

## Esame di Meccanica Quantistica 14/05/2025

**Esercizio 1.** Si consideri una particella di massa  $m$  e spin 0 vincolata a muoversi in una dimensione. Si considerino le seguenti Hamiltoniane:

$$\begin{aligned}\hat{H}_0 &= \frac{\hat{p}^2}{2m} + V_0(\hat{x}), & V_0(\hat{x}) &= \frac{1}{2}m\omega^2\hat{x}^2 \\ \hat{H}_1 &= \frac{\hat{p}^2}{2m} + V_1(\hat{x}), & V_1(\hat{x}) &= \hbar^\alpha m^\beta \omega^\gamma e^{-\frac{\hat{x}^2}{2x_0^2}} \\ \hat{H}_2 &= \frac{\hat{p}^2}{2m} + V_2(\hat{x}), & V_2(\hat{x}) &= \hbar^\delta m^\eta \omega^\xi \hat{x} e^{-\frac{\hat{x}^2}{2x_0^2}} \\ \hat{H}_3 &= \hat{H}_0 + V_1(\hat{x})\end{aligned}$$

con  $x_0 = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}$ .

a) Determinare  $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \eta$  e  $\xi$ .

b) Studiare qualitativamente lo spettro degli operatori  $\hat{H}_1$ ,  $\hat{H}_2$  e  $\hat{H}_3$  indicando gli intervalli di energia dove lo spettro è continuo o discreto, la degenerazione degli autovalori e la natura delle autofunzioni (se esse corrispondano a stati di scattering o a stati legati).

Si consideri ora una particella di spin 1/2 la cui Hamiltoniana è la seguente:

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \epsilon \hat{V}(\hat{x}), \quad V(\hat{x}) = V_1(\hat{x})|+\rangle\langle+| + V_2(\hat{x})|-\rangle\langle-|$$

con  $0 < \epsilon \ll 1$  e  $\hat{S}_z|\pm\rangle = \pm\frac{\hbar}{2}|\pm\rangle$ .

c) Si calcoli la correzione al livello fondamentale al primo ordine in  $\epsilon$ .

d) Si calcolino i commutatori  $[\hat{S}_z, \hat{H}]$ ,  $[\hat{S}_x, \hat{H}]$  e  $[\hat{p}, \hat{H}]$ .

**Esercizio 2.** Due particelle identiche di spin 1 sono confinate su un cerchio di raggio  $R$  che giace nel piano  $xy$  ed è centrato nell'origine. La Hamiltoniana del sistema è

$$H = a(L_{1z}^2 + L_{2z}^2) - \gamma S_z,$$

dove  $S_z$  è la componente  $z$  dello spin totale  $\mathbf{S} = \mathbf{S}_1 + \mathbf{S}_2$ . Si supponga  $a, \gamma > 0$ .

a) Si ricavi lo spettro (senza degenerazioni) di  $H$  per  $\gamma = 0$ . Si ricavi quindi l'energia e la degenerazione dei primi 10 livelli di  $H$  per  $0 < \gamma \ll a$ .

b) Si determini lo stato  $|\Psi\rangle$  delle due particelle tale che: i) è autostato di  $S_z$  con autovalore  $-\hbar$ ; ii) è autostato di  $L_{1z} + L_{2z}$  con autovalore  $-\hbar$ ; iii) è autostato di  $S^2$ ; il corrispondente autovalore è il più piccolo possibile tra quelli coerenti con la condizione i). iv) Tra tutti gli stati che soddisfano a i), ii), iii), lo stato  $|\Psi\rangle$  è quello per cui  $\langle\Psi|H|\Psi\rangle$  assume il valore più piccolo possibile.

c) Al tempo  $t = 0$  la Hamiltoniana diventa

$$H = a(L_{1z}^2 + L_{2z}^2) - \gamma S_x$$

Se  $|\Psi(t=0)\rangle = |\Psi\rangle$ , dove  $|\Psi\rangle$  è lo stato determinato al punto b), si calcoli  $\langle\Psi(t)|S_z|\Psi(t)\rangle$ .