Anno Accademico 2003-2004

Dispense del corso di Fisica per Farmacia del Prof. Claudio Luci

http://www.roma1.infn.it/people/luci/corso_farmacia.html

Parte II

- Termodinamica
- Elettromagnetismo

LIBRI DI TESTO CONSIGLIATI

- **Serway & Jewett**
  Principi di Fisica (3° Edizione)   - Edises

- **Halliday – Resnik – Walker**
  Fondamenti di Fisica (5° Edizione) – Casa Editrice Ambrosiana

Lo studente è libero di utilizzare uno dei due libri o qualunque altro testo simile, oppure edizioni precedenti degli stessi.

Libri di esercizi

- **Gordon – Mcgrew – Van Wyk – Serway** (2 vol.)
  Guida alla soluzione dei problemi da:
  Principi di Fisica (Serway) [2° Edizione] – Edises
- **Ragozzino** – Problemi di Fisica (meccanica e termodinamica) – Editoriale Grasso

Ausilio Matematico

- **Davidson**: Metodi matematici per un corso introduttivo di Fisica – Edises

Dispense (presso i “chioschi gialli”)

- **Bagnaia-Luci**: esercizi d’esame con soluzione
- **Luci**: dispense del corso di Fisica per Farmacia

TERMOLOGIA e CALORIMETRIA

- Introduzione alla termodinamica
- Temperatura e calore
- Misura della temperatura
- Scale di temperatura
- Termometro a gas a volume costante
- capacità termica e calore specifico
- calore latente e passaggi di stato
- Trasmissione del calore

Termodinamica: introduzione

- Prendete un cubetto di ghiaccio dal frigorifero e poggiatelo sul tavolo.
  Potete misurare varie grandezze meccaniche:
  - massa, volume, densità, forza normale, coefficiente di attrito, etc…
- Allontanatevi … tornate … trovate una pozza d’acqua al posto del cubetto di ghiaccio.
- Con i concetti studiati in meccanica non si riesce a spiegare in modo “semplice” il fenomeno. Occorre introdurre concetti nuovi:
  - temperatura
  - calore
  - energia interna
  - stato termodinamico
  - etc..

Termodinamica: introduzione

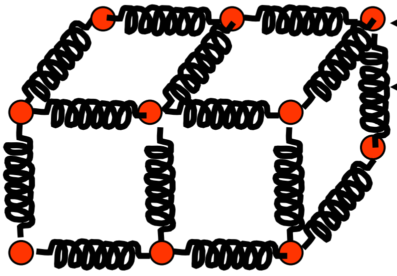
- La termodinamica è nata per studiare i fenomeni termici, in particolare per studiare il funzionamento delle macchine termiche

- La termodinamica si basa sull'enunciazione di alcuni principi:
  - principio zero (1930)
  - primo principio (1842)
  - secondo principio (1824)
  - terzo principio (1906)

- La termodinamica permette di trovare i punti di equilibrio di una reazione chimica tramite i potenziali termodinamici:
  - energia interna
  - entropia
  - entalpia
  - energia libera (Helmotz)
  - entalpia libera (Gibbs)

Calore e Temperatura

- Esempio: guardiamo da "molto vicino" un solido cristallino:



- Ogni atomo è legato agli altri da forze elastiche e può vibrare intorno alla posizione di riposo.
- L'energia di ogni atomo, nel sistema di riferimento in cui il centro di massa del solido è fermo, vale:

$$E = \underbrace{\frac{1}{2}mV_x^2 + \frac{1}{2}mV_y^2 + \frac{1}{2}mV_z^2}_{\text{Energia cinetica}} + \underbrace{\frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}ky^2 + \frac{1}{2}kz^2}_{\text{Energia potenziale}}$$

- La TEMPERATURA di un corpo è la misura dell'energia media di un atomo del corpo stesso:

$E_{media} = 6 \bullet 1/2 \bullet kT = 3kT$

- k = costante di Boltzman = 1.38 $\bullet 10^{-23}$ J/K
- T = temperatura del corpo misurata in kelvin

[Il fattore 6 viene dal teorema di equipartizione dell'energia]

Variazione di Temperatura

- Per variare la temperatura di un corpo occorre variare l’energia media di un singolo atomo (o di una singola molecola)

- Se date una spinta al corpo, aumentate la sua velocità, quindi cambiate l’energia cinetica del centro di massa, ma NON la sua temperatura.

- Strofinate invece il corpo senza spostarlo. Le forze di attrito trasmettono il movimento coerente dello straccio ad un movimento incoerente degli atomi, ed il corpo di conseguenza si scalda.

- Mettete il corpo a contatto con uno più “caldo”. Parte dell’energia degli atomi si trasferirà dal corpo più caldo a quello più freddo fino a quando l’energia media di un atomo sarà la stessa per tutti e due i corpi [equilibrio termico]. Un corpo si “scalda” e l’altro si “raffredda”.

- Questo trasferimento incoerente di energia si chiama CALORE.

- Trasferimento coerente : LAVORO.
  Trasferimento incoerente : CALORE.

Calore

- Nel 1700 si pensava al calore come qualcosa contenuto in un corpo, il “calorico”, che si trasmetteva da un corpo ad un altro.

- Il conte di Rumford dimostrò che questo era falso, con l’attrito si può “produrre” calore.

- Tuttavia il modello del calorico è utile per eseguire dei calcoli sulla trasmissione del calore.

- Nello stesso periodo di studiavano anche i fenomeni elettrostatici e si assumeva che all’interno di un corpo vi fosse qualcosa chiamato carica elettrica che si trasmette da un corpo ad un altro.
  E questo è giusto.

Misura della Temperatura

- Variando l'energia media degli atomi (o delle molecole in un gas) cambiano anche alcune caratteristiche macroscopiche della sostanza.

- Ad esempio può cambiare la distanza interatomica [proprietà microscopica]. Ad un'energia media più grande corrisponde una distanza più grande, allora la sostanza si dilata [proprietà macroscopica].

- Misurando ad esempio le variazioni di volume di un liquido di può misurare la sua variazione di temperatura (termometro a mercurio).

- Altre proprietà che si possono usare:
  - cambiamento di resistività di un filo
  - variazione di pressione di un gas a volume costante
  - variazione della differenza di potenziale tra le due saldature di una termocoppia
  - etc…

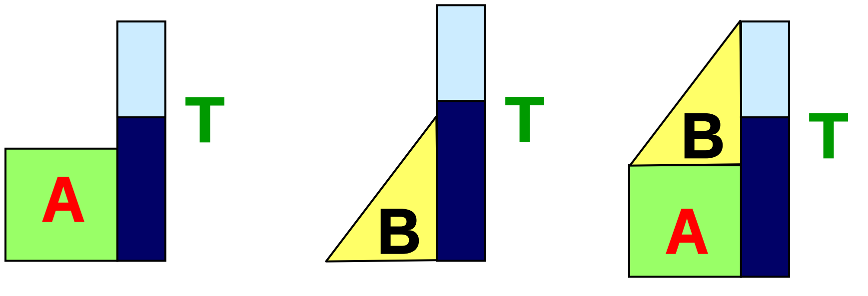
- La variazione di proprietà macroscopiche al variare della temperatura è diversa da sostanza a sostanza. Esempio: coefficiente di dilatazione termica α.

$$\Delta V = V \cdot \alpha \Delta T$$

Principio zero della Termodinamica

- <u>**S**e due corpi A e B si trovano in equilibrio termico con un terzo corpo T, allora essi sono in reciproco equilibrio termico.</u>

- Supponete che il corpo T sia il tubicino di vetro contenente del mercurio:



- Per misurare T dovete aspettare un certo tempo affinché si stabilisca l'equilibrio termico tra il corpo ed il termometro.

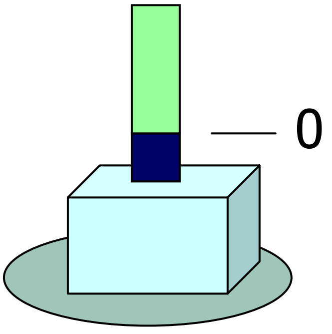
- Se i due corpi A e B provocano lo stesso allungamento della colonna di mercurio, allora vuol dire che sono in equilibrio termico tra loro, cioè <u>hanno la stessa temperatura.</u>

- Il funzionamento dei termometri si basa sul principio zero, perché si misura sempre la temperatura del termometro e mai quella del corpo.

- La temperatura è una grandezza intensiva.

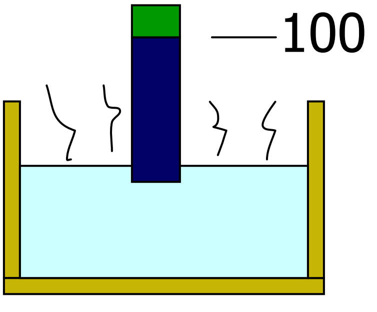
Taratura del termometro: scala Celsius

- Mettiamo a contatto il termometro a mercurio con un cubetto di ghiaccio che sta fondendo:



All’altezza raggiunta dal mercurio nel tubicino si fa corrispondere la temperatura di 0 °C

- Mettiamo ora a contatto il termometro con l’acqua che sta bollendo:



All’altezza raggiunta dal mercurio nel tubicino si fa corrispondere la temperatura di 100 °C

- Si divide ora la distanza tra 0 °C e 100 °C in 100 parti uguali, in modo tale che il grado Celsius (centigrado) corrisponda alla centesima parte della differenza di temperatura tra il ghiaccio che fonde e l’acqua che bolle.

- <u>Problema: l’acqua non bolle sempre alla stessa temperatura, ma dipende dalla pressione atmosferica.</u>

Taratura del termometro: scala Fahrenheit

- Negli Stati Uniti utilizzano una diversa scala per misurare la temperatura:

  - la temperatura del ghiaccio fondente è 32 °F
  - la temperatura dell'acqua che bolle è 212 °F
  - la differenza di temperatura tra questi due punti è 180 °F.

- Quindi ΔT=100 °C = 180 °F

$$\Rightarrow \quad 1^{o}\,C = \frac{180}{100}{}^{o}F = \frac{9}{5}{}^{o}F = 1.8^{o}F$$

- Per passare da °C a °F si fa:

  $T_F = 1.8\ T_C + 32$

- Per passare da °F a °C si fa:

  $T_C = (T_F - 32)\cdot 5/9$

esempio: 100 °F -> °C

$T_C = (100 - 32)\cdot 5/9 = 37.8$ °C

- 100 °F corrispondono circa alla temperatura del corpo umano.

Qual'è la scala giusta per misurare la temperatura?

- Abbiamo detto che la temperatura è proporzionale all'energia media di un atomo (o di una molecola).

  $E_{media} = 3KT$ [per un solido cristallino]

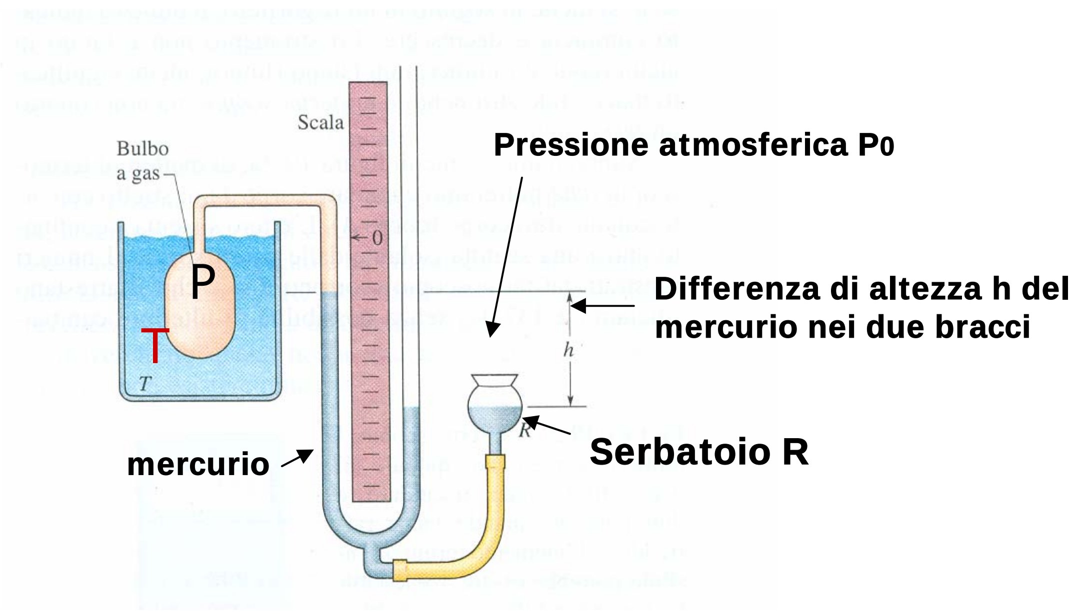
  <u>Quale T dobbiamo usare?</u>

- L'energia media è sempre positiva, quindi anche T deve essere positiva.
- Se gli atomi non vibrassero, l'energia media sarebbe nulla e T dovrebbe valere zero. La meccanica quantistica predice che l'energia non può mai essere uguale a zero, quindi T=0 non potrà mai essere ottenuta.

- La corrispondenza tra energia e temperatura deve essere univoca. T può essere determinata usando una legge fisica e non per confronto (taratura).

- Con un termometro a gas si può misurare T usando come calibrazione il punto triplo dell'acqua.

Termometro a gas a volume costante



- Si immerge il bulbo di gas nel bagno di cui si vuole misurare la temperatura
- Si alza o si abbassa il serbatoio R in modo tale che l'altezza del mercurio nella colonna di sinistra sia sempre la stessa. In questo modo si mantiene costante il volume occupato dal gas.
- Dalla differenza di altezza h del mercurio nei due bracci si misura la pressione del gas.

$$P_0 = P + \rho g h$$

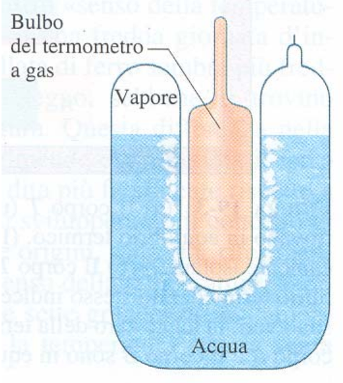
$$\Rightarrow \quad P = P_0 - \rho g h$$ (P=pressione del gas)

- Si trova che vale la relazione: $T = C \cdot P$

<u>C è una costante di proporzionalità che va determinata con una procedura di calibrazione</u>.

Calibrazione del termometro a gas: scala Kelvin

- Si possono usare le temperature di fusione del ghiaccio e di ebollizione dell'acqua.
- Oppure si può usare il punto triplo dell'acqua.



Solido-liquido-vapore possono coesistere soltanto ad una data temperatura e pressione

- Per l'acqua si ha: $P_3 = 6.11 \cdot 10^2$ Pa = 4.58 mm Hg
- Per DEFINIZIONE la temperatura del punto triplo vale:

$T_3 = 273.16$ K

- quindi il kelvin è definito come 1/273.16 volte la temperatura del punto triplo dell'acqua.
- Temperatura di fusione del ghiaccio: 273.15 K (0 °C)
- Temper. di ebollizione dell'acqua = 373.15 K (100 °C)
- $\Rightarrow$ **ΔT = 1 K è uguale a ΔT = 1** °C
- Per passare da Kelvin a Celsius si fa:

$$T_c = T - 273.15$$

Misura della temperatura con il termometro a gas

- Dalla misura della temperatura del punto triplo abbiamo:

  $T_3 = C \cdot P_3$ C = costante da determinare
  P_3 = pressione del gas
  T_3 = 273.16 K

- Misuriamo ora una temperatura qualsiasi, ad esempio l'acqua bollente.
  La pressione del gas sarà P

  $T = C \cdot P$

- Eliminando C dalle due equazioni si ha:

  $T = T_3 \cdot (P/ P_3) = 273.16 \cdot (P/ P_3)$

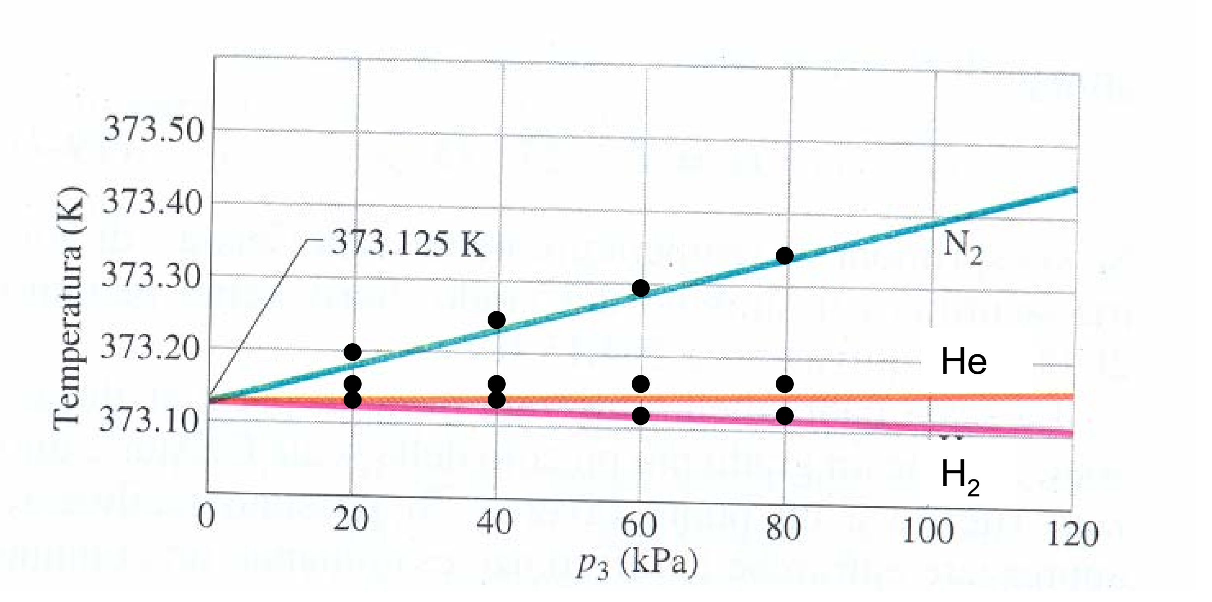
  $[C=273.16/P_3]$

- Quindi misurando la pressione P del gas si ricava la temperatura del gas e quindi dell'oggetto con il quale esso è in equilibrio termico.

- DOMANDA: la temperatura T misurata sarà la stessa qualunque sia il gas usato e qualunque sia la pressione P_3 del gas in corrispondenza del punto triplo?

Gas ideale

- Misuriamo il punto di ebollizione dell'acqua con vari gas a diverse densità:



- Variare la densità del gas equivale a variare la pressione P_3 in corrispondenza del punto triplo.
- Si vede sperimentalmente che la misura della temperatura dell'acqua dipende sia dal tipo di gas che dalla densità, ovvero da P_3.
- Se prendiamo il gas sempre più rarefatto, diminuendo cioè P_3, le varie misure si avvicinano.
- Estrapolando le misure per P_3=0, convergono verso lo stesso valore.
  <u>Questo è quello che si otterrebbe con un gas ideale</u>.
- Il comportamento di un gas reale tende sempre più a quello di un gas ideale tanto più la sua densità tende a zero.

Temperature di alcuni punti fissi

	Punti fissi	T in ºC	T in K
Campione	Punto triplo dell'acqua	0.01	273.16
Principali	**PEN** dell'idrogeno (punto dell'idrogeno)	-252.88	20.26
	PEN dell'ossigeno (punto dell'ossigeno)	-182.97	90.17
	Equilibrio di ghiaccio e acqua satura d'aria (punto del ghiaccio)	0.00	273.15
	PEN dell'acqua (punto del vapor d'acqua)	100.00	373.15
	PFN dello zinco (punto dello zinco)	419.51	692.66
	PFN dell'antimonio (punto dell'antimonio)	630.50	903.65
	PFN dell'argento (punto dell'argento)	961.90	1235.05
	PFN dell'oro (punto dell'oro)	1064.50	1337.65
Secondari	**PEN** dell'elio	-268.93	4.22
	PEN del neon	-246.09	27.09
	PEN dell'azoto	-195.81	77.35
	PFN del mercurio	-38.86	234.29
	Punto di transizione del solfato di sodio	32.38	305.53
	PEN della naftalina	217.96	491.11
	PFN dello stagno	231.91	505.00
	PEN del benzofenone	305.90	579.05
	PFN del cadmio	320.90	594.05
	PFN del piombo	327.30	600.45

PFN: Punto di Fusione Normale (pressione di 1 atmosfera)
PEN: Punto di Ebollizione Normale (tensione di vapore saturo di 1 atm)

N.B. Se si varia la pressione di 1 cm di mercurio, il PFN varia di circa 0.00001 gradi, mentre il PEN varia di alcune decine di gradi. Di qui la tendenza sempre più diffusa a eliminare dai punti fissi tutti i punti di ebollizione, conservando solo punti di fusione e punti tripli.

Assorbimento del calore: capacità termica

- Lo scambio di calore di un oggetto con l'ambiente circostante provoca una variazione della sua temperatura:

  calore assorbito => T aumenta
  calore ceduto => T diminuisce

- Vale la relazione:

  $Q = C \cdot (T_f - T_i)$

  Q = calore scambiato
  Tf = temperatura finale
  Ti = temperatura iniziale
  C = capacità termica

- Il nome capacità termica suggerisce l'analogia con un secchio che ha la capacità di contenere acqua. L'analogia è sbagliata perché fa riferimento alla vecchia teoria del calorico.

- La capacità termica è una grandezza estensiva e si misura in J/K oppure in calorie/K

- La capacità termica di un corpo si determina misurando il calore fornito al corpo e deteminando la sua variazione di temperatura:

$$C = Q/\Delta T$$

Calore specifico

- A partire dalla capacità termica si può ricavare una grandezza intensiva che caratterizzi il corpo:
  il calore specifico.
- Questo si ottiene dividendo la capacità termica per la massa del corpo

$c = C/m$ [il calore specifico può essere funzione della temperatura]

- Allora si ha:

$Q = c \cdot m \cdot (Tf - Ti)$

Calore specifico molare

- Se si divide la capacità termica per il numero di moli di un corpo, si ha il calore specifico molare.

  - 1 mole = $6.02 \cdot 10^{23}$ unità [numero di Avogadro]
  - 1 mole di gas = $6.02 \cdot 10^{23}$ molecole

$c_m = C/n$

- Nel caso dei gas occorre specificare la modalità con cui viene fornito il calore: ad esempio a volume costante o a pressione costante. I calori specifici (molari) sono diversi nei due casi.

Definizione di caloria

- Prima che ci si rendesse conto che il calore è energia trasferita, il calore veniva misurato in funzione della sua capacità di innalzare la temperatura dell'acqua.

- La caloria (cal) è la quantità di calore che occorre fornire ad 1 g di acqua (a pressione atmosferica) per innalzare la sua temperatura da 14.5 a 15.5 °C.

- La kilocaloria (oppure grande caloria) corrisponde a 1000 (piccole) calorie.
  Il contenuto energetico dei cibi si misura in kilocalorie.

- Dato che il calore è un trasferimento di energia, l'unità di misura nel S.I. è il joule.
  L'equivalenza tra joule e calorie è stata determinata da Joule e vale:

1 cal = 4.186 J
1 J = 0.2389 cal

Calore latente

- Non sempre ad un assorbimento di calore da parte di un solido o di un liquido corrisponde un aumento di temperatura.

