

ESERUTAZIONE 7

1) $X_n = (X_1, \dots, X_n)$ campione casuale $X_i | \theta \sim N(0, \theta)$ con $i = 1, \dots, n$

a) Verifico se $S_0^2 = \sum_{i=1}^n X_i^2 / n$ è un distratto per θ

b) Determina $IC_{1-\alpha}(X_n)$ di θ in funzione di S_0^2

c) Dato campione $n=15$ si è osservato $S_0^2 = 3.23^2$ determina $IC_{1-\alpha}$ per θ di livello al 95%.

a) $E[S_0^2] = E\left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2\right] = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E[X_i^2] = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \theta = \theta \quad \forall \theta \in \Theta \Rightarrow \text{NO per } \theta$

$\rightarrow E[X^2] = V[X] + E[X]^2 = \theta + 0^2 = \theta$

b) $N(0, \theta) \Rightarrow$ inferenza sulla varianza della Normale (con modello inferenziale su varianza e valore atteso noto = 0)

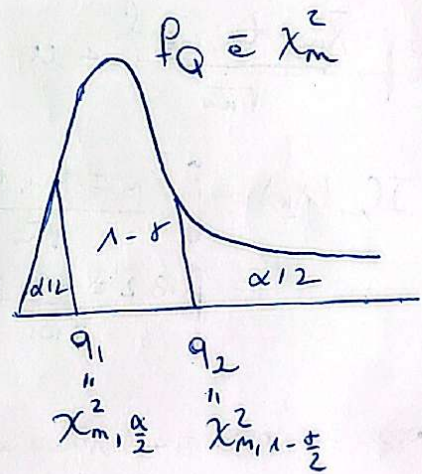
stima quantità pivotale $Q(X_n, \theta) = \frac{n S_0^2}{\theta} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i^2}{\theta} \sim \chi_m^2$

$P[q_1 \leq Q(X_n, \theta) \leq q_2] = 1 - \alpha = P[q_1 \leq \frac{n S_0^2}{\theta} \leq q_2] = P\left[\frac{1}{q_2} \leq \frac{\theta}{n S_0^2} \leq \frac{1}{q_1}\right]$

$= P\left[\frac{n S_0^2}{q_2} \leq \theta \leq \frac{n S_0^2}{q_1}\right] = P[U(X_n) \leq \theta \leq V(X_n)] = 1 - \alpha$

devo scegliere $[q_1, q_2]$ = intervallo pivotale $\Rightarrow$ prendo quello a code uguali

$IC_{1-\alpha}(X_n) = \left[\frac{n S_0^2}{\chi_{m, 1-\frac{\alpha}{2}}^2}, \frac{n S_0^2}{\chi_{m, \frac{\alpha}{2}}^2} \right]$ = intervallo di confidenza di livello $1-\alpha$



c) $IC_{1-\alpha}(X_n) = \left[\frac{5 \times 3.23^2}{\chi_{15, 1-\frac{\alpha}{2}}^2}, \frac{5 \times 3.23^2}{\chi_{15, \frac{\alpha}{2}}^2} \right] = \left[\frac{156.43}{27.49}, \frac{156.43}{6.26} \right]$

$= [5.69, 24.99]$

utilizzo le tabelle dello $\chi_{n=15}^2$ prendo da

$1 - \alpha = 0.95 \rightarrow \alpha = 0.05$

$\chi_{15, 0.975}^2 = \dots, \chi_{15, 0.025}^2 = \dots$

percentile di livello
 $1 - 0.975 = 0.025$

percentile di livello
 $1 - 0.025 = 0.975$

2) In una fabbrica di alimenti si vuole determinare il valore medio di "grasso totale" in una confezione di patatine. Si analizzano $n=101$ confezioni e si ottengono i seguenti risultati: $\bar{x}_n = 18.2$ grammi $s_n^2 = 0.56^2 \text{ g}^2$. Si assume che le osservazioni abbiano i valori osservati di un campione casuale da una popolazione normale di media μ e varianza σ^2 entrambe sconosciute. Determinare:

a) IC_{90%} per μ (quindi $1-\alpha=0.90 \rightarrow \alpha=0.10$)

