \frac{1}{2} |1\rangle_z + \frac{\sqrt{2}}{2} |0\rangle_z + \frac{1}{2} |-1\rangle_z$$

$$|0\rangle_x = \frac{1}{\sqrt{2}} |1\rangle_z - \frac{1}{\sqrt{2}} |-1\rangle_z$$

$$|-1\rangle_x = -\frac{1}{2} |1\rangle_z + \frac{\sqrt{2}}{2} |0\rangle_z - \frac{1}{2} |-1\rangle_z$$

Lo stato al tempo $t=0$ è $|1\rangle_z$

$$\begin{aligned} |1\rangle_z &= |1\rangle_x \langle 1|1\rangle_z + |0\rangle_x \langle 0|1\rangle_z + |-1\rangle_x \langle -1|1\rangle_z \\ &= \frac{1}{2} |1\rangle_x - \frac{1}{\sqrt{2}} |0\rangle_x - \frac{1}{2} |-1\rangle_x \end{aligned}$$

$$e^{i\gamma S_x/\hbar t} |1\rangle_z =$$

$$= \frac{1}{2} e^{i\gamma t} |1\rangle_x - \frac{1}{\sqrt{2}} |0\rangle_x - \frac{1}{2} e^{-i\gamma t} |-1\rangle_x = \textcircled{A}$$

Ora

$$\begin{aligned} S_z |1\rangle_x &= \frac{\hbar}{2} |1\rangle_z + \frac{\hbar}{2} |-1\rangle_z = \frac{\hbar}{\sqrt{2}} \left[\frac{1}{\sqrt{2}} |1\rangle_z - \frac{1}{\sqrt{2}} |-1\rangle_z \right] \\ &= \frac{\hbar}{\sqrt{2}} |0\rangle_x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_z |0\rangle_x &= \frac{\hbar}{\sqrt{2}} |1\rangle_z + \frac{\hbar}{\sqrt{2}} |-1\rangle_z \\ &= \frac{\hbar}{\sqrt{2}} (|1\rangle_z + |-1\rangle_z) = \frac{\hbar}{\sqrt{2}} (|1\rangle_x - |-1\rangle_x) \end{aligned}$$

$$S_z |-1\rangle_x = -\frac{\hbar}{2} |1\rangle_z + \frac{\hbar}{2} |-1\rangle_z = -\frac{\hbar}{\sqrt{2}} |0\rangle_x$$

Quindi

$$\begin{aligned} S_z e^{i\gamma S_x/\hbar t} |1\rangle_z &= \\ &= \frac{\hbar}{\sqrt{2}} \left[\frac{1}{2} e^{i\gamma t} |0\rangle_x - \frac{1}{\sqrt{2}} |1\rangle_x + \frac{1}{\sqrt{2}} |-1\rangle_x + \frac{1}{2} e^{-i\gamma t} |0\rangle_x \right] \\ &= \frac{\hbar}{\sqrt{2}} \left[\frac{1}{\sqrt{2}} |1\rangle_x + \cos \gamma t |0\rangle_x + \frac{1}{\sqrt{2}} |-1\rangle_x \right] = \textcircled{B} \end{aligned}$$

Il risultato è il prodotto scalare di $\textcircled{A}$ e $\textcircled{B}$

$$\begin{aligned} \langle \psi t | S_z | \psi t \rangle &= \frac{\hbar}{\sqrt{2}} \left[-\frac{1}{2\sqrt{2}} e^{-i\gamma t} - \frac{1}{\sqrt{2}} \cos \gamma t - \frac{1}{2\sqrt{2}} e^{i\gamma t} \right] \\ &= \frac{\hbar}{\sqrt{2}} \left[-\frac{1}{\sqrt{2}} \cos \gamma t - \frac{1}{\sqrt{2}} \cos \gamma t \right] = -\hbar \cos \gamma t \end{aligned}$$

Calcolo degli autostati di S_x [per $S=1$]

(13)

Per determinare le matrici associate a S_x abbiamo che

$$S_+ = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2}\hbar & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2}\hbar \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$S_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{2}\hbar & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2}\hbar & 0 \end{pmatrix}$$

$$S_x = \hbar \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2}/2 & 0 \\ \sqrt{2}/2 & 0 & \sqrt{2}/2 \\ 0 & \sqrt{2}/2 & 0 \end{pmatrix}$$

Base: $\{|1\rangle_z, |0\rangle_z, |-1\rangle_z\}$

Gli autovalori sono (OVVIAMENTE), $0, \pm\hbar$.

AUTOVETTORE CON AUTOVALORE $+\hbar$

$$\begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2}/2 & 0 \\ \sqrt{2}/2 & 0 & \sqrt{2}/2 \\ 0 & \sqrt{2}/2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \frac{\sqrt{2}}{2} b = a \\ \frac{\sqrt{2}}{2} (a+c) = b \\ \frac{\sqrt{2}}{2} b = c \end{cases} \rightarrow v = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} b, b, \frac{\sqrt{2}}{2} b \right)$$

NORM: $\langle v|v \rangle = \frac{1}{2} |b|^2 + |b|^2 + \frac{1}{2} |b|^2 = 2|b|^2$

Scegliamo $b = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$$|+1\rangle_x = \frac{1}{2} |1\rangle_z + \frac{1}{\sqrt{2}} |0\rangle_z + \frac{1}{2} |-1\rangle_z$$

AUTOVETTORE CON AUTOVALORE -1

Come prima con un segno "-"

$$\begin{cases} \frac{\sqrt{2}}{2}b = -a \\ \frac{\sqrt{2}}{2}(a+c) = -b \\ \frac{\sqrt{2}}{2}b = -c \end{cases}$$

$$v = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}b, b, -\frac{\sqrt{2}}{2}b \right)$$

$$\langle v|v \rangle = 2|b|^2$$

Scegliamo $b = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$$|-1\rangle_x = -\frac{1}{2}|1\rangle_z + \frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle_z - \frac{1}{2}|-1\rangle_z$$

AUTOVETTORE CON AUTOVALORE NULLO

$$\begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2}/2 & 0 \\ \sqrt{2}/2 & 0 & \sqrt{2}/2 \\ 0 & \sqrt{2}/2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = 0 \quad \begin{cases} \frac{\sqrt{2}}{2}b = 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2}(a+c) = 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2}b = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} a = -c \\ b = 0 \end{cases}$$

$$v = (a, 0, -a) \quad \langle v|v \rangle = |a|^2 + |a|^2 = 2|a|^2$$

Scegliamo $a = 1/\sqrt{2}$

$$|0\rangle_x = \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle_z - \frac{1}{\sqrt{2}}|-1\rangle_z$$