- A volte la sostanza può passare da una fase (stato) ad un’altra.
  Ad esempio: solido – liquido (fusione)
  liquido – vapore (evaporazione)

- La quantità di calore che deve essere fornita per massa unitaria si chiama calore latente λ.
  $Q = \lambda \cdot m$
  λ_V = calore latente di evaporazione
  λ_F = calore latente di fusione

- Togliendo calore alla sostanza avviene il passaggio inverso:
  liquido – solido (solidificazione)
  vapore – liquido (liquefazione)

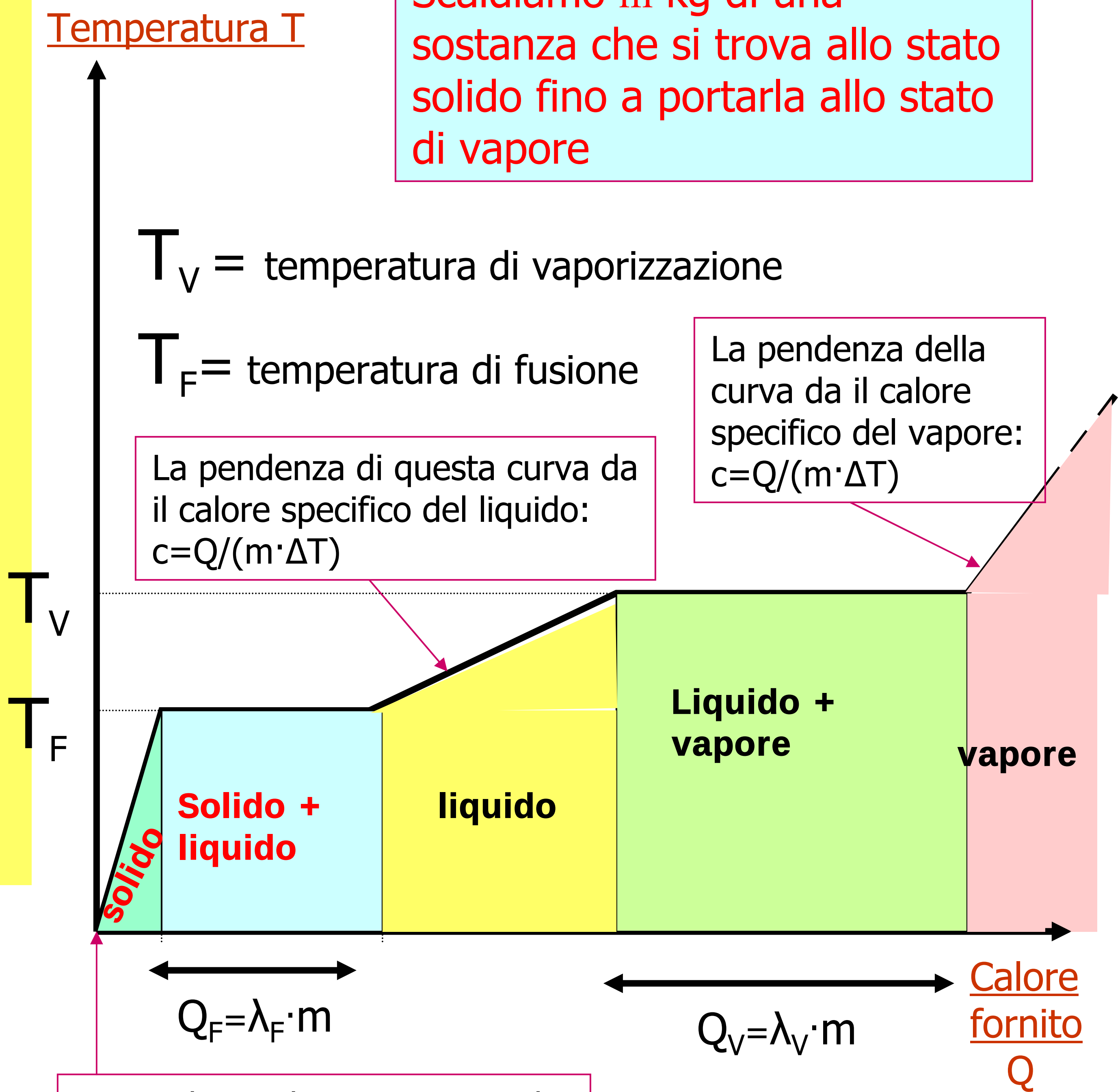
- Ad una data pressione i passaggi di stato avvengono ad una temperatura fissata. Nel caso dell’acqua:

  Fusione T=0 °C : λ_F=79.5 cal/g =6.01 kg/mol =333 kJ/kg
  Evaporazione T=100 °C; λ_V=539 cal/g =40.7 kJ/mol =2.26 MJ/kg

- N.B. I passaggi di stato sono trasformazioni reversibili

Passaggi di stato

Scaldiamo m kg di una sostanza che si trova allo stato solido fino a portarla allo stato di vapore



La pendenza di questa curva da il calore specifico del solido: c=Q/(m·ΔT)

Ricorda: T_V e T_F sono funzione di P

Ricorda: il calore specifico del vapore dipende dalla modalità di somministrazione di Q

Trasmissione del calore

- La trasmissione del calore da un corpo a temperatura T_c ad uno a temperatura T_f , dove $T_c > T_f$, avviene in tre modi:

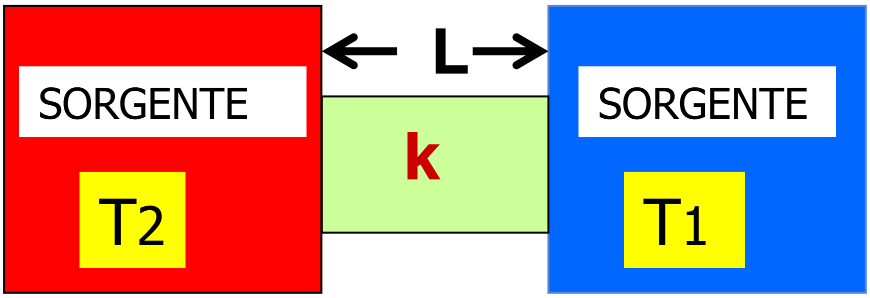
- **CONDUZIONE**
  La trasmissione avviene per contatto tra I due corpi. Ad esempio quando toccate con la mano il ferro da stiro.

- **CONVENZIONE**
  La trasmissione avviene per spostamento da un posto ad un altro di molecole "calde" (ovvero che hanno energia cinetica più alta rispetto alle molecole che urtano). Ad esempio l'asciugacapelli: le molecole di aria calda vengono soffiate sui vostri capelli dalla ventola.
  La convenzione è importante nei liquidi e nei gas.

- **IRRAGGIAMENTO**
  Le molecole di un corpo di agitano tanto più velocemente tanto maggiore è la temperatura del corpo. Le cariche elettriche accelerate emettono energia sottoforma di onde elettromagnetiche. Quando la frequenza delle onde è nella regione dell'infrarosso, esse corrispondono a onde termiche.
  Esempio: il sole.

  N.B. Non vi è bisogno di un "supporto" per la trasmissione del calore per irraggiamento.

Conduzione



$T_2 > T_1$

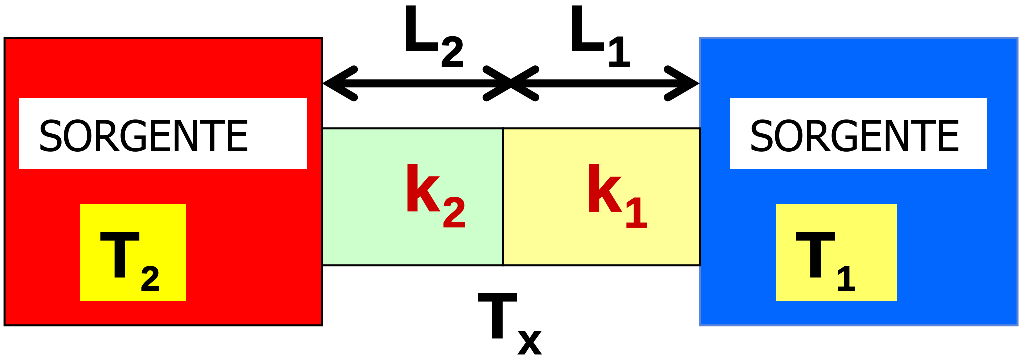
- Una lastra metallica di spessore L e superficie A è a contatto con due sorgenti a temperatura T_1 e T_2.
- Se $T_2 > T_1$ "passa" del calore dalla sorgente 2 alla sorgente 1 attraverso la lastra.
- il calore che passa nell'unità di tempo attraverso la lastra vale:

$$H = \frac{dQ}{dt} = k \cdot A \frac{T_2 - T_1}{L}$$

(Ipotesi: niente dispersione dalle pareti laterali della lastra).

- K è una costante che dipende dal materiale con cui è fatta la lastra. Si chiama conducibilità termica.
- Buoni conduttori (metalli) => k elevato
- Cattivi conduttori (polistirolo, lana) => k piccolo

Conduzione attraverso strati composti



T2>T1

- Due lastre aventi stessa area A e lunghezza e conducibilità termica rispettivamente L_1,K_1 e L_2,K_2 sono collegate a due sorgenti termiche come in figura.

- Se $T_2>T_1$ => Q va da T_2 a T_1 attraverso le lastre

- Troviamo la temperatura T_x dell'interfaccia tra le due lastre

- Facciamo l'ipotesi che siamo in regime stazionario, cioè le varie temperature non variano al variare del tempo. Quindi la quantità di calore che attraversa le due lastre nell'unità di tempo deve essere lo stesso, altrimenti ci sarebbe un "accumulo" (o un deficit) di calore in una delle lastre che ne farebbe cambiare la temperatura con il tempo.

$$H = \frac{k_2 A(T_2 - T_x)}{L_2} = \frac{k_1 A(T_x - T_1)}{L_1}$$

$$\Rightarrow \quad T_x = \frac{L_2 T_1 k_1 + L_1 T_2 k_2}{L_2 k_1 + L_1 k_2}$$

Conduzione attraverso strati composti

$$H = \frac{k_2 A(T_2 - T_x)}{L_2} = \frac{k_1 A(T_x - T_1)}{L_1}$$

$$T_x = \frac{L_2 T_1 k_1 + L_1 T_2 k_2}{L_2 k_1 + L_1 k_2}$$

- Resistenza termica: R=L/(A•k)

$$T_x = \frac{R_2 T_1 + R_1 T_2}{R_1 + R_2} \quad \Rightarrow \quad \boxed{H = \frac{T_2 - T_1}{R_1 + R_2}}$$

- Ricordiamo le leggi di Ohm per la corrente elettrica:

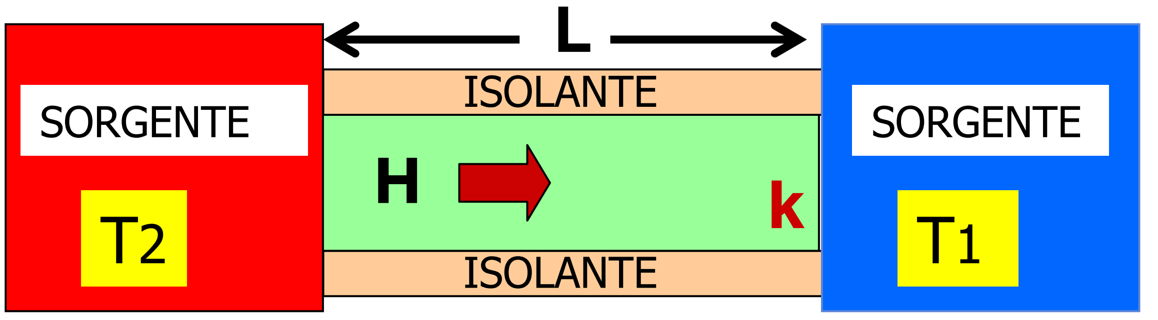
$$\boxed{R = \rho \cdot \frac{l}{S}} \qquad \boxed{I = \frac{V_2 - V_1}{R}} \qquad \boxed{R_s = R_1 + R_2}$$

- Abbiamo quindi le analogie:

ΔT=ΔV **H=I** **R=R**

- Valgono anche le stesse regole di combinazione delle resistenze in serie ed in parallelo.

Conduzione attraverso una barra



$T_2 > T_1$

$T_2 - T_1 = -\Delta T$; $L = \Delta x$ ➡ $\boxed{H = \dfrac{dQ}{dt} = -k \cdot A \dfrac{\Delta T}{\Delta x}}$

Per $\Delta x \to 0$ ➡ $H = \dfrac{dQ}{dt} = -k \cdot A \dfrac{dT}{dx}$ → Gradiente di temperatura

N.B. il gradiente è positivo nella direzione crescente della temperatura, mentre il calore fluisce nel senso opposto.

- In regime stazionario, considerando che non vi sia flusso dalla parete laterali della sbarra, il gradiente di temperatura lungo la sbarra deve essere costante:

$$\frac{dT}{dx} = \text{costante} = -\gamma \quad \Rightarrow \quad \boxed{T(x) = T_2 - \gamma \cdot x}$$

- Dall'andamento di T in funzione di x si ricava g e poi si può ricavare la conducibilità termica

$$\boxed{k = \frac{H}{\gamma \cdot A}}$$

Irraggiamento

- La potenza P_r (energia per unità di tempo) emessa da un corpo tramite irraggiamento vale:

  $$P_r = \sigma \cdot \varepsilon \cdot A \cdot T^4$$

  - T = temperatura assoluta del corpo

  - A = superficie del corpo

  - σ = costante di Stefan-Boltzman $5.6703 \cdot 10^{-8}$ W/m^2K

  - ε = emittanza (o emissività) della superficie del corpo. Può assumere valori compresi tra 0 e 1

- Un corpo emette solo le radiazioni che riesce ad assorbire

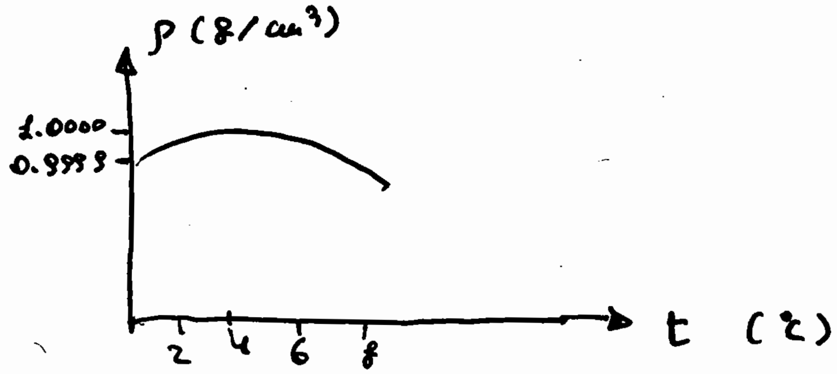
- Un corpo che assorbe tutta la radiazione che lo investe (astrazione ideale) si chiama corpo nero.
  Il corpo nero avrà quindi anche il massimo di emissività (ε=1)

- Misurando lo spettro e la potenza irraggiata da un corpo si risale alla sua temperatura.

DENSITA'

COMPORTAMENTO ANOMALO DELL' ACQUA

- LA DENSITA' DI UN CORPO VARIA IN FUNZIONE DELLA TEMPERATURA
- TIPICAMENTE ALL'AUMENTARE DELLA TEMPERATURA LA DENSITA' DIMINUISCE PERCHE' IL CORPO SI DILATA.
- NEL CASO DELL'ACQUA LA DENSITA' MASSIMA SI HA A 4°C



- QUESTO FA SI CHE I LAGHI COMINCIANO A GHIACCIARE DALLA SUPERFICIE, CONSENTENDO AI PESCI DI RIMANERE IN VITA

ESERCIZI CONSIGLIATI

Calorimetria

- Serway (3° Edizione) – Cap. 17
  - 3 – 5 – 7 – 9 – 11 – 13 – 15 – 45 – 47 – 55
- Halliday (5° Edizione) – Cap. 19
  - 27E – 29E – 31E – 33P – 37P

PROBLEMA 19-6 (Halliday)

QUANTO CALORE OCCORRE PER FAR PASSARE DEL GHIACCIO DI MASSA $m = 720\ g$ A $-10\ °C$ ALLO STATO LIQUIDO A $15\ °C$?
SUPPONETE DI FORNIRE AL GHIACCIO UN CALORE TOTALE DI SOLI 210 KJ.
QUALI SONO ALLORA LO STATO FINALE E LA TEMPERATURA DELL'ACQUA?

- DIVIDIAMO IL FENOMENO IN TRE FASI:
  1) RISCALDAMENTO DEL GHIACCIO FINO A 0 °C
  2) FUSIONE DEL GHIACCIO
  3) RISCALDAMENTO DELL'ACQUA FINO A 15 °C

1) $Q_1 = c_{ghiaccio} \cdot m \cdot (T_f - T_i) = \left(2220 \frac{J}{kg \cdot K}\right)(0.720\ kg) \cdot (0 - (-10)\ °C) = 15.98\ kJ$

2) $Q_2 = L_F \cdot m = \left(333 \frac{kJ}{kg}\right) \cdot (0.720\ kg) = 239.8\ kJ$

3) $Q_3 = c_{liquido} \cdot m \cdot (T_f - T_i) = \left(4190 \frac{J}{kg \cdot K}\right)(0.720\ kg)(15 - 0\ °C) = 45.25\ kJ$

- IL CALORE TOTALE È LA SOMMA DEI TRE CALORI

$$Q_{TOT} = Q_1 + Q_2 + Q_3 = 15.98\ kJ + 239.8\ kJ + 45.25\ kJ \simeq 300\ kJ$$

- SE FORNIAMO AL GHIACCIO SOLTANTO 210 KJ, RIUSCIAMO A SCALDARE IL GHIACCIO FINO A 0 °C, MA NON RIUSCIAMO A FONDERLO TUTTO

$$Q_{RES} = Q_{TOT} - Q_1 = 210\ kJ - 15.98\ kJ \simeq 194\ kJ$$

- VEDIAMO QUANTO GHIACCIO RIUSCIAMO A FONDERE CON 194 KJ

$$m = \frac{Q_{RES}}{L_F} = \frac{194\ kJ}{333\ kJ/kg} = 0.583\ kg = 583\ g$$

- LO STATO FINALE È COMPOSTO DA 583 g DI ACQUA E 137 g DI GHIACCIO A 0 °C

PROBLEMA 19-7 (Halliday)

UN PROIETTILE DI RAME LA CUI MASSA m_p È 75 g VIENE RISCALDATO IN UN FORNO DA LABORATORIO A UNA TEMPERATURA DI 312 °C. IL PROIETTILE VIENE QUINDI FATTO CADERE IN UN RECIPIENTE DI VETRO CONTENENTE UNA MASSA $m_A = 220$ g DI ACQUA. LA CAPACITÀ TERMICA EFFICACE C_R DEL RECIPIENTE È 45 cal/K. LA TEMPERATURA INIZIALE T_i DELL'ACQUA E DEL RECIPIENTE È 12 °C. TROVARE LA TEMPERATURA FINALE T_f DEL PROIETTILE, DEL RECIPIENTE E DELL'ACQUA.

IMMAGINIAMO CHE IL SISTEMA ACQUA, RECIPIENTE, PROIETTILE SIA ISOLATO, CIOÈ SCAMBI CALORE SOLO ALL'INTERNO MA NON CON L'AMBIENTE ESTERNO.

$Q_a = m_a c_a (T_f - T_i)$ calore scambiato dall'acqua

$Q_r = C_R (T_f - T_i)$ " " del recipiente

$Q_p = m_p c_p (T_f - T_i)$ " " " proiettile

$Q_a + Q_r + Q_p = 0$ sistema isolato

$$m_a c_a (T_f - T_i) + C_R (T_f - T_i) + m_p c_p (T_f - T_i) = 0$$

$$T_f = \frac{m_p c_p T + C_R T_i + m_a c_a T_i}{m_a c_a + C_R + m_p c_p} = \frac{5332.8 \text{ cal}}{271.9 \text{ cal}/°C} = 19.6 \text{ °C}$$

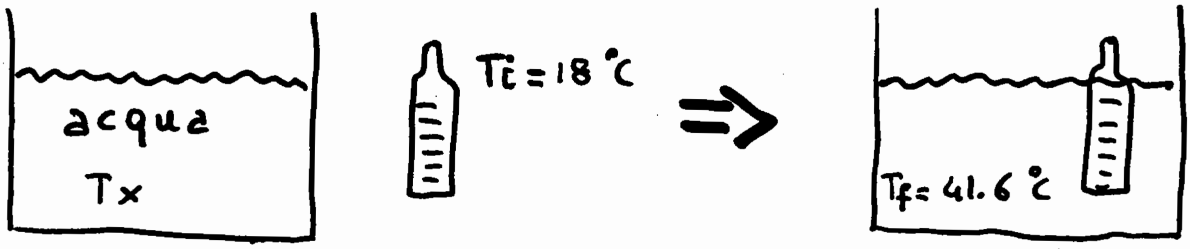
DAI DATI SI RICAVA

$Q_A \simeq 1670$ cal , $Q_r \simeq 342$ cal , $Q_p \simeq -2020$ cal

- IL CALORE ASSORBITO HA SEGNO POSITIVO
- IL CALORE CEDUTO HA SEGNO NEGATIVO

ESONERO 18-5-2001

UN TERMOMETRO DI VETRO (cal. spec. 840 J/kg·C) DI 25 g, CHE SEGNA 18 °C, VIENE IMMERSO IN UN RECIPIENTE, CHE CONTIENE 0.11 l DI ACQUA CALDA. ALL'EQUILIBRIO IL TERMOMETRO SEGNA 41.6 °C. QUALE ERA LA TEMPERATURA INIZIALE DELL'ACQUA?



- FACCIAMO L'IPOTESI CHE GLI SCAMBI DI CALORE AVVENGANO SOLO TRA IL TERMOMETRO E L'ACQUA

N.B. IL TERMOMETRO SI SCALDA, QUINDI L'ACQUA SI DEVE RAFFREDDARE, PERCIO' $T_x > 41.6$ °C

$Q_T = m_T \cdot c_T \cdot (T_f - T_i)$ – calore assorbito dal Termometro > 0

$Q_a = m_a \cdot c_a \cdot (T_f - T_x)$ – calore ceduto dall'acqua < 0

$$\underline{Q_T + Q_a = 0} \Rightarrow Q_T = -Q_a \Rightarrow \underline{|Q_T| = |Q_a|}$$

$$m_T \cdot c_T \,(T_f - T_i) = m_a \cdot c_a \,(T_x - T_f)$$

$$\Rightarrow \quad m_T \cdot c_T \cdot T_f - m_T \cdot c_T \cdot T_i + m_a \cdot c_a\, T_f = m_a \cdot c_a\, T_x$$

$$\Rightarrow \quad T_x = \frac{(m_T \cdot c_T + m_a \cdot c_a) T_f - m_T \cdot c_T \cdot T_i}{m_a \cdot c_a} =$$

$$= \frac{(0.025 \cdot 840 + 0.11 \cdot 4186) * 41.6 - 0.025 \cdot 840 \cdot 18}{0.11 \cdot 4186} = \underline{42.7\ °C}$$

PROBLEMA

UNA MISCELA DI ACQUA E GHIACCIO IN EQUILIBRIO CONTIENE 40 g DI GHIACCIO. IL RECIPIENTE NON E' ISOLATO E $T_{AMBIENTE} = 20$ °C. DOPO MEZZORA SI TROVA CHE 25 g DI GHIACCIO SI SONO FUSI. TROVARE Q, SPECIFICANDO IL SEGNO, SCAMBIATO DAL RECIPIENTE CON L'AMBIENTE.

o——o——o——o

QUESTO SISTEMA E' UN CALORIMETRO, PERMETTE CIOE' DI MISURARE IL CALORE

$$Q = L_F \cdot m_{ghiaccio} = 79.5 \ \frac{cal}{g} \cdot 25\, g = 1987.5 \ cal$$

$$Q = 1987.5 \ cal \cdot 4.18 \ \frac{J}{cal} = 8307.7 \ J$$

IL GHIACCIO SI E' SCIOLTO, QUINDI IL SISTEMA HA ASSORBITO CALORE, QUINDI PER CONVENZIONE IL SEGNO E' POSITIVO.