b) IC_{90%} per σ^2

$X_i | \mu, \sigma^2 \sim N(\mu, \sigma^2)$ ← entrambe sconosciute

ma non conosco la varianza

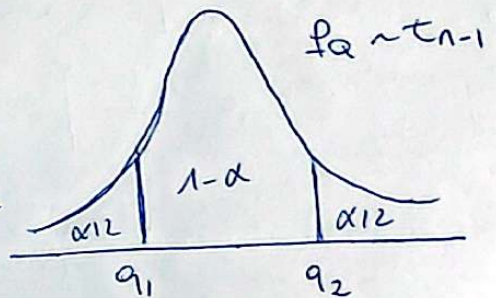
a) Voglio fare inferenza sul valore atteso (μ) $\Rightarrow$ utilizzo come quantili puntuali

$$Q(\bar{x}_n, \mu) = \frac{(\bar{x}_n - \mu) \sqrt{n}}{s_n} \sim t_{n-1}$$

$$P\left[q_1 \leq \frac{(\bar{x}_n - \mu) \sqrt{n}}{s_n} \leq q_2\right] = 1 - \alpha = P\left[\frac{q_1 s_n}{\sqrt{n}} \leq \bar{x}_n - \mu \leq \frac{q_2 s_n}{\sqrt{n}}\right]$$

$$= P\left[\frac{\bar{x}_n - q_2 s_n}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \frac{\bar{x}_n - q_1 s_n}{\sqrt{n}}\right]$$

$$= P\left[\frac{\bar{x}_n - t_{n-1, 1-\frac{\alpha}{2}} s_n}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \frac{\bar{x}_n + t_{n-1, 1-\frac{\alpha}{2}} s_n}{\sqrt{n}}\right] = 1 - \alpha$$



$$\Rightarrow IC_{1-\alpha}(\bar{x}_n) = \left[\frac{\bar{x}_n \pm t_{n-1, 1-\frac{\alpha}{2}} s_n}{\sqrt{n}} \right]$$

$$= \left[\frac{18.2 \pm 1.66 \times 0.56}{\sqrt{101}} \right]$$

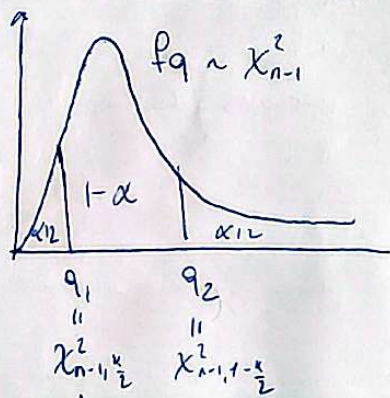
$t_{n-1, 1-\frac{\alpha}{2}} = t_{100, 1-0.05} = t_{100, 0.95}$
 percentile di livello $1-0.05 = 0.95$
 $= 0.05$

$t_{n-1, \frac{\alpha}{2}} = t_{100, 0.05}$
 $= -t_{n-1, 1-\frac{\alpha}{2}}$ (per la simmetria della distribuzione - T di Student)

b) Voglio fare inferenza sulla varianza (σ^2) ma non conosco il valore atteso $\Rightarrow$

$$Q(\bar{x}_n, \sigma^2) = \frac{(n-1) s_n^2}{\sigma^2} \sim \chi_{n-1}^2 \Rightarrow P\left[q_1 \leq \frac{(n-1) s_n^2}{\sigma^2} \leq q_2\right] = 1 - \alpha =$$

$$= P\left[\frac{1}{q_2} \leq \frac{\sigma^2}{(n-1) s_n^2} \leq \frac{1}{q_1}\right] = P\left[\frac{(n-1) s_n^2}{q_2} \leq \sigma^2 \leq \frac{(n-1) s_n^2}{q_1}\right] =$$



$$= P\left[\frac{(n-1) s_n^2}{\chi_{n-1, 1-\frac{\alpha}{2}}^2} \leq \sigma^2 \leq \frac{(n-1) s_n^2}{\chi_{n-1, \frac{\alpha}{2}}^2}\right] = 1 - \alpha$$

$$\hookrightarrow IC_{1-\alpha}(\bar{x}_n) = \left[\frac{(n-1) s_n^2}{\chi_{n-1, 1-\frac{\alpha}{2}}^2} ; \frac{(n-1) s_n^2}{\chi_{n-1, \frac{\alpha}{2}}^2} \right] = \left[\frac{100 \times 0.56^2}{124.3} ; \frac{100 \times 0.56^2}{77.9} \right]$$