- LA TRASFORMAZIONE E' REVERSIBILE

- CALORE ASSORBITO DAL SISTEMA $Q > 0$
- LAVORO FATTO DAL SISTEMA $L > 0$

- CALORE CEDUTO DAL SISTEMA $Q < 0$
- LAVORO FATTO SUL SISTEMA $L < 0$

ESONERO 1 - ESERCIZIO 1

Esonero 1 - Esercizio 1 (7 punti)
Un campione di rame di massa 100 g viene riscaldato in un forno fino alla temperatura T. Poi viene inserito in un calorimetro di rame di massa 150 g, contenente 200 g di acqua. La temperatura iniziale dell'acqua e del calorimetro è 16 °C e la temperatura finale dopo che è stato raggiunto l'equilibrio è 38 °C. Quando si pesano il calorimetro e il suo contenuto, si osserva che sono evaporati 1.2 g di acqua. Quale era il valore della temperatura T?
Il calore specifico del rame è 387 $J/(Kg \cdot K)$ ed il calore latente di evaporazione dell'acqua è $2.26 \cdot 10^6$ J/Kg. Si trascurino scambi di calore con l'esterno.
(Risultato: T= 626 °C)

- CALORE CEDUTO DAL CAMPIONE DI RAME DI MASSA $m_1 = 100$ g

$$Q_1 = m_1 \cdot c_R \cdot (T - 38\,°C)$$

- CALORE ASSORBITO DAL CALORIMETRO DI RAME DI MASSA m_2

$$Q_2 = m_2 \cdot c_R \cdot (T_F - T_i) = 0.150 \cdot 387 \cdot (38 - 16) = 1277.1 \text{ J}$$

- 198.8 g DI ACQUA PASSANO DA 16 °C A 38 °C

$$Q_3 = m_A \cdot c_A \cdot (T_F - T_i) = 0.1988 \cdot 4186 \cdot (38 - 16) = 18\,307.9 \text{ J}$$

- 1.2 g DI ACQUA PASSANO DA 16 °C A 100 °C E POI EVAPORANO

$$Q_4 = m \cdot c_A \cdot (T_F - T_i) = 0.0012 \cdot 4186 \cdot (100 - 16) = 421.9 \text{ J}$$

$$Q_5 = m \cdot L_V = 0.0012 \cdot 2.26 \cdot 10^6 = 2712 \text{ J} \quad (\text{evaporazione})$$

- CALORE ASSORBITO $= Q_2 + Q_3 + Q_4 + Q_5 = 22\,718.9$ J
- DATO CHE NON CI SONO PERDITE DI CALORE CON L'ESTERNO SI HA:

$$Q_1 = Q_{ASS}$$

$$m_1 \cdot c_R \cdot (T - 38) = Q_{ASS}$$

$$T = \frac{Q_{ASS}}{m_1 \cdot c_R} + 38 =$$

$$= \frac{22718.9}{0.1 \cdot 387} + 38 = 625\,°C$$

ESONERO 3 - ESERCIZIO 1

Esonero 3 - Esercizio 1 (7 punti)
Una confezione di 6 lattine di alluminio, ciascuna di circa 0.35 l, piene di una bevanda, inizialmente a 27°C, viene posta in un recipiente di polistirolo espanso ben isolato termicamente. Quanti cubetti di ghiaccio di massa 30 g si devono aggiungere al recipiente affinché la temperatura finale della bevanda sia 4.0 °C? (Si trascurino le perdite di calore attraverso il recipiente ed il calore sottratto al polistirolo. Si trascuri la capacità termica delle lattine e si tenga presente che la bevanda è costituita prevalentemente di acqua.)
(Risultato: circa 19 cubetti)

- I CUBETTI DI GHIACCIO SONO A 0 °C
- IL CALORE LATENTE DI FUSIONE DEL GHIACCIO È $3.34 \cdot 10^5$ J/kg

- VALUTIAMO IL CALORE CHE DEVE ESSERE SOTTRATTO ALLE BEVANDE PER RAFFREDDARLE [N.B. 0.35 l = 0.35 kg]

$$|Q| = m \cdot c \cdot \Delta T = 6 \cdot 0.35 \cdot 4186 \cdot (27-4) = 202\,183.8 \text{ J}$$

- CALORE NECESSARIO PER FONDERE UN CUBETTO DI GHIACCIO

$$Q_1 = 3.34 \cdot 10^5 \cdot 0.03 = 10\,020 \text{ J}$$

- CALORE PER SCALDARE 30 g DI ACQUA DA 0 °C A 4 °C

$$Q_2 = m \cdot c \cdot \Delta T = 0.03 \cdot 4186 \cdot 4 = 502.3 \text{ J}$$

- QUINDI UN CUBETTO CONTRIBUISCE PER

$$Q_g = Q_1 + Q_2 = 10020 + 502.3 = 10522.3 \text{ J}$$

- IL NUMERO DI CUBETTI NECESSARI È:

$$N_{cubetti} = \frac{Q}{Q_g} = \frac{202.183.8}{10522.3} = 19.21 \simeq 19 \text{ cubetti}$$

PROBLEMA

UN TERMOMETRO DI MASSA 0.055 Kg E CAPACITA' TERMICA 46.1 J/K SEGNA 15 °C. VIENE POI IMMERSO COMPLETAMENTE IN 0.300 Kg DI ACQUA E SI PORTA ALLA SUA STESSA TEMPERATURA. SE IL TERMOMETRO INDICA 44.4 °C, QUALE ERA LA TEMPERATURA DELL'ACQUA PRIMA DELL'IMMERSIONE DEL TERMOMETRO? SI TRASCURINO LE ALTRE PERDITE DI CALORE.

o——o——o——o

- CONSIDERIAMO IL SISTEMA COSTITUITO DAL TERMOMETRO PIU' ACQUA COME ISOLATO, QUINDI NON VI SONO SCAMBI DI CALORE CON L'ESTERNO MA SOLO INTERNAMENTE.

- IL CALORE SCAMBIATO DALL'ACQUA VALE:

$$Q_A = m_A \cdot C_A \cdot (T_f - T_i) \quad ; \quad m_A = 0.300 \text{ Kg} \quad C = 4186 \frac{J}{Kg \cdot K} \quad T_f = 44.4 \,°C$$

$$Q_T = C\,(T_f - T_0) \quad ; \quad C = 46.1 \frac{J}{K} \quad ; \quad T_0 = 15 \,°C$$

$$\Rightarrow \quad Q_T + Q_A = 0$$

$$m_A \cdot C_A (T_f - T_i) + C \cdot (T_f - T_0) = 0$$

$$m_A C_A T_f - m_A C_A T_i = -C\,(T_f - T_0)$$

$$T_i = T_f + \frac{C}{m_A C_A}(T_f - T_0) =$$

$$= 44.4 + \frac{46.1}{0.300 \cdot 4186}(44.4 - 15) = 45.5 \,°C$$

N.B. LA TEMPERATURA DELL'ACQUA NON CAMBIEREBBE SOLO SE LA CAPACITA' TERMICA DEL TERMOMETRO FOSSE NULLA.

PROBLEMA

UN CONTENITORE DI RAME, DI MASSA 50.0 g, CONTIENE 250 g D'ACQUA A 20 °C. DEL VAPORE ACQUEO A 100 °C PUO' ESSERE IMMESSO NEL CONTENITORE. DETERMINARE LA QUANTITA' DI VAPORE NECESSARIA AFFINCHE' IL SISTEMA RAGGIUNGA LA TEMPERATURA FINALE DI 50 °C.
IL CALORE SPECIFICO DEL RAME E': 387 $\frac{J}{kg \cdot °C}$, MENTRE IL CALORE LATENTE DI EVAPORAZIONE DELL'ACQUA È $L_V = 2.26 \cdot 10^6$ J/kg

o—o—o—o

FACCIAMO L'IPOTESI CHE LO SCAMBIO DI CALORE AVVENGA SOLO TRA L'ACQUA, IL RAME ED IL VAPORE.

- CALORE NECESSARIO PER RISCALDARE IL RAME E L'ACQUA

$$Q = m_R \cdot C_R \, (T_F - T_i) + m_A \cdot C_A \cdot (T_F - T_i) =$$

$$= 0.05 \cdot 387 \cdot (50-20) + 0.25 \cdot 4186 \cdot (50-20) =$$

$$= 580.5 + 31'395 = \underline{31'975.5 \text{ J}}$$

- QUESTO CALORE VIENE FORNITO DALLA CONDENSAZIONE DI UNA MASSA m_x DI VAPORE E DAL SUCCESSIVO RAFFREDDAMENTO DELL'ACQUA LIQUIDA DA 100 °C A 50 °C.

$$|Q| = m_x \cdot L_V + m_x \cdot C_A \cdot \Delta T = m_x (L_V + C_A \cdot \Delta T)$$

$$\Rightarrow \quad m_x = \frac{|Q|}{L_V + C_A \cdot \Delta T} = \frac{31'975.5}{2.26 \cdot 10^6 + 4186 \cdot 50} = 0.0128 \text{ kg}$$

$\Rightarrow$ LA QUANTITA' DI VAPORE NECESSARIA È 13 GRAMMI

N.B. $m_x \cdot L_V = 0.013 \cdot 2.26 \cdot 10^6 = 29'275$ J [CONDENSAZIONE]

$m_x \cdot C_A \cdot \Delta T = 0.013 \cdot 4186 \cdot 50 = 2'700$ J [RAFFREDDAMENTO]

Primo Principio della Termodinamica

- Sistemi termodinamici
- Esperimento di Joule
- Energia interna
- Primo principio della Termodinamica
- Leggi dei gas
- Gas Perfetto
- Calori specifici dei gas

Sistemi Termodinamici

- Un sistema fisico sufficientemente grande da essere osservabile direttamente dai nostri sensi è detto un sistema macroscopico.

- Tale sistema viene descritto da parametri macroscopici, che descrivono le caratteristiche utili del sistema nel suo complesso. Questi parametri vengono chiamati variabili termodinamiche o parametri di stato (P, V, S, T, …).

- Un sistema macroscopico descritto attraverso i parametri di stato è detto un sistema termodinamico.

- Un sistema viene detto chiuso se non scambia materia con l'ambiente

- Un sistema viene detto isolato se non scambia né energia né materia con l'ambiente.

- L'insieme di sistema più ambiente si chiama universo

- Un sistema si dice in equilibrio termodinamico quando tutte le variabili intensive (pressione, temperatura, densità, etc…) sono le stesse in tutti i punti del sistema.

Trasformazioni termodinamiche

- Quando un sistema termodinamico cambia stato (cioè quando cambia nel tempo il valore dei suoi parametri di stato) si dirà che il sistema subisce una trasformazione.

  Vediamo ora alcuni di tipi di trasformazioni notevoli:

- Trasformazioni fra stati di equilibrio termodinamico.
  - Si passa da uno stato iniziale di equilibrio ad uno finale anch'esso di equilibrio.
  - Il sistema non può allora essere isolato.

- Trasformazioni cicliche.
  - Lo stato finale è uguale a quello iniziale.

- Trasformazioni quasi statiche.
  - Il sistema durante la trasformazione passa solo attraverso stati di equilibrio.

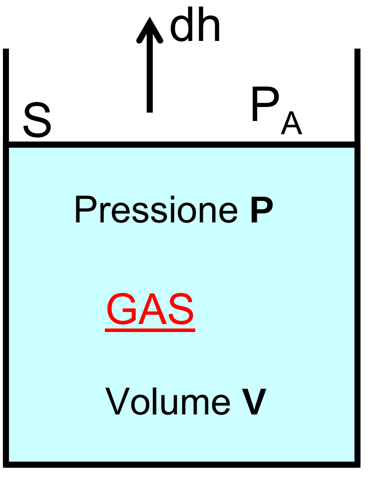
- Trasformazioni reversibili.
  - La trasformazione si dice reversibile se si può eseguire una trasformazione che riporti il sistema allo stato iniziale passando per la stessa successione di stati intermedi, semplicemente invertendo il segno di calore e lavoro scambiati. Un esempio di trasformazione reversibile è il passaggio di stato. Una trasformazione quasi statica e senza effetti dissipativi è reversibile.

- Trasformazione irreversibile.
  - Non è possibile tornare allo stato iniziale invertendo il segno del calore e del lavoro.

Trasformazioni termodinamiche

- Trasformazioni spontanee.
  - Un sistema lontano dall'equilibrio lasciato libero di evolversi, si porterà in uno stato di equilibrio. È una trasformazione irreversibile.
- Trasformazioni adiabatiche. Q=0
  - Non c'è scambio di calore con l'esterno.
- Trasformazioni isoterme. T=costante.
- Trasformazioni isovolumiche (isocore). V=costante.
- Trasformazioni isobare. P=costante.

Lavoro in una trasformazione termodinamica.



Cilindro riempito di gas a pressione P e volume V, mantenuto chiuso da un pistone mobile di superficie S.

- Ipotesi: la pressione ambiente P_A è uguale alla pressione interna P, allora il pistone non si muove.
- Il pistone si muove se $P_A \neq P$.
- In una trasformazione reversibile $\Delta P = P_A - P$ = infinitesimo.
- In una trasformazione irreversibile $\Delta P = P_A - P$ = valore finito.

- Immaginiamo che il pistone si espanda di dh in modo reversibile:

$$\delta L = F \cdot dh = (P \cdot S)dh = P(S \cdot dh) = P \cdot dV$$

P è lo stesso in tutto il volume del gas (stato di equilibrio)

- N.B. in caso di trasformazione irreversibile occorre considerare la pressione esterna contro cui si espande il pistone

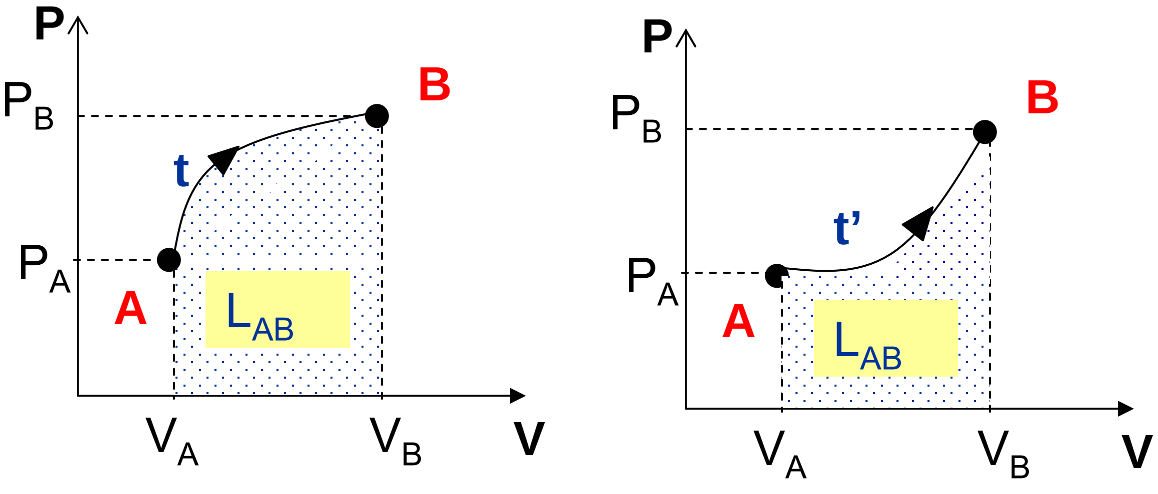
:

$$\delta L = P_A \cdot dV$$

- Il lavoro totale si calcola come: $$L = \int_{V_1}^{V_2} P \cdot dV$$

- Convenzione sui segni:
  - **Lavoro fatto dal sistema (espansione) => L POSITIVO**
  - **Lavoro fatto sul sistema (compressione) => L NEGATIVO**

Piano di Clapeyron (PV)



- Gli stati termodinamici possono essere rappresentati in un piano Pressione-Volume (piano di Clapeyron)

- Se la trasformazione da **A** a **B** è reversibile, i due stati possono essere congiunti dalla curva che rappresenta istante per istante i punti di equilibrio attraverso i quali passa il sistema.

- Il lavoro compiuto dal sistema per andare dallo stato A allo stato B lungo la curva t è uguale a:

$$L^{t}{}_{AB} = \int_{A}^{B}{}_{t}\, P \cdot dV$$

- Il lavoro dipende dal tipo di trasformazione (percorso) fatta per andare da **A** a **B**:

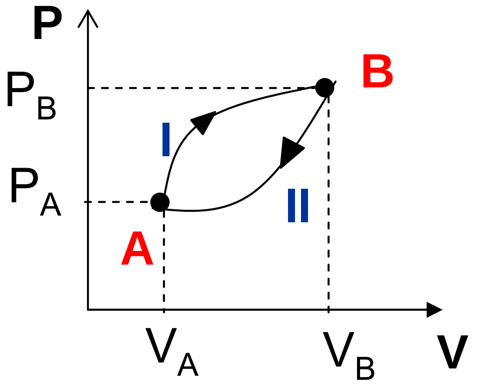
$$L^{t}{}_{AB} \neq L^{t'}{}_{AB}$$

- In una trasformazione reversibile il lavoro è pari all'area racchiusa dalla curva P(V) e dall'asse delle ascisse.

- Se la trasformazione è reversibile, allora da **B** si può tornare ad **A**:

$$L^{t}{}_{BA} = \int_{B}^{A}{}_{t}\, P \cdot dV = -\int_{A}^{B}{}_{t}\, P \cdot dV = -L^{t}{}_{AB}$$

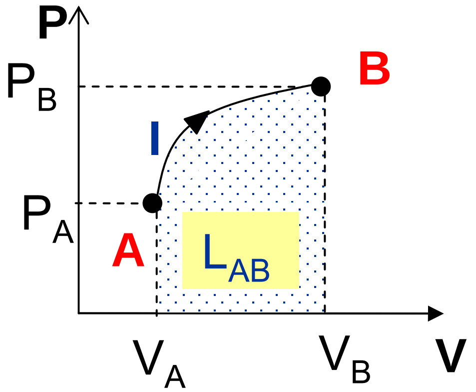
Lavoro nel piano PV



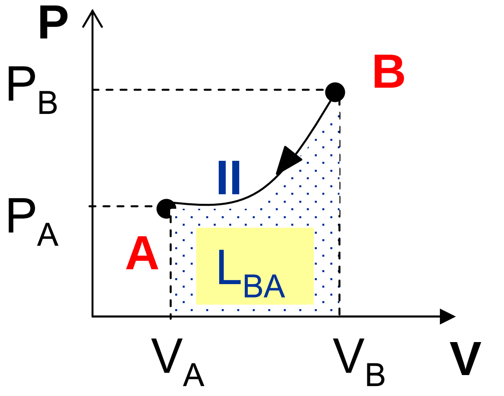
- Consideriamo una trasformazione ciclica qualsiasi. Il lavoro sarà pari a:

$$\boxed{L = \oint P \cdot dV}$$

- Dividiamo il ciclo in due percorsi: il percorso **I** ed il percorso **II**.



Lavoro durante l'espansione da A a B lungo il percorso I

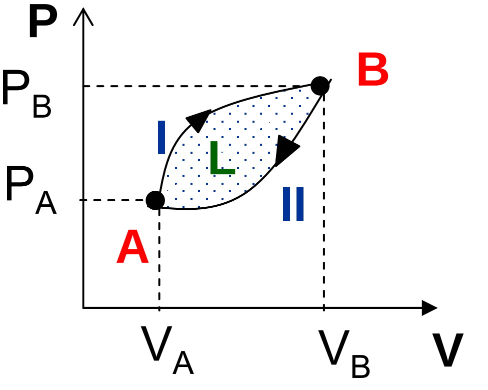


Lavoro durante la compressione da B ad A lungo il percorso II

- Il lavoro totale lungo il ciclo vale:

$$L = \oint PdV = \int_A^B {}_I\, PdV + \int_B^A {}_{II}\, PdV =$$

$$= L^I{}_{AB} - \left| L^{II}{}_{AB} \right|$$

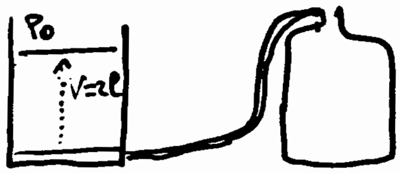


Il lavoro è uguale all'area racchiusa dal ciclo.

- Ciclo percorso in senso orario => L positivo
- Ciclo percorso in senso antiorario => L negativo

PROBLEMA

UNA BOMBOLA CONTIENE 100 LITRI DI GAS A 20 atm ED È COLLEGATA AD UN CILINDRO CON PISTONE TRAMITE UNA VALVOLA CHE FA FLUIRE IL GAS MOLTO LENTAMENTE.
IL CILINDRO HA UN VOLUME DI 2 LITRI E IL PISTONE È POGGIATO INIZIALMENTE SUL FONDO. TROVARE IL LAVORO MECCANICO FATTO DAL SISTEMA (GAS) QUANDO IL PISTONE SI È COMPLETAMENTE ESPANSO.



- LA TRASF. È IRREVERSIBILE
- SUL PISTONE AGISCE LA PRESSIONE ESTERNA P_0
  (TRASCURANDO IL PESO DEL PISTONE)
- IL LAVORO FATTO DAL PISTONE VALE:

$$\delta L = P_0\, dV$$

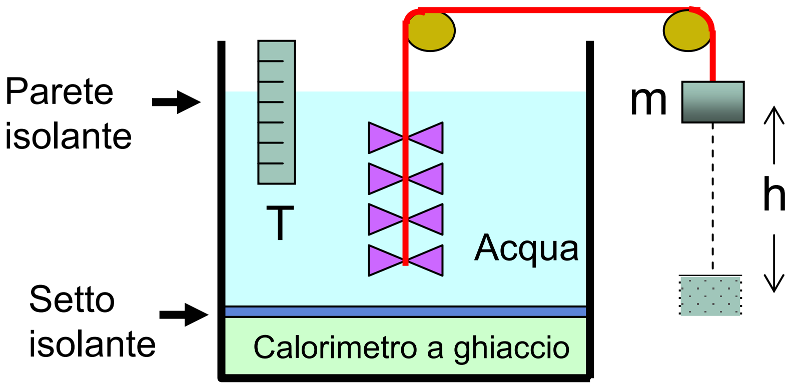
$$L = \int_0^V P_0\, dV = P_0 \int_0^V dV = P_0 V$$

$$L = P_0 V = 1 \text{ atm} \cdot 2\,\ell =$$

$$= 1.01 \cdot 10^5 \cdot 2 \cdot 10^{-3} = 2.03 \cdot 10^2 \text{ J}$$

- SE NON CI FOSSE STATA L'ATMOSFERA, QUANTO SAREBBE STATO IL LAVORO?

Esperimento di Joule. Equivalente meccanico della caloria



Esperimento concettuale

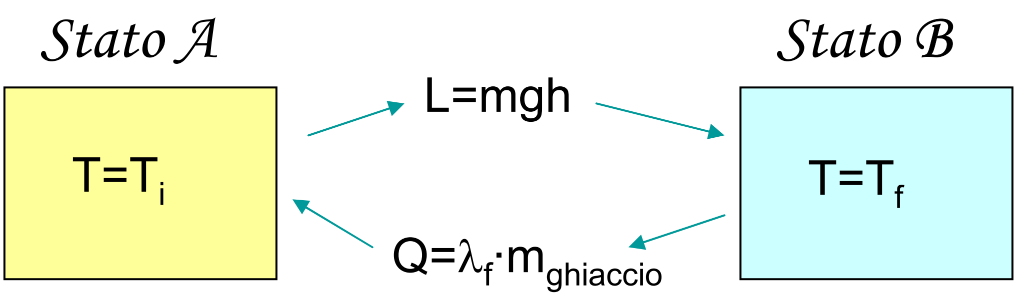
- Prendiamo un mulinello immerso in un contenitore isolante, che non permette scambi di calore con l'esterno, contenente acqua.
- Il mulinello è collegato ad una massa m che può scendere di una quota h.
- Un termometro T permette di misurare la temperatura dell'acqua.
- L'acqua può scambiare calore con un calorimetro a ghiaccio (che si trova a T=0 ºC) togliendo un setto isolante.
- <u>Esperimento:</u>

1) Si misura la temperatura dell'acqua T_i
2) Si fa scendere la massa m => $L = \Delta U_g = mgh$
3) Si misura di nuovo la temperatura dell'acqua e si trova che è aumentata. $T_f > T_i$
4) Si toglie il setto isolante. Del calore passa dall'acqua al calorimetro. Il ghiaccio comincia a fondere.
   Quando $T=T_i$ il calore trasferito al calorimetro vale Q (misurato dalla quantità di ghiaccio che si è sciolto).

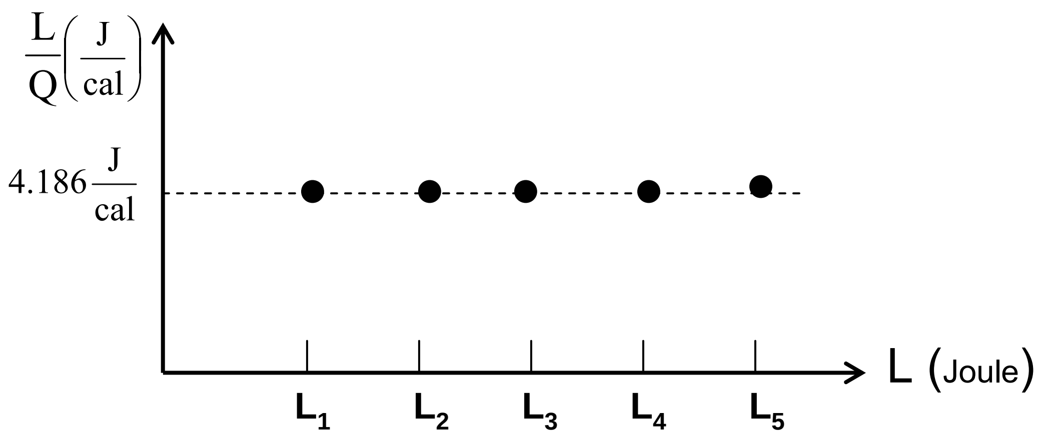
⇨ **<u>Siamo tornati nello stesso stato iniziale (stessa temperatura)</u>**

N.B. Provate a valutare le variazioni di temperatura facendo ipotesi ragionevoli.

Esperimento di Joule



- Ripetiamo l'esperimento cambiando il lavoro fatto dal mulinello sull'acqua.
  Si può fare cambiando la massa m oppure l'altezza h
- Per ogni valore di L si misura il corrispondente valore di Q necessario per riportare il sistema nello stato iniziale.
- Costruiamo il grafico seguente:



- In una trasformazione ciclica il rapporto tra il lavoro fatto sul sistema ed il calore sottratto è una costante universale.

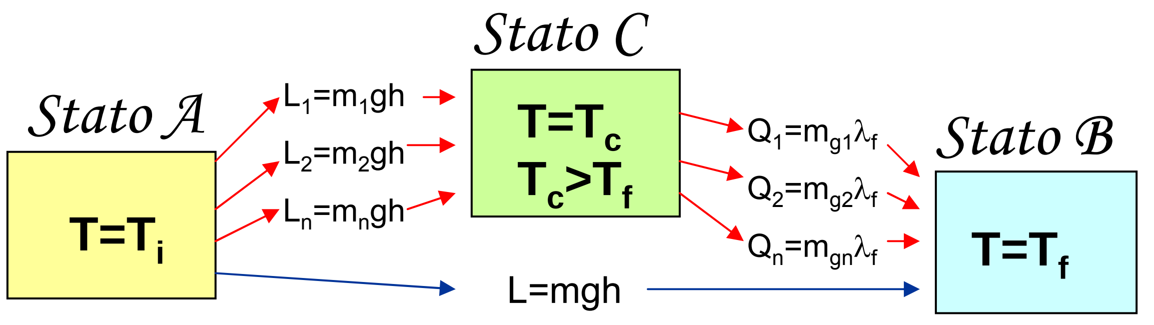
$$\boxed{\frac{L}{Q} \equiv J = 4.186\frac{J}{cal}}$$

(equivalente meccanico della caloria)

- Se uso le stesse unità di misura per il lavoro ed il calore, in una trasformazione ciclica si ha:

$$\boxed{Q - L = 0}$$

Energia interna U



- Stato iniziale (stato A): acqua a temperatura T_i
  Stato finale (stato B): acqua a temperatura T_f
  Stato intermedio (stato C): acqua a temperatura $T_c > T_f$
- Lo stato C viene raggiunto facendo cadere una massa $m_i > m$
- Dallo stato C si può andare allo stato B facendo passare del calore dall'acqua al calorimetro.
  In questo modo l'acqua si raffredda fino alla temperatura $T=T_f$
- Si può passare dallo stato A allo stato B in vari modi, "scambiando" diversi calori e lavori:
- Abbiamo:
  1) $L_1 = m_1 gh$; $Q_1=m_{g1}\cdot\lambda_f$
  2) $L_2 = m_2 gh$; $Q_2=m_{g2}\cdot\lambda_f$
  3) $L_i = m_i gh$; $Q_i=m_{gi}\cdot\lambda_f$
  4) $L_n = m_n gh$; $Q_n=m_{gn}\cdot\lambda_f$
  5) $L = mgh$; $Q=0$ [caso particolare]

Energia interna U

- Per andare dallo stato A ($T=T_i$) allo stato B ($T=T_f$), il sistema (acqua) scambia con l'ambiente calore e lavoro.
- Calore e lavoro scambiati sono diversi in funzione del tipo di trasformazione eseguita.
- Qualunque sia il tipo di trasformazione, sperimentalmente, si trova sempre che:

$$\boxed{Q_1 - L_1 = Q_2 - L_2 = \cdots Q_i - L_i = \cdots Q_n - L_n}$$

- Ovvero:

$$\boxed{Q - L = \text{ costante}}$$

- Se cambiamo lo stato iniziale ($T_i' \neq T_i$) oppure lo stato finale ($T_f' \neq T_f$) e ripetiamo l'esperimento troviamo:

$$\boxed{Q' - L' = \text{ costante}'}$$

- La grandezza Q-L non dipende dal tipo di trasformazione eseguita, ma dipende solo dallo stato iniziale e dallo stato finale (ricordate il lavoro di una forza conservativa?)
- Quindi Q-L è uguale alla variazione di una funzione di stato. Una funzione che dipende solo dal valore dei parametri di stato.
- Tale funzione di stato si chiama Energia Interna **U** (oppure $\mathbf{E_{int}}$).

Primo principio della termodinamica

$$\boxed{Q - L = U(B) - U(A) = \Delta U}$$

- L'energia interna U(P,V,T) è funzione dei parametri di stato.
- Nella relazione $Q-L=\Delta U$ compare solo come differenza, quindi è definita a meno di una costante arbitraria.
- Consideriamo ora un tratto elementare di una trasformazione reversibile (cioè che passa solo per stati di equilibrio):

$$\boxed{\delta Q - \delta L = dU}$$

- dU è un differenziale esatto (corrisponde cioè alla variazione di una funzione di stato), mentre δQ e δL sono solo quantità piccole, ma non sono differenziali esatti, perché il loro valore dipende dal tipo di trasformazione.

Convenzione sui segni !

Il calore assorbito dal sistema è positivo

Il calore ceduto dal sistema è negativo

Il lavoro fatto dal sistema è positivo

Il lavoro fatto sul sistema è negativo

Primo principio: conservazione dell'energia

- Ricordate dalla meccanica che nel caso del lavoro fatto in un campo di forze conservative si aveva:

$$\mathbf{L = \Delta U}$$ (variazione dell'energia potenziale)

lavoro fatto **sul** campo

Il lavoro fatto **dal** campo vale $\mathbf{L = -\Delta U}$

- Nel caso di forze non conservative (attrito) non vale il principio di conservazione dell'energia meccanica.

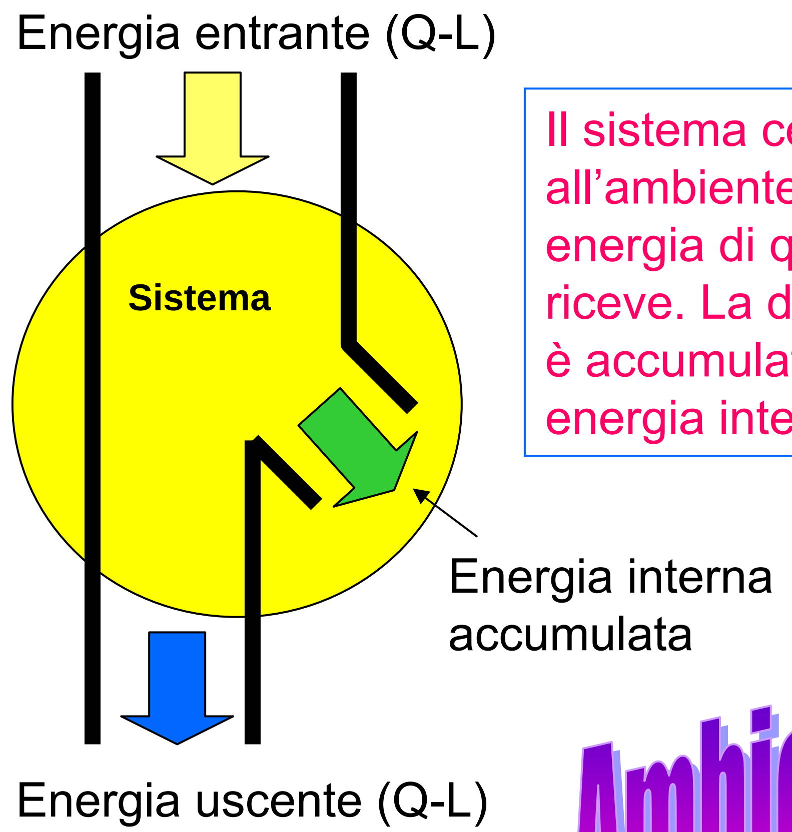
- Il primo principio della termodinamica ristabilisce la legge di conservazione dell'energia introducendo un'altra forma attraverso la quale può essere scambiata energia: il calore.

$$\mathbf{\Delta U = Q - L}$$ (U=energia interna)

- Alcuni esempi di trasformazioni:
  - Adiabatica: $Q=0 \Rightarrow \Delta U = -L$
  - Isocora : $\Delta V=0 \Rightarrow L=0 \Rightarrow \Delta U = Q$

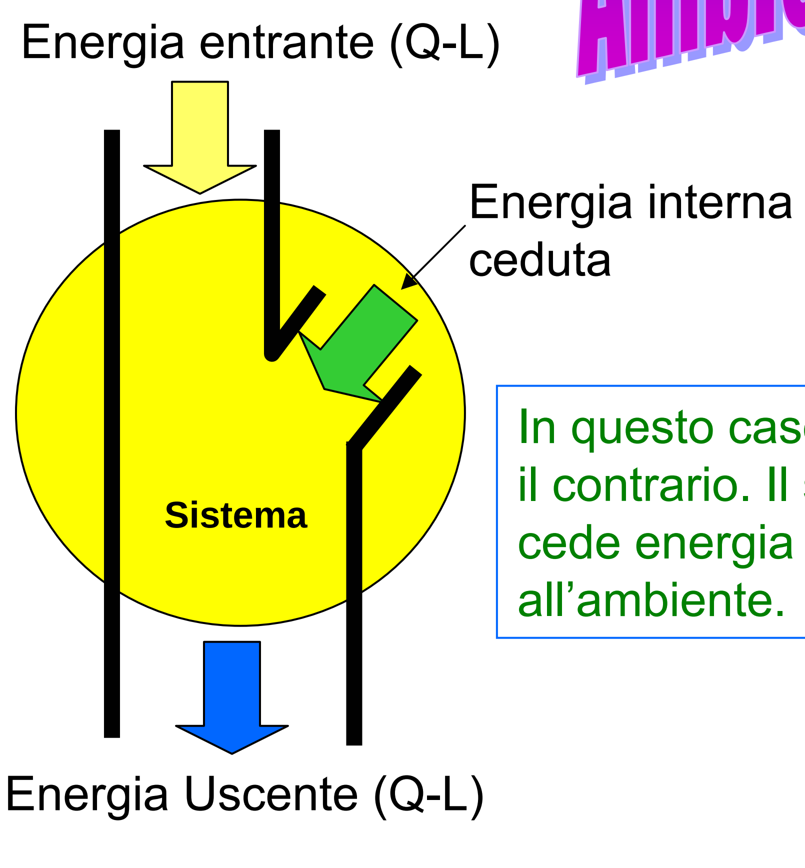
    (riscaldare un corpo a volume costante implica un aumento della sua energia interna)
  - Trasformazione ciclica: $\Delta U=0 \Rightarrow Q=L$

Primo principio della termodinamica



Il sistema cede all'ambiente meno energia di quanta ne riceve. La differenza è accumulata come energia interna

Ambiente



In questo caso è vero il contrario. Il sistema cede energia all'ambiente.

ESERCIZI CONSIGLIATI

Primo principio della termodinamica

- Serway (3° Edizione) – Cap. 17
  - 21 - 23
- Halliday (5° Edizione) – Cap. 19
  - 41E – 43E – 45P

PROBLEMA

UN GAS È CONTENUTO DENTRO UN RECIPIENTE A VOLUME COSTANTE TERMICAMENTE ISOLATO. ALL'INTERNO, UNA RESISTENZA ELETTRICA VIENE ALIMENTATA IN MODO DA DISSIPARE UNA POTENZA W DI 100 W PER UN QUARTO D'ORA.

DI QUANTO VARIA L'ENERGIA INTERNA DEL GAS?

$$Q - L = \Delta U$$

- VOLUME COSTANTE $\Rightarrow L = P\Delta V = 0$
- $\Rightarrow Q = \Delta U$
- CALCOLIAMO IL CALORE DISSIPATO DALLA LAMPADA

$$Q = W \cdot \Delta t = 100 \cdot (15 \text{ min}) \cdot \left(60 \frac{s}{\text{min}}\right) = 9 \cdot 10^4 \text{ J}$$

$$\Rightarrow \Delta U = Q = 9 \cdot 10^4 \text{ J}$$

PROVA SCRITTA - 24 NOVEMBRE 1997

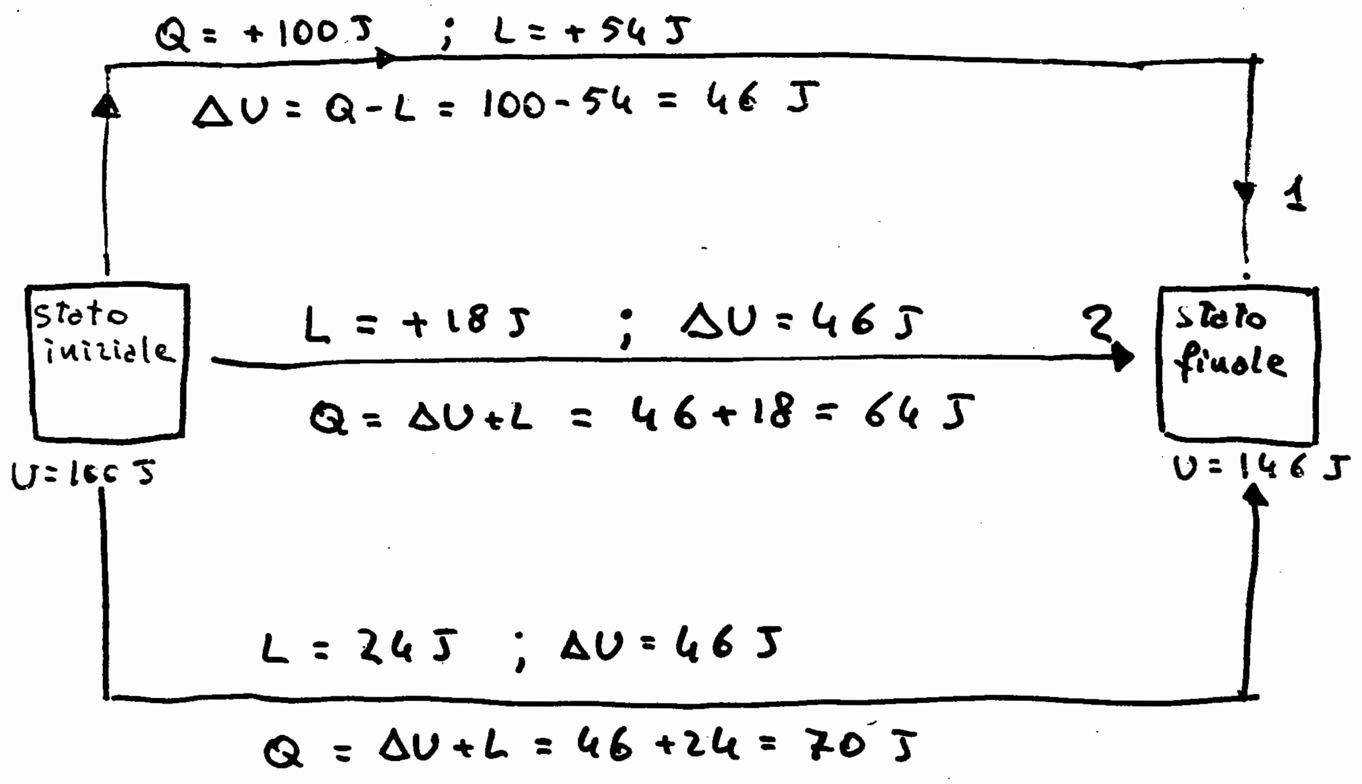
TRE SISTEMI TERMODINAMICI IDENTICI, INIZIALMENTE NELLO STESSO STATO, CON ENERGIA INTERNA DI 100 J, SUBISCONO TRE DIFFERENTI ESPANSIONI, CHE LI PORTANO NELLO STESSO STATO FINALE. NEL CORSO DELLA PRIMA TRASFORMAZIONE IL SISTEMA ACQUISTA UN CALORE DI 100 J E COMPIE UN LAVORO DI 54 J. NEL CORSO DELLA SECONDA TRASFORMAZIONE IL LAVORO E' DI 18 J. NELLA TERZA TRASFORMAZIONE E' DI 24 J. SI CALCOLI:

a) IL CALORE (SPECIFICANDO IL SEGNO) DELLA SECONDA TRASFORMAZIONE

b) IL CALORE (" " ") " TERZA "

c) L'ENERGIA INTERNA DELLO STATO FINALE DOPO LA PRIMA TRASFORMAZIONE.

o——o——o——o



- LO STATO INIZIALE E FINALE E' LO STESSO, E DATO CHE L'ENERGIA INTERNA E' UNA FUNZIONE DI STATO, ΔU E' LO STESSO IN TUTTE E TRE LE TRASFORMAZIONI
- IL SISTEMA SI ESPANDE, QUINDI IL LAVORO E' SEMPRE POSITIVO

PROBLEMA

UN GAS ALLA PRESSIONE ATMOSFERICA P_0 E' CONTENUTO IN UN CILINDRO CON PISTONE TERMICAMENTE ISOLATO E DI MASSA TRASCURABILE, DI VOLUME $V_i = 5\ \ell$. DENTRO IL RECIPIENTE VENGONO POSTI ALCUNI GRAMMI DI GHIACCIO (a 0°C), CHE LENTAMENTE SI SCIOGLIE. SI RISCONTRA CHE IL PISTONE SI ABBASSA. IL SISTEMA RAGGIUNGE L'EQUILIBRIO QUANDO SI E' SCIOLTO UN GRAMMO DI GHIACCIO: IL VOLUME DEL GAS SI E' RIDOTTO A 3.7 ℓ. DI QUANTO E' VARIATA L'ENERGIA INTERNA DEL GAS?
(la pressione non varia durante la trasformazione)

o——o——o——o

$$\Delta U = Q - L$$

- IL GHIACCIO FA PARTE DELL'AMBIENTE ESTERNO RISPETTO AL GAS: IL GHIACCIO PER SCIOGLIERSI DEVE ASSORBIRE CALORE CHE E' CEDUTO DAL GAS:

$$Q = -L_F \cdot m_{ghiaccio} = -79.6 \cdot 1 = -79.6\ cal = -7.9 * 4.186 = -333\ J$$

IL LAVORO COMPIUTO DAL GAS E' NEGATIVO PERCHE' IL SUO VOLUME SI E' RIDOTTO

$$L = P_0 \cdot \Delta V = P_0 (V_F - V_i) = 1\,atm (3.7 - 5\ \ell) = -1.3\ atm \cdot \ell =$$

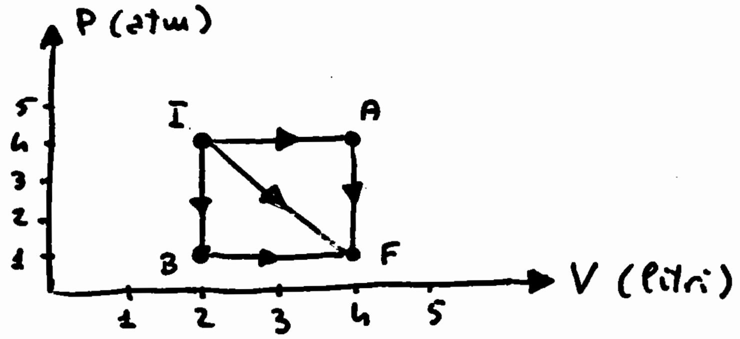
$$= -1.3 * 1.01 * 10^5 * 10^{-3} = -132\ J$$

- LA VARIAZIONE DI ENERGIA INTERNA VALE:

$$\Delta U = Q - L = -333 - (-132) = -201\ J$$

PROBLEMA (SERWAY)

UN GAS SI ESPANDE DA I A F LUNGO TRE POSSIBILI CAMMINI COME INDICATO IN FIGURA. CALCOLARE IL LAVORO FATTO DAL GAS LUNGO I CAMMINI IAF, IF, IBF



$$\boxed{L = \int_{V_i}^{V_f} P\,dV}$$

- IAF: $L_{IAF} = L_{IA} + L_{AF}$

$L_{IA} = P_I \cdot (V_A - V_I) = 4\,atm \cdot (4\,\ell - 2\,\ell) = 8\,atm \cdot \ell$

$L_{AF} = 0 \quad \Rightarrow \quad \underline{L_{IAF} = 8\,atm \cdot \ell}$

- IBF: $L_{IBF} = L_{IB} + L_{BF}$

$L_{IB} = 0$

$L_{BF} = P_B \cdot (V_F - V_B) = 1\,atm \cdot (4\,\ell - 2\,\ell) = 2\,atm \cdot \ell$

$\Rightarrow L_{IBF} = \underline{2\,atm \cdot \ell}$

- IF: DOBBIAMO CALCOLARE L'AREA SOTTO LA CURVA

AREA TRIANGOLO IBF = (base · altezza)/2

base = $V_F - V_B = 4\,\ell - 2\,\ell = 2\,\ell$

altezza = $P_I - P_B = 4\,atm - 1\,atm = 3\,atm$

area = $(2\,\ell \cdot 3\,atm)/2 = 3\,atm \cdot \ell$

AREA RETTANGOLO BF-ASCISSA = $(V_F - V_B) \cdot P_B = (4\,\ell - 2\,\ell) \cdot 1\,atm = 2\,atm \cdot \ell$

$L_{IF} = 3\,atm \cdot \ell + 2\,atm \cdot \ell = \underline{5\,atm \cdot \ell}$

PROBLEMA (SERWAY)

UNA MASSA DI 1 kg DI AZOTO GASSOSO E' CONTENUTA IN UN CILINDRO CHIUSO DA UN PISTONE MOBILE, SOGGETTO ALLA PRESSIONE ESTERNA DI 1 atm. IL GAS ASSORBE, IN UNA TRASFORMAZIONE ISOBARICA, UNA QUANTITA' DI CALORE $Q = 25 \cdot 10^3$ cal, E LA SUA ENERGIA INTERNA AUMENTA DI 8000 cal.