$\chi_{100, 0.95}^2$ $\chi_{100, 0.05}^2$

3) $X_i | \theta \sim f_X(x_i, \theta)$ iid $i=1, \dots, m$ $f_X(x, \theta) = \frac{x^2}{2\theta^3} e^{-x/\theta}$ $x \geq 0, \theta > 0$

1) Determina la quantità puntuale statistica $\tilde{Q}(X_n, \theta)$ e l'intervallo di confidenza puntuale $\tilde{IC}$ per θ di livello $1-\alpha$

2) Utilizzo la proprietà di Normalità puntuale dello stuv $\Rightarrow \hat{\theta}_{MV} \sim N(\theta, I_n^{-1}(\theta))$ e quindi $\frac{\hat{\theta}_{MV} - \theta}{\sqrt{I_n^{-1}(\hat{\theta}_{MV})}} \sim N(0,1)$ e poniamo uale come quantità puntuale

Calcolo $\hat{\theta}_{MV} \Rightarrow L(\theta, x_n) = \prod_{i=1}^m \left(\frac{x_i^2}{2\theta^3} e^{-x_i/\theta} \right) = \pi \left(\frac{x_i}{2} \right)^2 \theta^{-3m} e^{-\sum x_i / \theta}$

$l(\theta, x_n) = \log L(\theta, x_n) \propto -3m \log \theta - \frac{\sum x_i}{\theta}$

$\frac{d}{d\theta} l(\theta) = -\frac{3m}{\theta} + \frac{\sum x_i}{\theta^2} = 0 \Rightarrow \hat{\theta}_{MV} = \frac{\sum x_i}{3m} \left(\text{risolvo de } \frac{d}{d\theta^2} l(\theta) |_{\theta=\hat{\theta}_{MV}} < 0 \right)$
 $\hat{\theta}_{MV} = \frac{\sum x_i}{3m} = \frac{\bar{X}_n}{3}$

Calcolo $I_n^{-1}(\theta) \Rightarrow T = \sum x_i$ è stat. suff. per il modello (criterio Factorizzazione) modello e p. exp $\Rightarrow$ statistico sufficiente è anche continua

$\hat{\theta}_{MV}$ è funzione di statistico sufficiente puntuale e continua reale $E(\hat{\theta}_{MV}) = E\left[\frac{\sum x_i}{3m}\right]$
 $= \frac{1}{3m} \sum E[x_i] = \frac{1}{3m} \sum 3\theta = \theta \quad \forall \theta \in \Theta \rightarrow \hat{\theta}_{MV} \text{ è NO per } \theta$

$\rightarrow$ si osserva che $X_i | \theta \sim \text{Gamma}(\alpha=3, \beta=\frac{1}{\theta}) = \text{Gamma}(\alpha=3, \beta=\theta)$

quindi $E[X_i] = \frac{\alpha}{\beta}$ (visto come Gamma rate) $= 3\theta$

$E[X_i] = \alpha \beta$ (visto come Gamma scale) $= 3\theta$

$\rightarrow$ indipendente dalle X_i

Quindi $\hat{\theta}_{MV}$ è stuv $\Rightarrow V(\hat{\theta}_{MV}) = cr(\theta) = V\left(\frac{\sum x_i}{3m}\right) = \frac{\sum V(x_i)}{9m^2} = \frac{\sum 3\theta^2}{9m^2} = \frac{\theta^2}{3m}$

$V[X_i] = \frac{\alpha}{\beta^2}$ (visto come Gamma rate)

$= 3\theta^2$

$= cr(\theta)$
 $= I_n^{-1}(\theta)$

$\hat{\theta}_{MV} \sim N(\theta, \frac{\theta^2}{3m}) \rightarrow \tilde{Q} = \frac{\hat{\theta}_{MV} - \theta}{\sqrt{I_n^{-1}(\hat{\theta}_{MV})}} = \frac{\frac{\bar{X}_n}{3} - \theta}{\sqrt{\frac{\hat{\theta}_{MV}^2}{3m}}} = \frac{(\frac{\bar{X}_n}{3} - \theta)}{\sqrt{\left(\frac{\bar{X}_n}{3}\right)^2 \frac{1}{3m}}}$