DETERMINARE: a) IL LAVORO COMPIUTO DAL GAS, b) LA VARIAZIONE DI VOLUME.

$$\Delta U = Q - L$$

$$\Rightarrow \quad L = Q - \Delta U = 25 \cdot 10^3 - 8 \cdot 10^3 = 17 \cdot 10^3 \text{ cal} =$$

$$= 17 \cdot 10^3 * 4.186 = 71.2 \text{ kJ}$$

- DATO CHE LA TRASFORMAZIONE E' ISOBARA

$$L = P \Delta V \quad \Rightarrow \quad \Delta V = \frac{L}{P}$$

$$\Delta V = \frac{L}{P} = \frac{71.2 \cdot 10^3}{1.01 \cdot 10^5} = 0.705 \text{ m}^3 = 705 \ \ell.$$

IL LAVORO E' POSITIVO, QUINDI IL GAS SI E' ESPANSO DI 705 ℓ.

- TROVIAMO IL NUMERO DI MOLI DEL GAS:

$$n = \frac{m \text{ (grammi)}}{\text{Peso Molecolare}} = \frac{1000}{28} = 35.7 \text{ moli}$$

Mole e Numero di Avogadro

- **<u>Quantità di materia: mole</u>**
una mole di una sostanza corrisponde ad una quantità di materia la cui massa espressa in grammi è pari al peso molecolare.
Esempio: ossigeno - molecola O_2 ; PM ≈ 32 (8p+8n+8p+8n)
=> una mole di ossigeno è equivalente ad una massa di 32 g

- **<u>Esercizio:</u>**
50 g di azoto a quante moli corrispondono?
La molecola di azoto è N_2; PM=28

$$\Rightarrow \quad n_{\text{moli}} = \frac{\text{m(grammi)}}{\text{PM}} = \frac{50}{28} = 1.79 \text{ moli}$$

- **<u>Numero di Avogadro: N_A</u>**
Amedeo Avogadro nel 1811 formulò l'ipotesi che due volumi di gas ad uguale volume e temperatura contengono lo stesso numero di molecole.

Esperimenti successivi dimostrarono che una mole di gas contiene sempre il medesimo numero di molecole pari a:

$N_A=6.0221\cdot10^{23}$ **(numero di Avogadro)**

- La mole è un'unità fondamentale del S.I.
  - Si chiama mole una quantità di materia che contiene tante entità elementari quanti sono gli atomi conenuti in 12 g dell'isotopo ^{12}C del carbonio, ovvero $N_A=6.0221\cdot10^{23}$ entità elementari

- Esempio: una mole di palle da tennis è uguale a:

$6.0221\cdot10^{23}$ palle da tennis

Leggi dei gas

- **Prima legge di Gay-Lussac:**

  il volume di un gas a pressione costante è direttamente proporzionale alla temperatura assoluta del gas.

  $$\boxed{V = \left(\frac{V_0}{273.15}\right) \cdot T}$$

  V_0=volume alla temperatura di 0 ºC

  oppure: $\boxed{\frac{V_1}{T_1} = \frac{V_2}{T_2}}$ (a pressione costante)

- **Seconda legge di Gay-Lussac:**

  la pressione di un gas a volume costante è direttamente proporzionale alla temperatura assoluta del gas.

  $$\boxed{P = \left(\frac{P_0}{273.15}\right) \cdot T}$$

  P_0=pressione alla temperatura di 0 ºC

  oppure: $\boxed{\frac{P_1}{T_1} = \frac{P_2}{T_2}}$ (a volume costante)

- **Legge di Boyle:**

  a temperatura costante si ha:

  $$\boxed{P \cdot V = \text{costante}}$$

  ovvero: $\boxed{P_1 \cdot V_1 = P_2 \cdot V_2}$ (a temperatura costante)

Equazione di stato dei gas ideali

- Combinando insieme le tre leggi dei gas, si verifica sperimentalmente che vale la relazione:

$$\boxed{\frac{P_1 \cdot V_1}{T_1} = \frac{P_2 \cdot V_2}{T_2}}$$

- Mantenendo costante P oppure V oppure T si ritrovano le tre leggi dei gas.

- La relazione precedente si può riscrivere nel modo seguente:

$$\frac{P \cdot V}{T} = \text{costante} \quad \Rightarrow \quad \frac{P \cdot V}{T} = n \cdot R$$

costante dei gas

numero di moli

- Sperimentalmente si trova che una mole di gas a T=0 ºC [273.15 K] e P=1 atm [101325 Pa] (condizione standard STP) occupa un volume V=22.41410 l [$22.41410 \cdot 10^{-3}$ m^3]

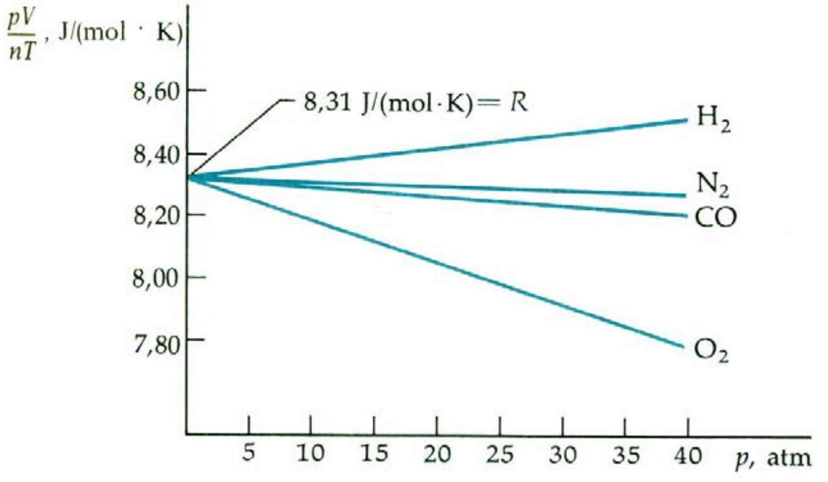
- Ricaviamo il valore di R:

$$\boxed{R = \frac{P \cdot V}{n \cdot T} = \frac{101.325 \times 22.41410}{1 \times 273.15} = 8.314 \ \frac{J}{mol \cdot K}}$$

$$\left[R = 0.08205 \ \frac{atm \cdot l}{mol \cdot K} \quad = 1.987 \ \frac{cal}{mol \cdot K} \right]$$

- Domanda: tutti i gas obbediscono alla legge **PV=nRT** per qualsiasi valore di P, V, T?

Gas perfetto (gas ideale)
PV = nRT



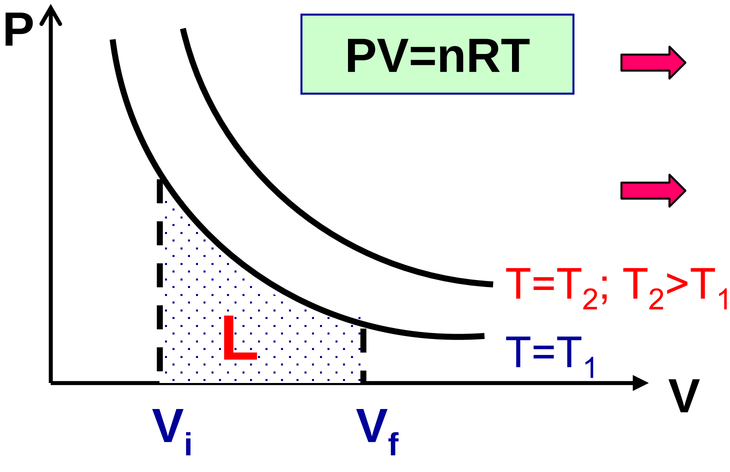
- A parità di pressione, gas diversi presentano un diverso valore di R
- Lo stesso gas a diversi valori di P presenta un R diverso, però se si fa tendere P a zero allora tutti i valori di R convergono verso lo stesso valore di R=8.314 J/mol·K

$$P = n \cdot \frac{RT}{V} \;\; ; \;\; n = \frac{m}{PM} \quad \Rightarrow P = \frac{m}{PM} \cdot \frac{RT}{V} \;\; ; \;\; \rho = \frac{m}{V} \quad \Rightarrow \; P = \rho \frac{RT}{PM}$$

- Fare tendere P a zero equivale a fare tendere a zero la densità del gas.
- Densità molto bassa vuol dire che le molecole del gas sono molto lontane le une dalle altre e non interagiscono più tra di loro.
- Un gas perfetto è un gas per il quale si può trascurare l'interazione reciproca delle molecole. In altri termini possiamo dire che l'energia di interazione è trascurabile rispetto all'energia cinetica media delle particelle. Quest'ultima condizione si realizza anche per temperature elevate del gas.

N.B. $$\boxed{k = \frac{R}{N_A} = \frac{8.314}{6.022 \cdot 10^{23}} = 1.38 \cdot 10^{-23} \frac{J}{K} \quad [\text{costante di Boltzman}]}$$

Lavoro svolto da un gas ideale a temperatura costante



PV=nRT ⇒ PV= costante

⇒ $P = \dfrac{\text{cost.}}{V}$ (iperbole)

- Consideriamo n moli di gas contenute in un cilindro chiuso da un pistone libero di muoversi e a contatto con una sorgente termica a temperatura T.
- Il gas si espande dal volume V_i fino a V_f. Durante l'espansione la temperatura del gas rimane costante.
  <u>Consideriamo una trasformazione reversibile.</u>
- Il lavoro compiuto dal gas vale:

$$L = \int_{V_i}^{V_f} P \cdot dV \quad ; \quad P = \frac{nRT}{V}$$ [questo vale per un gas perfetto]

$$L = \int_{V_i}^{V_f} \frac{nRT}{V} dV$$

- Se il gas passa da V_i a V_f con una trasformazione isoterma, si ha:

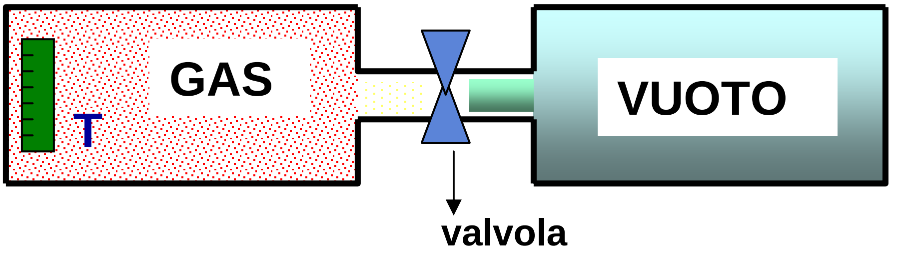
$$L = nRT \int_{V_i}^{V_f} \frac{dV}{V} = nRT \cdot \ln V \Big|_{V_i}^{V_f} = nRT \cdot \ln \frac{V_f}{V_i}$$

$$\boxed{L = nRT \cdot \ln \frac{V_f}{V_i}}$$

Se $V_f > V_i$ => L è positivo (espansione)

Se $V_f < V_i$ => è negativo (compressione)

Energia interna di un gas ideale.
Esperienza di Joule (espansione libera)



- Il gas è contenuto in un recipiente a pareti rigide ed adiabatiche, ed è collegato tramite una valvola ad un secondo recipiente rigido ed adiabatico in cui è stato fatto il vuoto.
- Il gas è quindi isolato termicamente dall'esterno.

- Si apre la valvola e si lascia espandere liberamente il gas nel secondo recipiente.
- Si aspetta il ristabilirsi dell'equilibrio termodinamico.

- Si trova che il volume del gas è cambiato, la pressione è cambiata, ma non è cambiata la temperatura del gas misurata con il termometro T (questo è valido a rigore solo per un gas ideale).

- Il gas non ha scambiato calore con l'esterno (Q=0).
- Le pareti del contenitore sono rigide, quindi il gas non ha "scambiato" lavoro con l'esterno (L=0).

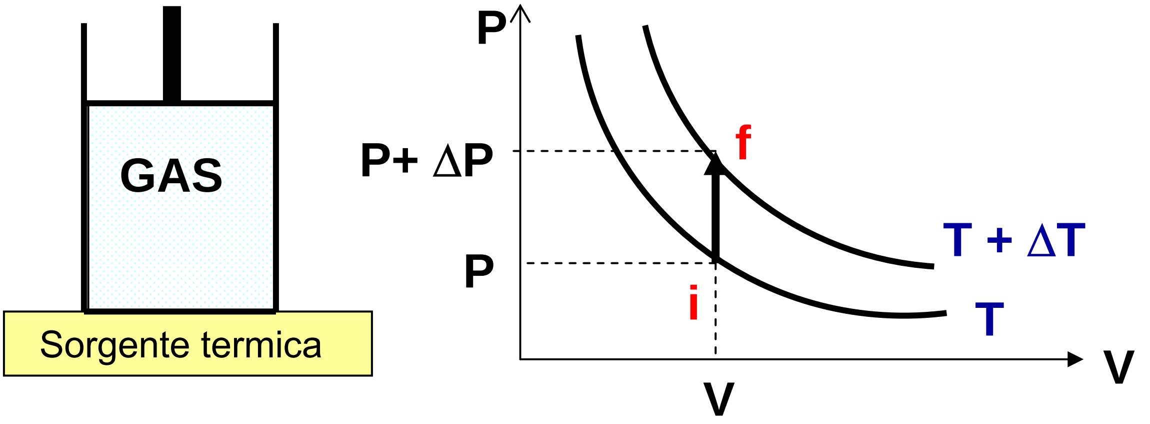
- Allora: $\boxed{\Delta U = Q - L \quad = 0 - 0 \quad = 0}$

  non è variata l'energia interna del gas.

- Dato che la sola variabile termodinamica che non è cambiata è la temperatura, se ne conclude che l'energia interna di un gas perfetto è funzione solo della sua temperatura:

$$\boxed{U = U(T)}$$

Gas perfetto: calore specifico molare a volume costante



- Consideriamo **n** moli di un gas perfetto contenute in un cilindro chiuso da un pistone.
- Il volume del gas viene mantenuto costante durante la trasformazione.

- Il gas è a contatto con una sorgente termica a temperatura **T** con la quale può scambiare calore.
- Forniamo calore al gas aumentando la temperatura della sorgente di Δ**T**.

- La pressione del gas aumenta da **P** a **P + ΔP**.

- Capacità termica: $\boxed{C = \frac{Q}{\Delta T}}$

- Calore specifico molare (a volume costante): $\boxed{c_V = \frac{C}{n}}$

- Quindi sussiste la seguente relazione tra il calore fornito al gas a volume costante, la variazione di temperatura ed il calore specifico molare a volume costante:

$$\boxed{Q = n \cdot c_V \cdot \Delta T}$$

C_V molare

- Sperimentalmente si trova che per un gas monoatomico si ha:

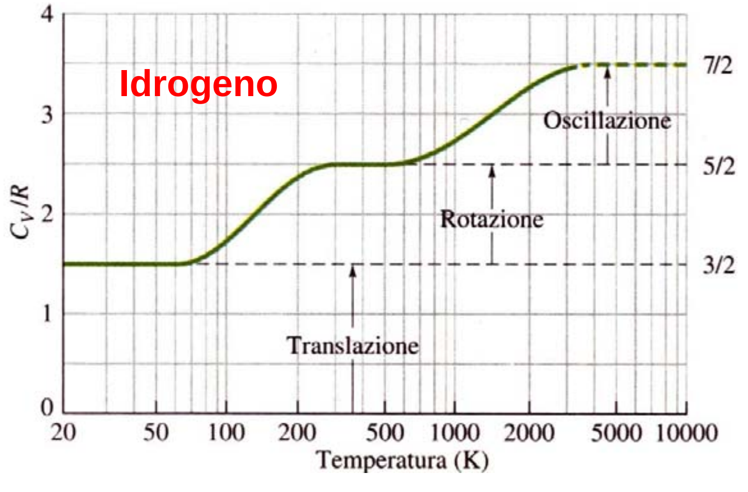
$$\boxed{C_V = \frac{3}{2}R = 12.5 \frac{J}{mol \cdot K}}$$

(si può dimostrare con la teoria cinetica dei gas)

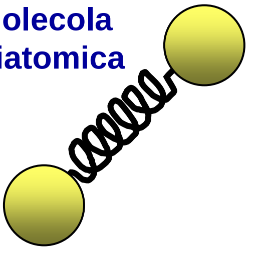
- Per un gas biatomico (H_2, O_2, N_2) si ha:

$$\boxed{C_V = \frac{3}{2}R + R = \frac{5}{2}R}$$

- in realtà questo è vero per gran parte dei gas soltanto a temperatura ambiente. L'andamento del calore specifico molare in funzione della temperatura ha il comportamento seguente:



Molecola biatomica



- Una molecola biatomica può traslare (3 gradi di libertà),
può ruotare intorno al centro di massa (2 gradi di libertà),
può vibrare lungo la congiungente I due atomi (2 gradi di libertà).
I gradi di libertà che vengono via via eccitati sono funzione della temperatura.

- Per le molecole poliatomiche si ha: $\boxed{C_V \cong 3 \cdot R}$

Energia interna di un gas perfetto

- Se forniamo calore ad un gas a volume costante, si ha:

$$\boxed{Q = n \cdot c_V \cdot \Delta T}$$

- Essendo una trasformazione a volume costante, non c'è variazione di volume e quindi il lavoro è nullo.

- Dal primo principio della termodinamica avremo quindi:

$$\boxed{\Delta U = Q - L \quad = Q - 0 \quad = Q \quad = n \cdot C_V \cdot \Delta T}$$

- L'energia interna è una funzione di stato. La sua variazione dipende solo dallo stato iniziale e finale, ma non dal tipo di trasformazione.

- Qualunque sia il tipo di trasformazione vale sempre:

$$\boxed{\Delta U = n \cdot c_V \cdot \Delta T}$$

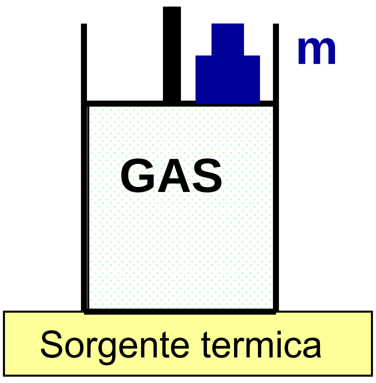
- Per un gas perfetto si può pertanto esprimere in maniera esplicita l'espressione dell'energia interna:

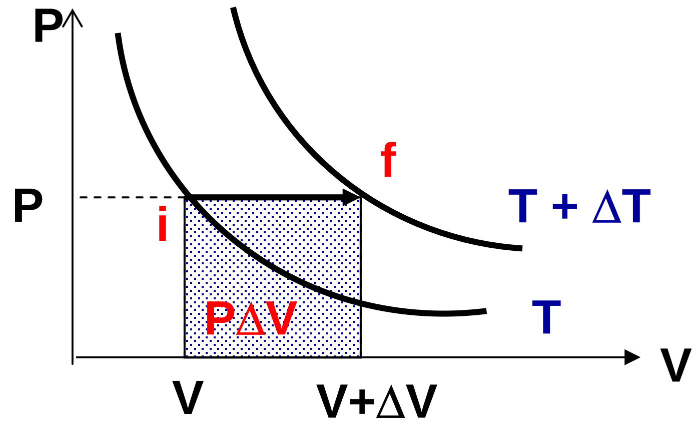
$$\boxed{U = n \cdot C_V \cdot T \quad + \text{ costante}}$$

- Gas monoatomico: $\boxed{U = n \cdot \frac{3}{2} R \cdot T \quad + \text{ costante}}$

- Gas biatomico: $\boxed{U = n \cdot \frac{5}{2} R \cdot T \quad + \text{ costante}}$

Gas perfetto: calore specifico molare a pressione costante





- Ripetiamo l'esperimento fornendo calore al gas a pressione costante. Questa condizione può realizzata mettendo una massa m sopra al pistone, libero di muoversi.
- Avremo la relazione: $\boxed{Q = n \cdot c_P \cdot \Delta T}$
- Per una trasformazione isobara si ha: $\boxed{L = P \cdot \Delta V}$
- Per un gas perfetto (PV=nRT) si ha: $\boxed{P \cdot \Delta V = n \cdot R \cdot \Delta T}$
- Ricordiamo che: $\boxed{\Delta U = n \cdot c_V \cdot \Delta T}$
- Mettendo insieme le tre equazioni si ha:

$$\boxed{\Delta U = Q - L}$$

$$\boxed{nC_V \Delta T = nC_P \Delta T - nR\Delta T} \Rightarrow \boxed{C_V = C_P - R}$$

- Quindi:

$$\boxed{C_P = C_V + R}$$

Il calore specifico a pressione costante è più grande del calore specifico a volume costante perché parte del calore fornito al gas viene utilizzato come lavoro di espansione del gas.

Trasformazione adiabatica reversibile di un gas perfetto

- **Adiabatica**: Q=0 => **$L + \Delta U = 0$**
  [per una trasformazione infinitesima si ha: $\delta L + dU = 0$]

- Gas perfetto: $PV = nRT$; $\Delta U = nC_V\Delta t$
  [trasformazione infinitesima: $\delta L = pdV$; $dU = nC_V dT$]

$$\Rightarrow \boxed{\delta L + dU = pdV + nC_V dT}$$

[Ricordando che: $p = \frac{nRT}{V}$ e $C_P - C_V = R$]

$$\Rightarrow nRT\frac{dV}{V} + nC_V dT = 0 \Rightarrow \boxed{\frac{R}{C_V}\frac{dV}{V} = -\frac{dT}{T}}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{C_P - C_V}{C_V}\frac{dV}{V} = -\frac{dT}{T}}$$

- Integriamo l'integrale ricordando che $\int \frac{dx}{x} = \ln x + \text{costante}$

$$\frac{C_P - C_V}{C_V}\int \frac{dV}{V} = -\int \frac{dT}{T} \Rightarrow \frac{C_P - C_V}{C_V}\ln V = -\ln T + \text{costante}$$

- Definiamo: $\boxed{\frac{C_P}{C_V} = \gamma}$ $\Rightarrow$ $\boxed{\frac{C_P - C_V}{C_V} = \gamma - 1}$

γ = 5/3 : gas monoatomico

γ = 7/5 : gas biatomico

… continua adiabatica gas ideale

- Quindi:

$$(\gamma - 1) \cdot \ln V + \ln T = \text{costante}$$

$$\Rightarrow \ln V^{\gamma-1} + \ln T = \text{costante}$$

$$\Rightarrow \ln TV^{\gamma-1} = \text{costante}$$

N.B. le due costanti sono diverse, ma non ha nessuna rilevanza fisica.

$$\boxed{TV^{\gamma-1} = \text{costante}}$$

- Ricordando che $\frac{PV}{nR} = T$, si ha:

$$\frac{PV}{nR} V^{\gamma-1} = \frac{P\cancel{V}V^{\gamma}\cancel{V}^{-1}}{nR} = \text{costante}$$

$$PV^{\gamma} = nR \cdot \text{costante} \quad \Rightarrow PV^{\gamma} = \text{costante}$$

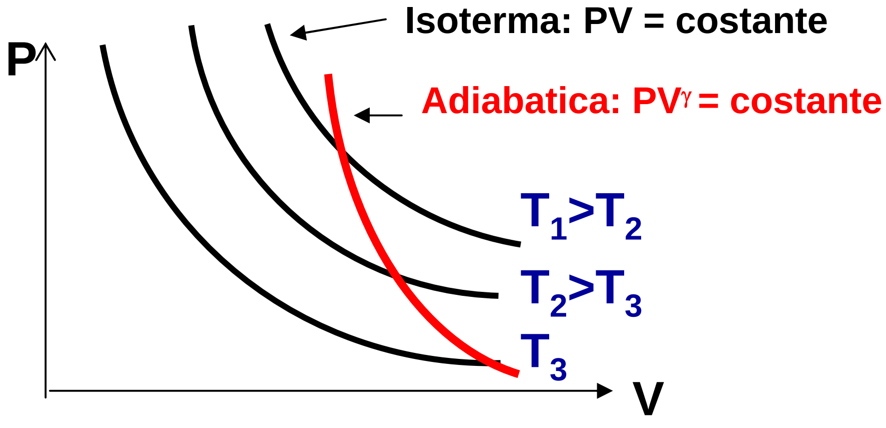
- Risultato finale:

$$\boxed{PV^{\gamma} = \text{costante}}$$

- Ovvero per una trasformazione adiabatica **reversibile** di un gas perfetto da uno stato **A** ad uno stato **B**, si ha:

$$\boxed{P_A V_A^{\gamma} = P_B V_B^{\gamma}} \qquad \left[\gamma = \frac{C_P}{C_V}\right]$$

…continua adiabatica gas ideale



- In una espansione adiabatica reversibile di un gas perfetto la temperatura **diminuisce**.

- Giustificazione “matematica”:

isoterma: $P = \frac{\text{costante}}{V}$; adiabatica: $P = \frac{\text{costante}}{V^{\gamma}}$

⇨ l’adiabatica è una curva più “ripida”.

- Giustificazione “fisica”:

$$\Delta U + L = 0 \Leftarrow \quad \text{(adiabatica)}$$

$$\Rightarrow \quad L = -\Delta U$$

- In un’espansione il lavoro è positivo, quindi la variazione di energia interna deve essere negativa.
- Per un gas perfetto si ha: $\Delta U = nC_V\Delta T$

⇨ ΔT deve essere negativo, ovvero il gas nell’espansione adiabatica reversibile deve raffreddarsi.

ESERCIZI CONSIGLIATI

Gas perfetto
(e primo principio)

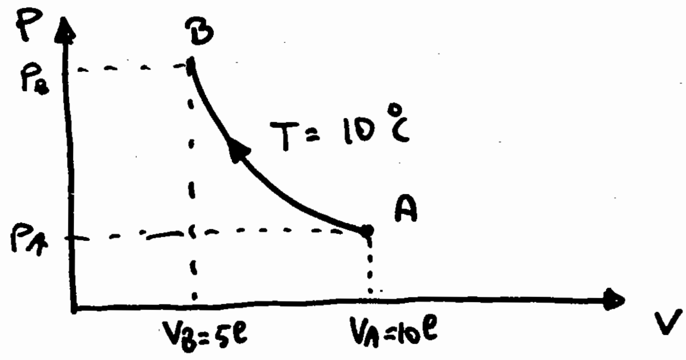
- Serway (3° Edizione) – Cap. 17
  - 25 – 27 – 29 – 31 – 33 – 35 – 37 – 39 – 41 – 43 – 67
- Halliday (5° Edizione) – Cap. 20
  - 1E – 5E – 7E – 11P – 13P – 15P – 37E – 39P – 41P – 43E – 47E – 49E – 51P

ESONERO 18-5-2001

DUE MOLI DI OSSIGENO VENGONO COMPRESSE ISOTERMICAMENTE A $T = 10\,°C$ DA UN VOLUME INIZIALE DI $10\,\ell$ AD UNO FINALE DI $5\,\ell$. APPLICANDO L'APPROSSIMAZIONE DI GAS PERFETTO, SI CALCOLI:

a) LA PRESSIONE FINALE DEL GAS

b) LA VARIAZIONE DI ENERGIA INTERNA



$PV = nRT$

- $P_A = \dfrac{nRT}{V_A} = \dfrac{2 \cdot 8.314 \cdot (10 + 273.1)}{10 \cdot 10^{-3}} = 470.7 \cdot 10^{3}\ Pa = 4.66\ atm$

- IN UN'ISOTERMA SI HA: PV = costante

$$\Rightarrow P_A V_A = P_B V_B \Rightarrow P_B = \frac{V_A}{V_B} \cdot P_A \Rightarrow \frac{10}{5} \cdot 4.66 = \underline{9.32\ atm}$$

- PER UN GAS PERFETTO SI HA: $\Delta U = n C_v \Delta T$

QUINDI PER UN'ISOTERMA SI HA:

$$\Delta T = 0 \Rightarrow \Delta U = 0$$

PROBLEMA

DUE MOLI DI ELIO OCCUPANO UN VOLUME INIZIALE DI 5 ℓ AD UNA PRESSIONE DI 10 atm. IL GAS SI ESPANDE SEGUENDO UNA TRASFORMAZIONE ISOTERMICA FINO AD UN VOLUME DI 1 m^3.
TROVARE: a) LA TEMPERATURA DEL GAS; b) LA PRESSIONE FINALE; c) IL LAVORO FATTO DURANTE L'ESPANSIONE.

o——o——o——o——o

a)
$$PV = nRT \Rightarrow T = \frac{PV}{nR} =$$
$$= \frac{10 \cdot 1.01 \cdot 10^5 \cdot 5 \cdot 10^{-3}}{2 \cdot 8.314} = 303.7 \text{ K}$$

b)
$$PV = \text{COSTANTE} \Rightarrow P_i V_i = P_f \cdot V_f \Rightarrow P_f = P_i \frac{V_i}{V_f} =$$
$$= 10 \text{ atm} \frac{5 \ell}{1000 \ell} = 0.05 \text{ atm}$$

c) IL LAVORO FATTO DURANTE UNA TRASFORMAZIONE ISOTERMICA DA UN GAS PERFETTO È UGUALE A:

$$L = nRT \ln \frac{V_f}{V_i} = 2 \cdot 8.314 \cdot 303.7 \cdot \ln \frac{1000}{5} = 15.1 \text{ kJ}$$

N.B.
$$L = PV \ln \frac{V_f}{V_i} = 10 \text{ atm} \cdot 5 \ell \ln \frac{1000}{5} = 50 \text{ atm} \cdot \ell \cdot \ln 20 \simeq$$
$$\simeq 150 \text{ atm} \cdot \ell$$

ESONERO 1 - ESERCIZIO 2

<u>Esonero 1 - Esercizio 2</u> (7 punti)

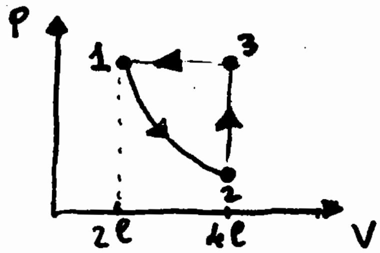
Due moli di un gas perfetto monoatomico hanno la pressione iniziale $p_1 = 2$ atm e il volume iniziale V_1 2 l. Al gas viene fatto percorrere il seguente ciclo quasi-statico (reversibile): viene fatto espandere isotermicamente finché il suo volume non è diventato $V_2 = 4$ l, poi viene riscaldato a volume costante fino ad avere la stessa pressione iniziale e poi viene compresso a pressione costante fino a tornare allo stato iniziale.

a) Si rappresenti questo ciclo su un diagramma PV.

b) Si calcolino il calore fornito al gas e il lavoro compiuto dal gas durante ogni parte del ciclo.

c) Si trovino le temperature T_1, T_2 e T_3.

(Risultato: b) L_{1-2}=2.77 $l \cdot atm$; Q_{1-2}=2.77 $l \cdot atm$; L_{2-3}=0 ; Q_{2-3}=6.01 $l \cdot atm$; L_{3-1}=-4.0 $l \cdot atm$; Q_{3-1}=-10.0 $l \cdot atm$; c) $T_1 = 24.4$ K; $T_2 = T_1$; $T_3 = 48.7$ K)



$P_1 = 2$ atm ; $V_1 = 2$ ℓ

$P_2 = 1$ atm ; $V_2 = 4$ ℓ ($PV =$ costante)

$P_3 = 2$ atm ; $V_3 = 4$ ℓ

$C_V = \frac{3}{2} R$

1) $1 \to 2$: ISOTERMA $\Rightarrow \Delta U = 0$; $Q = L$

$$L = nRT \ln \frac{V_2}{V_1} = P_1 \cdot V_1 \ln 2 = 2 \cdot 2 \cdot \ln 2 = 2.77 \text{ atm} \cdot \ell$$

$$T_1 = \frac{P_1 V_1}{nR} = \frac{2 \cdot 1.01 \cdot 10^5 \cdot 2 \cdot 10^{-3}}{2 \cdot 8.314} = \underline{24.3 \text{ K}}$$

2) $2 \to 3$: ISOCORA $\Rightarrow L = 0$; $Q = \Delta U$ $\left[\frac{P}{T} = \text{costante} \right]$

$T_2 = T_1 = \underline{24.3 \text{ K}}$; $T_3 = \frac{P_3}{P_2} \cdot T_2 = 2 \cdot T_2 = \underline{48.6 \text{ K}}$

$$\Delta U = n C_V \Delta T = 2 \cdot \frac{3}{2} \cdot 8.314 \cdot (48.6 - 24.3) = 606.1 \text{ J}$$

$$1 \text{ atm} \cdot 1 \ell = 1.01 \cdot 10^5 \cdot 1 \cdot 10^{-3} = 101 \text{ J}$$

$$Q = \Delta U = \frac{606.1}{101} = 6 \text{ atm} \cdot \ell$$

3) $3 \to 1$: ISOBARA

$$L = P \Delta V = P \cdot (V_1 - V_3) = 2 \cdot (2 - 4) = -4 \text{ atm} \cdot \ell$$

$$Q = n C_p \Delta T = 2 \cdot \frac{5}{2} \cdot 8.314 \cdot (24.3 - 48.6) = -1010.1 \text{ J} = -10 \text{ atm} \cdot \ell$$

• $T_1 = T_2 = 24.3$ K ; $T_3 = 2 T_1 = 48.6$ K

PROBLEMA 20-8

UNA BOLLA DI 5.0 MOLI DI ELIO (MONOATOMICO) E' IMMERSA A UNA CERTA PROFONDITA' IN ACQUA; L'ACQUA (E QUINDI L'ELIO) SUBISCE UN AUMENTO DI TEMPERATURA ΔT DI 20 °C A PRESSIONE COSTANTE. COME CONSEGUENZA LA BOLLA SI ESPANDE.

a) QUANTO CALORE Q VIENE AGGIUNTO ALL'ELIO DURANTE L'ESPANSIONE E L'AUMENTO DI TEMPERATURA?

b) QUAL E' LA VARIAZIONE ΔU DELL'ENERGIA INTERNA DELL'ELIO DURANTE L'AUMENTO DI TEMPERATURA?

c) TROVARE IL LAVORO L FATTO DALL'ELIO.

a) $$C_p = C_v + R = \frac{3}{2}R + R = \frac{5}{2}R$$

$$Q = n C_p \Delta T = n \frac{5}{2} R \Delta T = 5 * \frac{5}{2} * 8.314 * 20 = 2080 \text{ J}$$

b) $$\Delta U = n C_v \Delta T =$$

$$= 5 \cdot \frac{3}{2} R \cdot \Delta T = 5 * \frac{5}{2} * 8.314 * 20 = 1250 \text{ J}$$

c) PRIMA LEGGE DELLA TERMODINAMICA: $Q - L = \Delta U$

$$L = Q - \Delta U = 2080 - 1250 = 830 \text{ J}$$

PROBLEMA

UNA QUANTITA' DI GAS PERFETTO DI 0.2 moli È CONTENUTA ALL'INTERNO DI UN CILINDRO CHIUSO DA UN PISTONE MOBILE. IL PISTONE HA UNA MASSA DI 8 Kg, UNA SUPERFICIE DI 5 cm^2 ED È LIBERO DI SCORRERE VERTICALMENTE, IN MODO DA MANTENERE COSTANTE LA PRESSIONE DEL GAS. QUANTO LAVORO VIENE COMPIUTO QUANDO LA TEMPERATURA DEL GAS VIENE AUMENTATA DA 20 °C A 300 °C ?

- TROVIAMO LA PRESSIONE INTERNA DEL GAS CHE DEVE EQUILIBRARE LA PRESSIONE ESTERNA DATA DALLA MASSA DEL PISTONE PIÙ LA PRESSIONE ATMOSFERICA.

$$P = P_{ATM} + \frac{mg}{A} = 1.01 \cdot 10^5 + \frac{8 \cdot 9.8}{5 \cdot 10^{-4}} = 258 \ kPa$$

- USIAMO L'EQUAZIONE DI STATO DEI GAS PERFETTI PER TROVARE IL VOLUME INIZIALE E FINALE.

$$V_i = \frac{nRT_i}{P} = \frac{0.2 \cdot 8.314 \cdot 293.15}{2.58 \cdot 10^5} = 1.888 \cdot 10^{-3} \ m^3$$

$$V_f = \frac{nRT_f}{P} = \frac{0.2 \cdot 8.314 \cdot 573.15}{2.58 \cdot 10^5} = 3.652 \cdot 10^{-3} \ m^3$$

$$L = \int_{V_i}^{V_f} P\,dV = P \int_{V_i}^{V_f} dV = PV \Big|_{V_i}^{V_f} = P(V_f - V_i) =$$

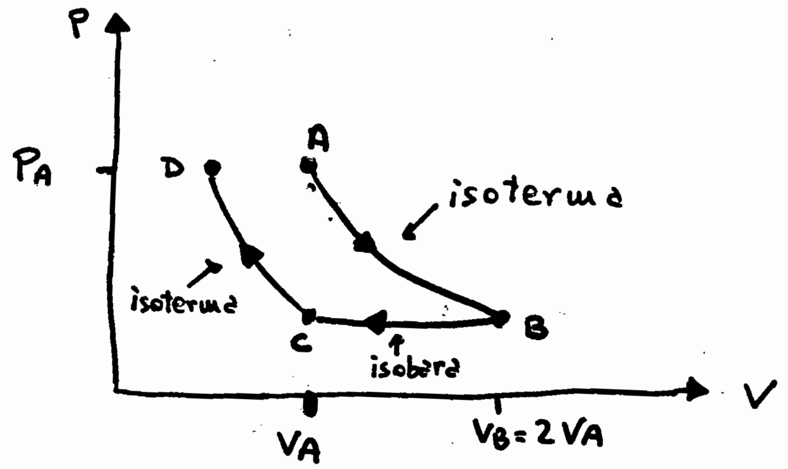
$$= 2.58 \cdot 10^5 (3.652 - 1.888) \cdot 10^{-3} = 466 \ J$$

- DA NOTARE CHE:

$$L = P\Delta V = nR\Delta T = 0.2 \cdot 8.314 \cdot 280 = 466 \ J$$

PROVA SCRITTA - 21-2-1997

UN LITRO DI UN GAS, IL CUI COMPORTAMENTO E' DESCRITTO DA UN GAS PERFETTO, INIZIALMENTE ALLA PRESSIONE DI 1 atm, VIENE FATTO ESPANDERE A TEMPERATURA COSTANTE, FINO A RADDOPPIARE IL VOLUME. IL GAS VIENE QUINDI COMPRESSO A PRESSIONE COSTANTE, FINO A TORNARE AL VOLUME INIZIALE. INFINE, IL GAS VIENE ANCORA COMPRESSO A TEMPERATURA COSTANTE, FINO A TORNARE ALLA PRESSIONE INIZIALE. SAPENDO CHE, NEL PROCESSO A PRESSIONE COSTANTE, IL CALORE CEDUTO DAL GAS È DI 60 J, SI CALCOLI IL LAVORO TOTALE DEL GAS E LA DIFFERENZA DI ENERGIA INTERNA DEL GAS TRA LO STATO INIZIALE E QUELLO FINALE.



- CHE COSA NON CONOSCIAMO?
  - NON CONOSCIAMO IL NUMERO DI MOLI
  - NON SAPPIAMO IL TIPO DI GAS (MONOATOMICO, ETC..) QUINDI NON CONOSCIAMO IL CALORE SPECIFICO
  - NON CONOSCIAMO LA TEMPERATURA INIZIALE
- CHE COSA SAPPIAMO?
  - È UN GAS PERFETTO $\Rightarrow PV = nRT$ (A T COSTANTE $\Rightarrow PV = $ costante)
  - $\Delta U = n C_v \Delta T$

21-2-1997

RICAVIAMO PRESSIONE E VOLUME PER I QUATTRO PUNTI A, B, C, D

I PUNTI A E B SONO CONNESSI DA UNA TRASFORMAZIONE ISOTERMA, QUINDI

$$P_A V_A = nRT_A \; ; \; P_B \cdot V_B = nRT_A \Rightarrow P_A V_A = P_B V_B$$

DATO CHE $V_B = 2 V_A$ SI HA:

$$P_A V_A = P_B \cdot 2 V_A \Rightarrow \boxed{P_B = \frac{P_A}{2}}$$

- COMPRIMENDO IL GAS A PRESSIONE COSTANTE IL GAS SI RAFFREDDA CEDENDO IL CALORE $Q_{BC} = -60\,J$.

- I PUNTI C E D SONO DI NUOVO LEGATI DA UNA TRASFORMAZIONE ISOTERMA

$$P_C V_C = nRT_C \; ; \; P_D \cdot V_D = nRT_C \qquad [T_C < T_A]$$

$$\Rightarrow P_C V_C = P_D \cdot V_D$$

- DATO CHE $P_C = P_B = \frac{P_A}{2}$ [ISOBARA] E $V_C = V_A$, ABBIAMO:

$$\frac{P_A}{2} \cdot V_A = P_A \cdot V_D \Rightarrow \boxed{V_D = \frac{V_A}{2}}$$

- RIASSUMENDO

A: $P_A = 1$ atm ; $V_A = 1\,\ell$

B: $P_B = \frac{P_A}{2} = 0.5$ atm ; $V_B = 2V_A = 2\,\ell$

C: $P_C = P_B = 0.5$ atm ; $V_C = V_A = 1\,\ell$

D: $P_D = P_A = 1$ atm ; $V_D = \frac{V_A}{2} = 0.5\,\ell$

21-2-1997

- CALCOLIAMO IL LAVORO LUNGO LE TRE TRASFORMAZIONI

- AB : ISOTERMA

$$\Delta U = Q - L = n c_v \Delta T = 0 \quad \Rightarrow \quad \underline{Q = L}$$

$$L = \int_{V_A}^{V_B} p\,dV = \int_{V_A}^{V_B} \frac{nRT}{V}\,dV = nRT_A \int_{V_A}^{V_B} \frac{dV}{V} = nRT_A \ln V\Big|_{V_A}^{V_B} = nRT_A \ln \frac{V_B}{V_A}$$

$$\boxed{L_{AB} = nRT_A \ln 2} \qquad \boxed{Q_{AB} = nRT_A \ln 2}$$

- BC : ISOBARA

$$L = \int_{V_B}^{V_C} p\,dV = P_B \int_{V_B}^{V_C} dV = P_B (V_C - V_B) = P_B (V_A - 2V_A)$$

$$\boxed{L_{BC} = -\frac{P_A}{2} \cdot V_A} \qquad \boxed{Q_{BC} = -60\ J}$$

- CD : ISOTERMA

$$\Delta U = 0 \quad ; \quad Q = L$$

$$L_{CD} = nRT_C \ln \frac{V_D}{V_C} = nRT_C \ln\left(\frac{V_A}{2} / V_A\right) = nRT_C \ln \frac{1}{2}$$

$$\boxed{L_{CD} = -nRT_C \ln 2} \qquad \boxed{Q_{CD} = -nRT_C \ln 2}$$

21-2-1997

- CALCOLIAMO IL LAVORO TOTALE SVOLTO DAL GAS DURANTE LA TRASFORMAZIONE

$$L_{TOT} = L_{AB} + L_{BC} + L_{CD} =$$

$$nRT_A \ln 2 - \frac{P_A V_A}{2} - nRT_C \ln 2$$

RICORDIAMO CHE:

$$P_A V_A = nRT_A \quad ; \quad nRT_C = P_C \cdot V_C = \frac{P_A}{2} \cdot V_A$$

$$L_{TOT} = P_A V_A \ln 2 - \frac{P_A V_A}{2} - \frac{P_A V_A}{2} \ln 2 = P_A V_A \left(\ln 2 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \ln 2\right) =$$

$$= 1.01 \cdot 10^5 \cdot 10^{-3} \left(\ln 2 - 0.5 - 0.5 \cdot \ln 2\right) = \underline{-15.5\ J}$$

- CALCOLIAMO ORA LA DIFFERENZA DI ENERGIA INTERNA DEL GAS TRA STATO FINALE E STATO INIZIALE

- $\Delta U = U_{fin} - U_{iniz} = n C_V (T_C - T_A)$

$$\Delta U = Q_{TOT} - L_{TOT}$$

- $Q_{TOT} = Q_{AB} + Q_{BC} + Q_{CD} = nRT_A \ln 2 + Q_{BC} - nRT_C \ln 2$

$$\Delta U = \cancel{Q_{AB}} + Q_{BC} + \cancel{Q_{CD}} - \cancel{L_{AB}} - L_{BC} - \cancel{L_{CD}} = Q_{BC} - L_{BC}$$

$$\Delta U = Q_{BC} + \frac{P_A V_A}{2} =$$

$$= -60 + \frac{1.01 \cdot 10^5 \cdot 10^{-3}}{2} = -60 + 50.5 = \underline{-9.5\ J}$$

PROVA SCRITTA - 24 APRILE 1997

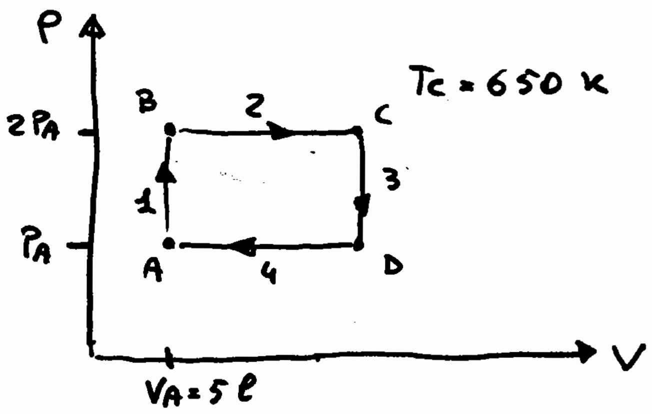
UN RECIPIENTE CONTIENE UN GAS, APPROSSIMABILE AD UN GAS PERFETTO, IL CUI CALORE SPECIFICO A VOLUME COSTANTE VALE $C_V = 21$ J/mole·K. INIZIALMENTE IL GAS OCCUPA UN VOLUME DI 5 ℓ HA UNA PRESSIONE DI 2 atm ED UNA TEMPERATURA DI 250 K.