$= \frac{(\frac{\bar{X}_n}{3} - \theta)}{\frac{\bar{X}_n}{\sqrt{27m}}} \sim N(0,1)$

$\tilde{IC}_{1-\alpha} = [\hat{\theta}_{MV} \pm z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{I_n^{-1}(\hat{\theta}_{MV})}]$

$= \left[\frac{\bar{X}_n}{3} \pm z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\bar{X}_n^2 / 27m} \right] = \left[\frac{\bar{X}_n}{3} \pm z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\bar{X}_n}{\sqrt{27m}} \right]$

ii) Calcolo lo lengtho atteso (en) dell'intervallo $= E[X]$

$en = E[L(IC(X_n))] = E\left[2 z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\bar{X}_n}{\sqrt{27m}} \right] = 2 z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{E[\bar{X}_n]}{\sqrt{27m}} = 2 z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{3\theta}{\sqrt{27m}}$

4) $X_1, \dots, X_n$ iid f.c. $X|\theta \sim f_X(x|\theta)$ $f_X(x|\theta) = \frac{3\theta^3}{x^4} \mathbb{1}_{(\theta, \infty)}$ $\theta > 0$

a) Determina lo stimatore dei momenti e la sua distribuzione esatta sapendo che
 $E[X] = \frac{3}{2}\theta$ $V[X] = \frac{3}{4}\theta^2$

b) Utilizza la distribuzione esatta di $\hat{\theta}_{mom}$ per determinare l'intervallo di confidenza esatto di livello $1-\alpha$ per θ

c) Dato il campione $\underline{x}_n = (2, 3, 1, 5, 4)$ determina $IC_{1-\alpha}$ con $\alpha = 0.05$

d) Determina la lunghezza esatta dell'intervallo e il numero atteso (en)

a) $\bar{X}_n = E[X] = \frac{3}{2}\theta \Rightarrow \bar{X}_n = \frac{3}{2}\theta \rightarrow \hat{\theta}_{mom} = \left(\frac{2}{3} \bar{X}_n\right) \underset{\text{per TLC}}{\sim} N(E[\hat{\theta}_{mom}], V[\hat{\theta}_{mom}])$

$$E[\hat{\theta}_{mom}] = E\left[\frac{2}{3} \bar{X}_n\right] = \frac{2}{3} E[\bar{X}_n] = \frac{2}{3} E[X] = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2} \theta = \theta$$

$$V[\hat{\theta}_{mom}] = V\left[\frac{2}{3} \bar{X}_n\right] = \frac{4}{9} V[\bar{X}_n] = \frac{4}{9} \frac{V[X]}{n} = \frac{4}{9} \frac{\frac{3}{4} \theta^2}{n} = \frac{\theta^2}{3n}$$

Quindi $\hat{\theta}_{mom} \sim N\left(\theta, \frac{\theta^2}{3n}\right)$

b) $\tilde{Q}(x_n, \theta) = \frac{(\hat{\theta}_{mom} - \theta) \sqrt{3n}}{\hat{\theta}_{mom}} \sim N(0,1) \Rightarrow IC_{1-\alpha} = \left[\hat{\theta}_{mom} \pm z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\hat{\theta}_{mom}^2}{3n}} \right] =$

$$= \left[\hat{\theta}_{mom} \pm z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\hat{\theta}_{mom}}{\sqrt{3n}} \right]$$

$$= \left[\frac{2}{3} \bar{X}_n \pm z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\frac{2}{3} \bar{X}_n}{\sqrt{3n}} \right]$$

c) $\bar{x}_n = \frac{2+3+1+5+4}{5} = 3$ $IC_{0.95} = \left[\frac{2}{3} \times 3 \pm z_{0.975} \frac{\frac{2}{3} \times 3}{\sqrt{3 \times 5}} \right] = \left[2 \pm 1.96 \frac{2}{\sqrt{15}} \right]$

d) $\mathcal{L}(C(\underline{x}_n)) = U(\underline{x}_n) - L(\underline{x}_n) = \hat{\theta}_{mom} + z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\hat{\theta}_{mom}}{\sqrt{3n}} - \left(\hat{\theta}_{mom} - z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\hat{\theta}_{mom}}{\sqrt{3n}} \right) = 2 z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\hat{\theta}_{mom}}{\sqrt{3n}}$

$$e_n = E[\mathcal{L}(C(\underline{x}_n))] = 2 z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{E[\hat{\theta}_{mom}]}{\sqrt{3n}} = 2 z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\theta}{\sqrt{3n}}$$

5) $f_X(x, \theta) = x(\theta+2)x^\theta \quad x \in (0,1) \quad \theta > -2$ con $\hat{\theta}_{MV}(X_n) = -\frac{m}{\ln \prod_{i=1}^m X_i} - 2$

i) Verifica che la distribuzione campionaria di $\hat{\theta}_{MV}$ è $N(\theta, \frac{(\theta+2)^2}{m})$

ii) determina $IC_{1-\alpha}$ per θ con $1-\alpha = 0.90$ $m=20$ e $\ln \prod_{i=1}^m X_i = -19$

iii) Verifica che $E[X] = \frac{\theta+2}{\theta+3} = 1 - \frac{1}{\theta+3}$ e determina per questa quantità l'intervallo di confidenza approssimato di livello 0.95, utilizzando i dati precedenti.

i) $\hat{\theta}_{MV} \sim N(\theta, \text{In}(\theta)) \Rightarrow \text{In}(\theta) = ?$

$$\begin{aligned} \text{In}(\theta) &= -m E_\theta \left[\frac{d^2}{d\theta^2} \ln f_X \right] = -m E_\theta \left[\frac{d^2}{d\theta^2} (\ln x + \ln(\theta+2) + \theta \ln x) \right] \\ &= -m E_\theta \left[\frac{d}{d\theta} \left(\frac{1}{\theta+2} + \ln x \right) \right] = -m E_\theta \left[-\frac{1}{(\theta+2)^2} \right] = \frac{m}{(\theta+2)^2} \rightarrow \text{cr}(\theta) = \text{In}(\theta) = \frac{(\theta+2)^2}{m} \end{aligned}$$

quindi $\hat{\theta}_{MV} \sim N(\theta, \frac{(\theta+2)^2}{m})$

ii) $IC_{1-\alpha} = \left[\hat{\theta}_{MV} \pm z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{(\hat{\theta}_{MV}+2)^2}{m}} \right] = \left[\hat{\theta}_{MV} \pm z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{(\hat{\theta}_{MV}+2)}{\sqrt{m}} \right] \Rightarrow$

$$= \left[-0.95 \pm 1.28 \frac{(-0.95+2)}{\sqrt{20}} \right] = [-1.25, -0.65]$$

$1-\alpha = 0.90$
 $\alpha = 0.10$
 $1-\frac{\alpha}{2} = 0.95$
 $\hat{\theta}_{MV} = -\frac{20}{-19} - 2 = -0.95$

iii) $E[X] = \int_0^1 x(\theta+2)x^\theta \cdot x dx = \int_0^1 x^{\theta+2}(\theta+2) dx = (\theta+2) \left[\frac{x^{\theta+3}}{\theta+3} \right]_0^1 = \frac{(\theta+2)}{(\theta+3)}$

quindi $g(\theta) = \frac{\theta+2}{\theta+3} \rightarrow \underset{\text{per } g(\theta)}{\tilde{IC}_{1-\alpha}} = \left[g(\hat{\theta}_{MV}) \pm z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{g'(\hat{\theta}_{MV})^2 \text{In}(\hat{\theta}_{MV})} \right]$ dato $g'(\theta) = \frac{1}{(\theta+3)^2}$

$$g(\hat{\theta}_{MV}) = \frac{\hat{\theta}_{MV}+2}{\hat{\theta}_{MV}+3}$$

$$\tilde{IC}_{1-\alpha} = \left[\frac{\hat{\theta}_{MV}+2}{\hat{\theta}_{MV}+3} \pm z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{1}{(\hat{\theta}_{MV}+3)^2} \frac{(\hat{\theta}_{MV}+2)}{\sqrt{m}} \right]$$

$$g'(\hat{\theta}_{MV}) = \frac{1}{(\hat{\theta}_{MV}+3)^2}$$

$$\text{In}(\hat{\theta}_{MV}) = \frac{(\hat{\theta}_{MV}+2)^2}{m}$$

$$= \left[\frac{-0.95+2}{-0.95+3} \pm 1.96 \frac{(-0.95+2)}{\sqrt{20}(-0.95+3)^2} \right]$$

$$= [0.4, 0.62]$$