IL GAS SUBISCE QUINDI LE SEGUENTI TRASFORMAZIONI:

1) RISCALDAMENTO A VOLUME COSTANTE, SINO A RADDOPPIARE LA PRESSIONE
2) RISCALDAMENTO A PRESSIONE COSTANTE, SINO AD UNA TEMPERATURA DI 650 K
3) RAFFREDDAMENTO A VOLUME COSTANTE, SINO ALLA PRESSIONE INIZIALE
4) RAFFREDDAMENTO A PRESSIONE COSTANTE SINO ALLE CONDIZIONI INIZIALI.

SI CALCOLINO:

a) IL CALORE ASSORBITO O CEDUTO DAL GAS IN CIASCUNA DELLE QUATTRO TRASFORMAZIONI
b) IL LAVORO TOTALE DELL'INTERO PROCESSO.



$P_A = 2$ atm

$V_A = 5$ ℓ

$T_A = 250$ K

$P_B = 2P_A = 4$ atm

$V_B = V_A = 5$ ℓ

$T_C = 650$ K

$C_V = 21$ J/mol·K

$P_C = P_B = 4$ atm

$V_D = V_C = ?$

$P_D = P_A = 2$ atm

24-4-1997

- CALCOLIAMO IL NUMERO DI MOLI DEL GAS:

$$PV = nRT \quad \Rightarrow \quad n = \frac{PV}{RT}$$

$$\underline{n} = \frac{P_A \cdot V_A}{R \cdot T_A} = \frac{2 \cdot 1.01 \cdot 10^5 \cdot 5 \cdot 10^{-3}}{8.314 \cdot 250} = \underline{0.486 \text{ moli}}$$

- TRASFORMAZIONE 1 (AB) : ISOCORA

$$L = 0 \quad \Rightarrow \quad \Delta U = Q$$

$$\Delta U = n C_V \Delta T = n C_V (T_B - T_A)$$

- CALCOLIAMO LA TEMPERATURA T_B

$$T_B = \frac{P_B \cdot V_B}{n \cdot R} = \frac{4 \cdot 1.01 \cdot 10^5 \cdot 5 \cdot 10^{-3}}{0.486 \cdot 8.314} = 500 \text{ K}$$

(più semplicemente : in un isocora si ha $\frac{P}{T} = \frac{nR}{V} = \text{costante}$)

$$\Rightarrow \frac{P_A}{T_A} = \frac{P_B}{T_B} \quad \Rightarrow \quad T_B = \frac{P_B}{P_A} \cdot T_A = 2 \cdot 250 = 500 \text{ K}$$

$$\Delta U = n C_V (T_B - T_A) = 0.486 \cdot 21 \cdot (500 - 250) = 2551.5 \text{ J}$$

$\Rightarrow$ NELLA TRASFORMAZIONE 1 IL GAS ASSORBE IL CALORE

$$Q_{AB} = 2551.5 \text{ J}$$

- TRASFORMAZIONE 2 (BC) : ISOBARA

$$Q = \Delta U + L$$

$$\Delta U = n C_V (T_C - T_B) = 0.486 \cdot 21 \cdot (650 - 500) = 1531.0 \text{ J}$$

$$L = P \Delta V = P_B (V_C - V_B)$$

isobara : $\frac{V}{T} = \frac{nR}{P} = \text{costante} \Rightarrow \frac{V_B}{T_B} = \frac{V_C}{T_C} \Rightarrow \underline{V_C} = \frac{T_C}{T_B} \cdot V_B = \frac{650}{500} \cdot 5 = \underline{6.5\ \ell}$

$$L = P_B \cdot (V_C - V_B) = 4 \cdot 1.01 \cdot 10^5 (6.5 - 5) \cdot 10^{-3} = 606 \text{ J}$$

$$Q_{BC} = \Delta U + L = 1531.0 + 606 = 2137 \text{ J}$$

24-4-1997

- TRASFORMAZIONE 3 (CD): ISOCORA

$$L = 0 \Rightarrow \Delta U = Q$$

$$\Delta U = n C_V \Delta T = n C_V (T_D - T_C)$$

$$T_D = T_C \cdot \frac{P_D}{P_C} = 650 \cdot \frac{2}{4} = 325 \text{ K}$$

$$\Delta U = n C_V (T_D - T_C) = 0.486 \cdot 21 \cdot (325 - 650) = -3317 \text{ K}$$

- NELLA TRASFORMAZIONE 3 VIENE CEDUTO IL CALORE -3317 K

- TRASFORMAZIONE 4 (DA): ISOBARA

$$Q = \Delta U + L$$

$$\Delta U = n C_V (T_A - T_D) = 0.486 \cdot 21 \cdot (250 - 325) = -765.4 \text{ K}$$

$$L = P_A \cdot (V_A - V_D) = 2 \cdot 1.01 \cdot 10^5 \cdot (5 - 6.5) \cdot 10^{-3} = -303 \text{ J}$$

$$Q_{DA} = \Delta U + L = -765.4 - 303 = -1068.4 \text{ J}$$

- IL LAVORO TOTALE DELL'INTERO PROCESSO E' PARI ALL'AREA RACCHIUSA DAL CICLO (E' POSITIVO PERCHE' IL CICLO E' STATO PERCORSO IN SENSO ORARIO)

$$L = (V_D - V_A) \cdot (P_B - P_A) = (6.5 - 5) \cdot 10^{-3} \cdot (4 - 2) \cdot 1.01 \cdot 10^5 = +303 \text{ J}$$

DATO CHE IN UN CICLO $\Delta U = 0$, ALLORA $L = Q$

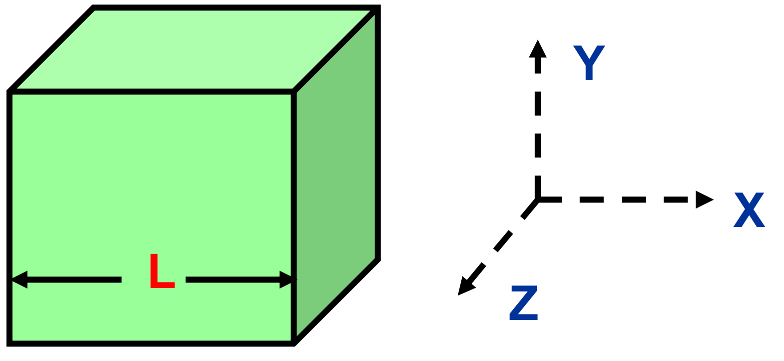
$$Q = Q_{AB} + Q_{BC} + Q_{CD} + Q_{DA} = 2551.5 + 2137 - 3317 - 1068.4 = +303 \text{ J}$$

N.B. I DUE VALORI NUMERICI CONCORDANO, QUINDI L'ESERCIZIO E' STATO SVOLTO CORRETTAMENTE

Teoria cinetica

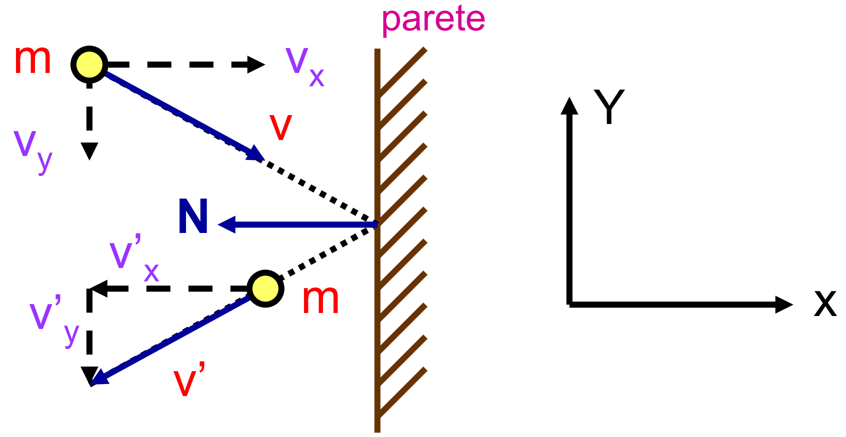
- Descrizione del modello
- Calcolo della pressione
- Calcolo del lavoro
- Distribuzione delle velocità di Maxwell

Descrizione del modello



- Consideriamo un gas contenuto in una scatola cubica di lato L
- Immaginiamo un modello di gas perfetto, sviluppato nel corso del 1800, basato sulle seguenti potesi:
  - Le molecole del gas sono sferette rigide che compiono urti completamente elastici fra loro. Ad esse si applica la legge della meccanica di Newton.
  - Non si hanno interazioni a distanza tra le molecole, e le traiettorie tra due urti successivi sono rettilinee.
  - Le pareti del recipiente sono tali da garantire urti elastici, vale a dire che le pareti sono prive di attrito e non possono quindi scaldarsi per via degli urti.
  - La distribuzione spaziale delle molecole è mediamente uniforme, e le direzioni di moto delle molecole sono distribuite in modo isotropo. Non vi sono quindi direzioni privilegiate nello spazio in cui il gas è contenuto.
- Inoltre la densità del gas deve essere sufficientemente bassa da avere al più urti tra due molecole, ma mai urti tra tre o più molecole fra di loro. Questa affermazione diventa quantitativa introducendo il concetto di cammino libero medio delle molecole, che dovrà essere molto più grande della dimensione delle molecole, e nello stesso tempo dovrà essere molto più piccolo delle dimensioni del contenitore, altrimenti non si avranno affatto urti tra le molecole e non sarà possibile raggiungere l'equilibrio termico.

Interpretazione della pressione nella teoria cinetica



- Consideriamo una molecola di massa m che urta contro una parete
- La parete può esercitare solo la forza normale N perché è priva di attrito
- Ricordate che:

$$\vec{I} = \int_{t_i}^{t_f} \vec{F} \cdot dt = \Delta\vec{p} = \vec{p}_f - \vec{p}_i$$

- Quindi, dato che **N** è normale alla parete, anche **I** sarà normale, perciò solo la componente normale di **p** può variare.

- Inoltre, dato che per ipotesi l'urto è elastico, si conserva l'energia:

$$\frac{1}{2}mv'^2 = \frac{1}{2}mv^2$$

- Come conseguenza avremo: $mv'_y = mv_y \quad ; \quad mv'_x = -mv_x$

$$\Rightarrow \begin{cases} \Delta p_x = -mv_x - mv_x = -2mv_x \\ \Delta p_y = 0 \\ \Delta p_z = 0 \end{cases}$$

- (un discorso simile vale per urti contro le altre pareti).

Pressione (segue …)

- Ad una variazione di quantità di moto corrisponde un impulso della forza che l’ha provocata:

$$I_x = f_x^m \Delta t = \Delta P_x = -2mv_x$$

(f_x^m è la componente x della forza che la parete esercita sulla singola molecola)

$$f_x^m = \frac{\Delta P_x}{\Delta t} = -\frac{2mv_x}{\Delta t}$$

- Per valutare l’intervallo di tempo Δt che intercorre tra un urto di una molecola con la parete ed il successivo, possiamo fare un’assunzione non corretta da un punto di vista statistico, ma che ha il pregio di essere semplice e di condurre al risultato finale corretto; assumiamo quindi che Δt sia pari al tempo che impiega la molecola per andare a rimbalzare contro la parete opposta e tornare indietro.

$$\Delta t = \frac{2L}{v_x}$$

- quindi: $$f_x^m = \frac{\Delta P_x}{\Delta t} = -\frac{2mv_x}{2L/v_x} = -\frac{mv_x^2}{L}$$

- Per il principio di azione e reazione la forza che la molecola esercita sulla parete vale:

$$f_x = -f_x^m = \frac{mv_x^2}{L}$$

- La forza totale esercitata dal gas sulla parete è data dalla somma dei contributi di tutte le molecole:

$$F_x = \sum_{i=1}^{N} f_x^i$$

dove N è il numero totale di molecole del gas.

Pressione (segue …)

$$F_x = \sum_{i=1}^{N} \frac{m}{L} v_{xi}^2 = \frac{m}{L} \sum_{i=1}^{N} v_{xi}^2$$

- Introduciamo il valor medio del quadrato della componente x delle velocità definito come:

$$\overline{v_x^2} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} v_{xi}^2$$

- In questo modo si ha: $F_x = \frac{m}{L} \cdot N \cdot \overline{v_x^2}$

- La pressione esercitata dal gas sulla parete vale:

$$P = \frac{F_x}{S} = \frac{F_x}{L^2} = \frac{1}{L^2} \frac{m}{L} \cdot N \cdot \overline{v_x^2} = \frac{m}{L^3} \cdot N \cdot \overline{v_x^2}$$

- Il numero totale di molecole N del gas è pari a: $N = n \cdot N_A$
  dove n è il numero di moli del gas e N_A il numero di Avogadro

- Allora: $P = \frac{m}{L^3} \cdot n \cdot N_A \cdot \overline{v_x^2}$

- Ricordando che m è la massa di una molecola, si ha che $m \cdot N_A$ è uguale alla massa M di una mole di gas (massa molare) .
  Inoltre L^3 è il volume V del gas, quindi:

$$\boxed{P = \frac{nM\overline{v_x^2}}{V}}$$

- Per ogni molecola si ha: $v^2 = v_x^2 + v_x^2 + v_x^2$

- Dato che ipotesi il gas è isotropo, la proiezione del valor medio del quadrato della velocità deve essere lo stesso qualunque sia la direzione scelta, quindi:

$$\overline{v_x^2} = \overline{v_y^2} = \overline{v_z^2} = \frac{1}{3}\overline{v^2}$$

Pressione (segue …)

- Definiamo la velocità quadratica media $\mathbf{v_{qm}}$ nel modo seguente:

$$\overline{v^2} = v_{qm}^2 \quad \Rightarrow \quad v_{qm} = \sqrt{\overline{v^2}}$$

- Quindi la pressione è uguale a:

$$\boxed{P = \frac{nMv_{qm}^2}{3V}} \Rightarrow \boxed{PV = \frac{nMv_{qm}^2}{3}}$$

- Ricordando che per un gas perfetto vale PV = nRT, si ricava:

$$\boxed{v_{qm} = \sqrt{\frac{3RT}{M}}}$$

- Se ad esempio fissiamo una temperatura di 300 K, abbiamo le seguenti velocità quadratiche medie per alcuni gas:

Gas	M (g/mole)	V_{qm} (m/s)
H_2	2.02	1920
He	4.0	1370
N_2	28	517
O_2	32	483

- Come si può notare si ottengono delle velocità molto alte, ciò nonostante, vedremo più avanti, nei fenomeni di trasporto, quali ad esempio la diffusione, le velocità in gioco sono molto più piccole.

Energia cinetica traslazionale

- L'energia cinetica media di una molecola è:

$$\overline{K} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} K_i = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{2}mv_i^2 = \frac{1}{N}\frac{1}{2}m\sum_{i=1}^{N} v_i^2$$

$$\Rightarrow \overline{K} = \frac{1}{2}m\overline{v^2} = \frac{1}{2}mv_{qm}^2$$

- Utilizzando la relazione trovata in precedenza $v_{qm}^2 = \frac{3RT}{M}$

$$\overline{K} = \frac{1}{2}m\frac{3RT}{M}$$

- Ricordando che $M/m = N_A$ (numero di Avogadro) abbiamo:

$$\overline{K} = \frac{3RT}{2N_A} \quad ; \quad \frac{R}{N_A} = k \text{ (costante di Boltzman)}$$

$$\Rightarrow \boxed{\overline{K} = \frac{3}{2}kT}$$

- Da ciò si evince che la temperatura è una misura dell'energia cinetica media delle molecole.

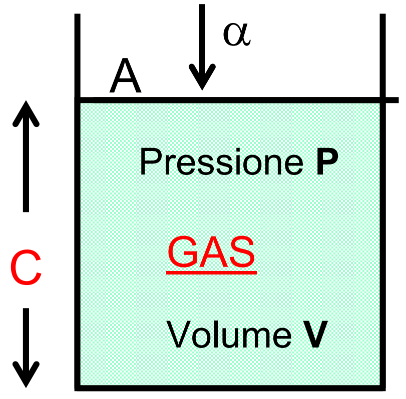
- **Energia interna**:

$$U = \sum_{i=1}^{N}\frac{1}{2}mv_i^2 \Rightarrow = N\overline{K} = [n \cdot N_A]\cdot\frac{3}{2}kT$$

- Dato che $N_A \cdot k = R$, si ha:

$$U = \frac{3}{2}nRT \quad \text{(gas monoatomico)}$$

Lavoro per comprimere il gas



Il pistone scorre senza attrito con velocità α. Le pareti del cilindro sono adiabatiche.

u= velocità media delle molecole nel cilindro.

- **<u>Ipotesi: α<< u</u>**: nel gas non si stabiliscano moti turbolenti e si può supporre che il centro di massa del gas sia sempre in quiete. (condizione affinché la compressione sia reversibile).

- Una molecola che si muove parallelamente all'asse del cilindro, impiegherà un tempo **t=2C/u** tra un urto ed il successivo. Dato che il numero di molecole che si muovono lungo questa direzione è un terzo del numero totale **n** di molecole contenute nel cilindro, il numero di urti contro il pistone in un secondo è pari a:

$$\boxed{\nu = \frac{1}{3} n \cdot \frac{1}{t} = \frac{1}{3} n \cdot \frac{u}{2C} = \frac{n \cdot u}{6C}}$$

- Osserviamo cosa succede ad una molecola che urta il pistone nel sistema di riferimento in cui il pistone è fermo:
  - la molecola si avvicina al pistone con velocità u+α e deve lasciare il pistone con la stessa velocità, <u>altrimenti l'urto non sarebbe elastico</u>.
  - Questo implica che relativamente al cilindro la molecola ha velocità u+2α.
  - Il cambio di energia cinetica della molecola ad ogni collisione con il pistone vale:

$$\Delta K_m = \frac{1}{2} m[u + 2\alpha]^2 - \frac{1}{2} mu^2 = 2mu\alpha + 2m\alpha^2 = 2mua\left(1 + \frac{\alpha}{u}\right)$$

  - Dato che per ipotesi α/u è piccolo, esso può essere trascurato.

$$\Delta K_m = 2mua$$

Lavoro per comprimere il gas

- Moltiplicando la variazione di energia cinetica che subisce una molecola nell'urto con il pistone per il numero di urti in un secondo, si ottiene la quantità di energia cinetica che il pistone fornisce al gas in un secondo:

$$\Delta K' = \Delta K_m \cdot \nu = 2mu\alpha \cdot \frac{n \cdot u}{6C} = \frac{1}{3}\frac{mnu^2}{C}\alpha$$

- Ricordando che **pV=nmu²/3** (V è il volume), si ottiene:

$$\Delta K' = \frac{1}{3}\frac{mnu^2}{C}\alpha = \frac{pV}{C}\alpha = \frac{pAC}{C}\alpha = pA\alpha$$

(A è la superficie del cilindro).

- Nell'istante di tempo **dt,** il pistone si muove della distanza α**dt**, di conseguenza il volume del gas cambia di: **dV=Aαdt**. In questo lasso di tempo l'energia impartita dal pistone al gas vale:

$$\boxed{dL = \Delta K' \cdot dt = pA\alpha \cdot dt = pdV}$$

abbiamo quindi ritrovato un risultato gia noto. Ovviamente quanto detto si applica anche ad una espansione reversibile.

- Nel caso invece di una **compressione irreversibile**, il termine α**/u** non può in linea di principio essere trascurato, quindi dobbiamo mantenerlo nell'espressione dell'energia fornita dal pistone al gas in un secondo:

$$\Delta K' = \Delta K_m \cdot \nu = \frac{1}{3}\frac{mnu^2}{C}\alpha\left(1 + \frac{\alpha}{u}\right)$$

- Se indichiamo con **P** la pressione esercitata dal gas contro il moto del pistone, ne consegue che nel tempo **dt** la forza **PA** agisce lungo la distanza α**dt**, quindi il lavoro fatto dal pistone sarà:

$$dL = PA\alpha \cdot dt = PdV$$

Compressione irreversibile

- Tenendo sempre presente la relazione **pV=nmu²/3,** dove **p** è la pressione che il gas eserciterebbe contro una parete in quiete, abbiamo la seguente relazione che esprime la quantità di energia fornita al gas dal pistone nel tempo **dt**, dove il gas viene compresso del volume **dV**:

$$dL = \frac{pV}{C}\alpha\left(1+\frac{\alpha}{u}\right)\cdot dt = p\left(1+\frac{\alpha}{u}\right)\cdot dV$$

- Questa energia deve essere uguale al lavoro fatto dal pistone contro il gas nello stesso intervallo di tempo. Uguagliando quindi le due espressioni si trova:

$$P\cdot dV = p\left(1+\frac{\alpha}{u}\right)\cdot dV \quad \Rightarrow \quad P = p\left(1+\frac{\alpha}{u}\right)$$

- Questo indica che la pressione **P** che il gas esercita contro il pistone mobile durante la compressione è più grande della pressione che avrebbe esercitato durante una compressione reversibile (ipotesi di pistone stazionario).

- In maniera analoga durante una espansione irreversibile (α negativo) la pressione risulta minore.

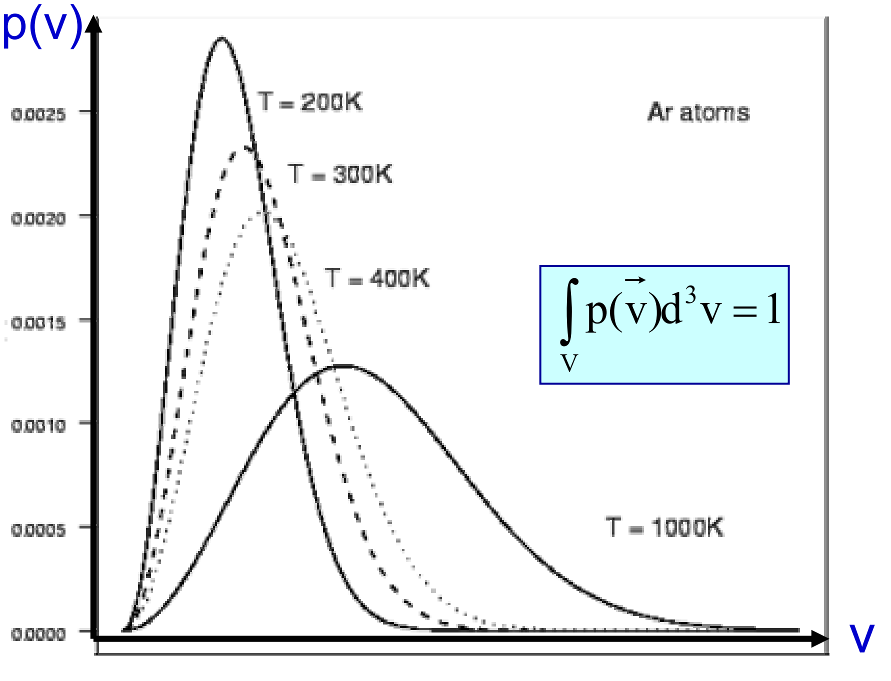
- La conseguenza di ciò è che il lavoro fatto dal gas durante una compressione finita irreversibile, non può essere riguadagnato con una espansione irreversibile fatta alla stessa velocità. Quindi il gas al termine del ciclo irreversibile ha avuto un riscaldamento netto.

- Le stesse conclusioni si raggiungono con delle considerazioni basate esclusivamente sui principi della termodinamica.

Distribuzione delle velocità molecolari

- Abbiamo trovato una relazione che lega la velocità quadratica media delle molecole di un gas con la sua temperatura.
- In realtà le singole molecole hanno una velocità che si discosta da quella media.
- Maxwell nel 1859 trovò la legge di distribuzione di queste velocità:

$$p(v) = 4\pi\left(\frac{M}{2\pi RT}\right)^{3/2} \cdot v^2 e^{-\frac{Mv^2}{2RT}} \quad (M = \text{massa molare})$$



- All'aumentare della temperatura il picco (valore più probabile della velocità) si sposta verso velocità più elevate.
- Le curve sono normalizzate in modo tale che l'integrale della probabilità sia sempre uguale a 1.

Secondo Principio della Termodinamica

- Macchine termiche
- Rendimento
- Secondo principio della Termodinamica
- Macchina di Carnot
- Entropia

Introduzione al secondo principio della termodinamica

- Da quanto studiato fino ad ora vi sono due interrogativi a cui non sappiamo dare ancora una risposta.

1. Dalla prima legge della termodinamica abbiamo:

$$\boxed{\Delta U = Q - L}$$

Sappiamo che possiamo trasformare interamente del lavoro in calore, ad esempio con l'attrito.
È vero il viceversa?

   - Cioè, possiamo trasformare interamente del calore in lavoro? Se fosse possibile potremmo, ad esempio, ottenere del lavoro raffreddando il mare (moto perpetuo di seconda specie).

2. Come mai alcuni processi avvengono spontaneamente soltanto in una direzione temporale? Ad esempio il gas che esce spontaneamente da un contenitore.
   In altre parole, che cosa definisce il verso di scorrimento del tempo?

   - Per formalizzare l'aspetto di irreversibilità di una trasformazione si introduce il concetto di Entropia.

- È possibile rispondere a queste domande studiando il secondo principio della termodinamica.

Macchina termica (motore termico)

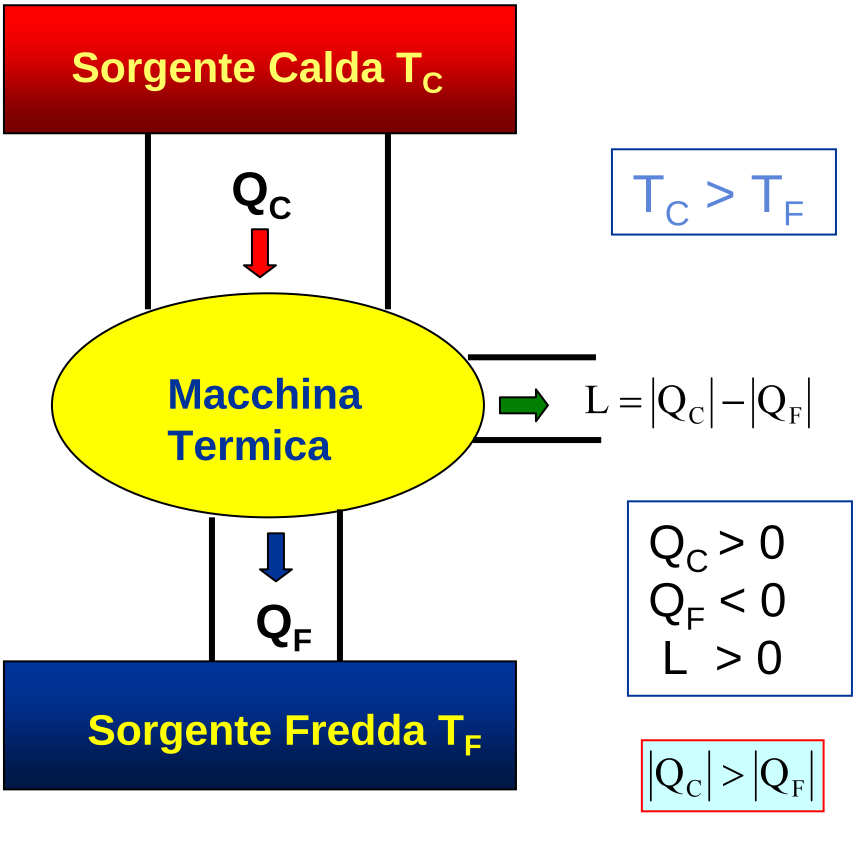
- Una macchina termica è un dispositivo che scambia calore con l'ambiente (l'ambiente è tutto ciò che non costituisce la macchina termica stessa) e produce lavoro meccanico ripetendo continuamente la stessa sequenza di trasformazioni, detta ciclo.

- Dal primo principio: $\Delta U = Q - L$

- Dato che l'energia interna è una funzione di stato, in un ciclo (cioè lo stato finale della trasformazione è uguale allo stato iniziale) si ha: $\Delta U = 0$

$$\boxed{\Delta U = 0 \quad \Rightarrow Q = L}$$

- Il lavoro prodotto dalla macchina è uguale al calore scambiato con l'ambiente.



Rendimento di una macchina termica

- Il lavoro fatto da una macchina termica che assorbe il calore Q_C e cede il calore Q_F vale:

$$L = |Q_C| - |Q_F|$$

- Il rendimento di una macchina termica viene definito come:

$$\boxed{\eta = \frac{L}{|Q_C|} = \frac{|Q_C| - |Q_F|}{|Q_C|} = 1 - \frac{|Q_F|}{|Q_C|} < 1}$$

- La trasformazione ciclica che avviene nel motore può essere irreversibile (caso reale) o reversibile (caso ideale).

- Si dimostra, invocando il secondo principio della termodinamica, che il rendimento di una macchina irreversibile è sempre minore di quello di una macchina reversibile:

$$\boxed{\eta_{irr} < \eta_{rev}}$$

- Si può anche dimostrare che il rendimento di tutte le macchine termiche reversibili che operano tra le stesse temperature è uguale.

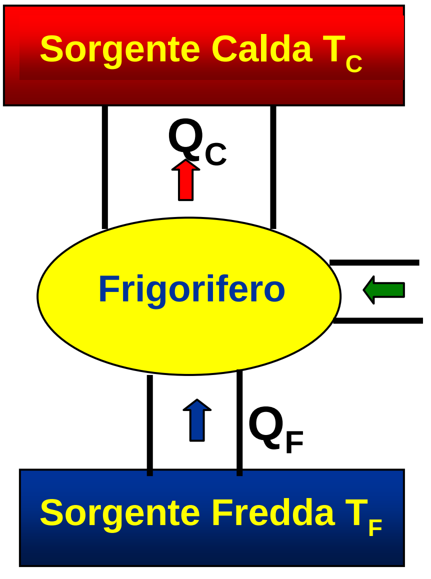
- Nel caso vi siano soltanto due sorgenti con le quali una macchina termica reversibile scambia calore, ovvero assorbe il calore Q_C da una sorgente a temperatura T_C e cede il calore Q_F ad una sorgente a temperatura T_F ($T_C > T_F$), si può esprimere il rendimento nel modo seguente:

$$\boxed{\eta_{rev} = 1 - \frac{|Q_F|}{|Q_C|} = 1 - \frac{T_F}{T_C}}$$

N.B. Utilizzando la relazione precedente, si può definire operativamente la temperatura termodinamica assoluta tramite il calore scambiato da una macchina termica reversibile

Macchine frigorifere e pompe di calore

- Prendiamo una macchina termica che funzioni al “contrario”:



$T_C > T_F$

$|Q_C| > |Q_F|$

$|L| = |Q_C| - |Q_F|$

$Q_C < 0$
$Q_F > 0$
$L < 0$

- Viene assorbito un calore Q_F dalla sorgente fredda e viene ceduto un calore Q_C alla sorgente calda tramite un lavoro fatto sulla macchina termica.

- Nel caso in cui la funzione della macchina sia quella di <u>raffreddare</u> la sorgente fredda, a questa viene dato il nome di <u>macchina frigorifera</u> o <u>frigorifero</u>.

- Invece, nel caso in cui lo scopo della macchina termica sia quello di <u>riscaldare</u> la sorgente calda, a questa viene dato il nome di <u>pompa di calore</u>. Come vedremo, queste sono delle “stufe” molto più efficienti delle normali sorgenti di calore, quali ad esempio le stufe elettriche. Sono però anche molto più costose.

- Una macchina termica reversibile può funzionare indifferentemente come motore termico o come frigorifero (o pompa di calore) semplicemente invertendo il segno del calore e del lavoro scambiati. Cosa che non può essere fatta ovviamente da una macchina termica reale.

Rendimento di una macchina termica

- Il rendimento è sempre definito come:

$$\text{rendimento} = \frac{\text{energia utile}}{\text{energia immessa}}$$

- <u>Macchina termica (motore termico):</u>

  l'energia utile è il lavoro che fa la macchina e l'energia immessa è il calore fornito alla macchina dalla sorgente "calda":

$$\eta = \frac{L}{|Q_C|} = \frac{|Q_C| - |Q_F|}{|Q_C|} = 1 - \frac{|Q_F|}{|Q_C|} < 1$$

- <u>Macchina frigorifera (frigorifera):</u>

  nel caso del frigorifero o della pompa di calore, non si parla di rendimento η ma si introduce il coefficiente di prestazione **COP**.

  Per il frigorifero l'energia utile è il calore che si riesce a togliere alla sorgente "fredda" e l'energia immessa è il lavoro che occorre fare sulla macchina, tipicamente tramite l'utilizzo di energia elettrica:

$$COP = \frac{|Q_F|}{|L|} = \frac{|Q_C| - |L|}{|L|} = \frac{|Q_C|}{|L|} - 1 = \frac{1}{\eta} - 1$$

- <u>Pompa di calore</u>:

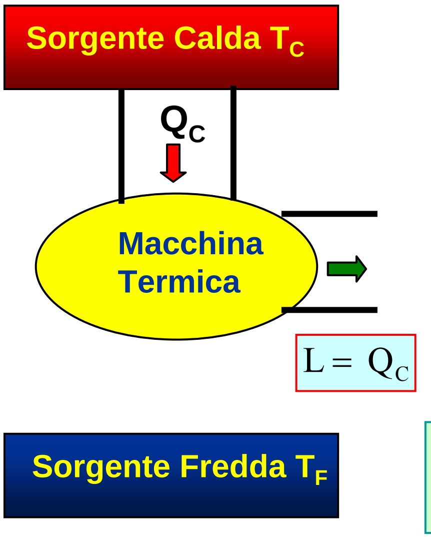
  in questo caso l'energia utile è quella ceduta alla sorgente calda, mentre per il lavoro vale quanto detto per il frigorifero:

$$COP = \frac{|Q_C|}{|L|} = \frac{|Q_C|}{|Q_C| - |Q_F|} = \frac{1}{\eta} > 1$$

come si vede si ha sempre COP > 1, quindi per riscaldare una stanza, a parità di energia elettrica utilizzata, conviene utilizzare una pompa di calore rispetto ad una stufetta elettrica tradizionale basata sull'effetto Joule.

Secondo principio della termodinamica

Enunciato di Kelvin-Plank

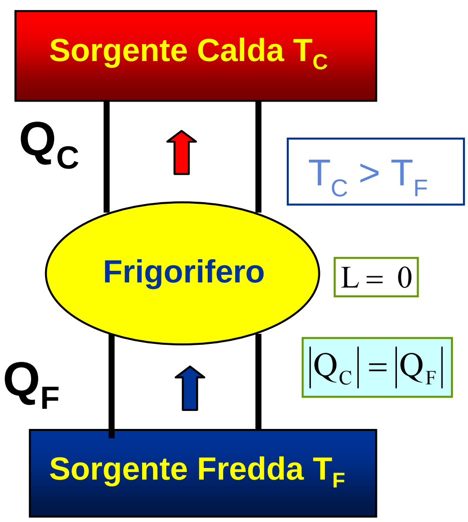


È impossibile una trasformazione ciclica il cui unico risultato sia la sottrazione di calore ad una sorgente a temperatura T e la conversione completa di questa energia termica in lavoro meccanico.

[non esiste la macchina termica perfetta]

Una macchina termica deve funzionare scambiando calore con almeno due sorgenti

Enunciato di Clausius



È impossibile una trasformazione ciclica il cui unico risultato sia la trasmissione di calore da un corpo a temperatura più bassa ad uno a temperatura più alta.

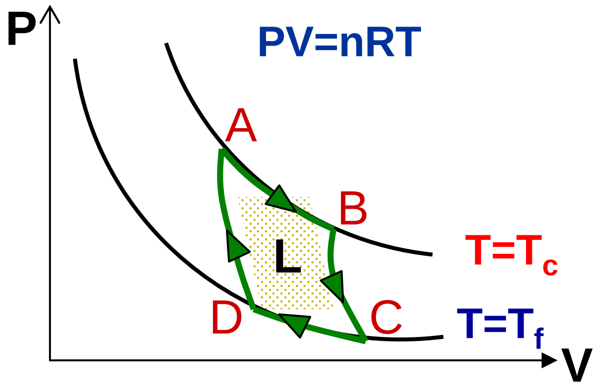
[non esiste il frigorifero perfetto]

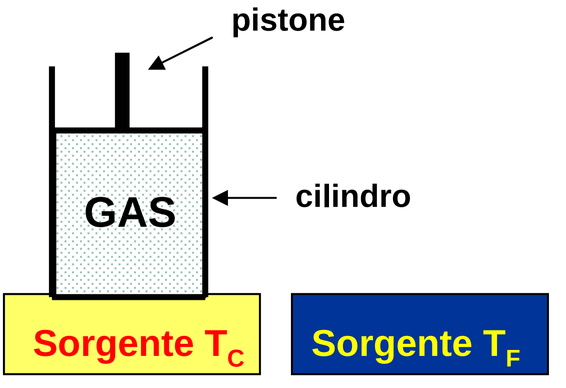
Il calore fluisce spontaneamente solo dai corpi caldi a quelli freddi e non viceversa

I due postulati sono equivalenti. Se non è vero l'uno si può dimostrare che non è vero nemmeno l'altro e viceversa

Macchina di Carnot
(ciclo di Carnot)

Consideriamo una macchina termica che usi un gas perfetto come fluido termodinamico.





- Immaginiamo la seguente trasformazione ciclica reversibile.

1. **AB: espansione a T costante (isoterma reversibile)**

   $\Delta U = Q - L$ dato che $\Delta T = 0$ => $\Delta U = nC_V\Delta T = 0$
   => $\mathbf{Q_C = L_{AB}}$
   il lavoro fatto dal gas è uguale al calore assorbito dalla sorgente a temperatura T_C.

2. **BC: espansione adiabatica reversibile: Q = 0**

   in questo caso il lavoro fatto dal gas è pari alla variazione di energia interna. $\mathbf{\Delta U_{BC} = - L_{BC}}$

3. **CD: compressione isoterma reversibile**

   in questo caso viene ceduto il calore Q_F alla sorgente a temperatura T_F. $\mathbf{Q_F = L_{CD}}$

4. **DA: compressione adiabatica reversibile: Q = 0**

N.B. Il lavoro è uguale all'area racchiusa dal ciclo.
Verso orario: L positivo; verso antiorario: L negativo.

… macchina di Carnot

- L'effetto totale del ciclo di Carnot è l'assorbimento della quantità di calore Q_C, il compimento del lavoro meccanico L da parte della macchina e la cessione del calore Q_F.

$$L = |Q_C| - |Q_F| \qquad \eta = \frac{|Q_C| - |Q_F|}{|Q_C|} = 1 - \frac{|Q_F|}{|Q_C|}$$

$$Q_C = L_{AB} = \int_A^B PdV = nRT_C \int_A^B \frac{dV}{V} = nRT_C (\ln V_B - \ln V_A) = nRT_C \ln \frac{V_B}{V_A}$$

$$Q_F = L_{CD} = nRT_F \ln \frac{V_D}{V_C} \qquad \Rightarrow |Q_F| = nRT_F \ln \frac{V_C}{V_D}$$

$$\frac{|Q_F|}{|Q_C|} = \frac{T_F \ln \frac{V_C}{V_D}}{T_F \ln \frac{V_B}{V_A}}$$

- I volumi V_A, V_B, V_C, V_D non sono indipendenti gli uni dagli altri perché sono collegati da isoterme e adiabatiche.

$$\frac{V_C}{V_D} = \frac{V_B}{V_A} \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{|Q_F|}{|Q_C|} = \frac{T_F}{T_F}$$

- Allora il rendimento della macchina vale:

$$\boxed{\eta = 1 - \frac{|Q_F|}{|Q_C|} = 1 - \frac{T_F}{T_C}}$$

- Tramite il secondo principio della termodinamica si dimostra che $\eta = 1 - T_F/T_C$ vale per qualsiasi macchina reversibile che lavori tra le due temperature T_C e T_F e non solo per la macchina di Carnot

ESERCIZI CONSIGLIATI

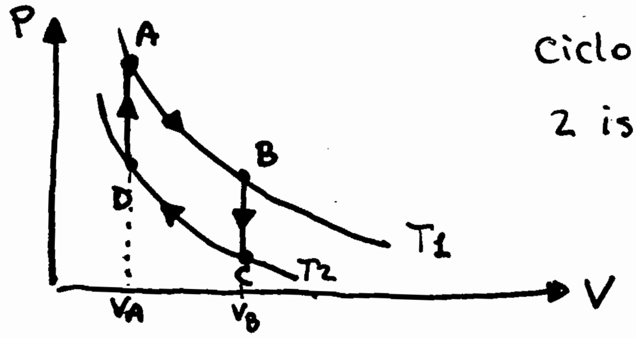
Macchine termiche – frigoriferi e pompe di calore

- Serway (3° Edizione) – Cap. 18
  - 1 – 3 – 5 – 7 – 9 – 11 – 13 – 15 – 19 – 37 – 39 – 41 – 43 – 45 – 49 – 51
- Halliday (5° Edizione) – Cap. 21
  - 15E – 17E – 19P – 21P – 23P – 25P – 27E – 29E – 31P – 33P

PROBLEMA 21-3

UN MOTORE STIRLING IMPIEGA $n = 8.8 \cdot 10^{-3}$ MOLI DI UN GAS IDEALE, OPERA TRA DUE SORGENTI DI TEMPERATURA $T_1 = 95°C$ E $T_2 = 24°C$, GIRA A UNA VELOCITA' DI 0.70 CICLI AL SECONDO E IL RAPPORTO TRA I VOLUMI DURANTE L'ESPANSIONE DEL FLUIDO MOTORE E' 2.0. TROVARE:

a) IL LAVORO NETTO PER CICLO; b) LA POTENZA DEL MOTORE; c) IL CALORE FORNITO AL GAS IN UN CICLO; d) IL RENDIMENTO



Ciclo di Stirling

2 isoterme e 2 isocore

a) $L_{AB} = nRT_1 \ln \frac{V_B}{V_A}$; $L_{CD} = nRT_2 \ln \frac{V_A}{V_B}$; $L_{BC} = L_{DA} = 0$

$$L = nRT_1 \ln \frac{V_B}{V_A} - nRT_2 \ln \frac{V_B}{V_A} = nR(T_1 - T_2) \ln \frac{V_B}{V_A} =$$

$$= 8 \cdot 10^{-3} \cdot (95-24) \cdot 8.314 \cdot \ln 2 = 3.3 \text{ J}$$

b) $P = \frac{L}{t}$; $t = \frac{1}{f} = \frac{1}{0.70} = 1.429 \text{ s} \Rightarrow P = \frac{3.31}{1.429} = 2.3 \text{ W}$

c) NELL' ISOTERMA $\Delta U = 0 \Rightarrow Q = L$

$Q_1 = L_{AB} = nRT_1 \ln \frac{V_B}{V_A}$; $T_1 = 273.15 + 85 = 368.15 \text{ K}$

$Q_1 = 8 \cdot 10^{-3} \cdot 8.314 \cdot 368.15 \cdot \ln 2 = 17 \text{ J}$ $+ (Q_{DA} = \Delta U)$

d) IL CICLO E' REVERSIBILE, ALLORA:

$$\eta = 1 - \frac{T_2}{T_1} = 1 - \frac{273.15 + 24}{273.15 + 85} = 0.193 \simeq 19\%$$

PROBLEMA

UNA MACCHINA DI CARNOT LAVORA TRA UNA SORGENTE A TEMPERATURA $T_C = 700\ °C$ ED UNA SORGENTE FREDDA A TEMPERATURA $T_F = 0\ °C$ REALIZZATA CON GHIACCIO FONDENTE. DURANTE IL FUNZIONAMENTO DELLA MACCHINA SI OSSERVA CHE IL GHIACCIO DELLA SORGENTE FREDDA FONDE AL RITMO DI 5 g/s. RICORDANDO CHE IL CALORE LATENTE DI FUSIONE DEL GHIACCIO E' $L_F \simeq 80$ cal/g, CALCOLARE LA POTENZA SVILUPPATA DALLA MACCHINA.

o—o—o—•—•

$$\eta = 1 - \frac{T_F}{T_C} = 1 - \frac{273.15}{700+273.15} = 0.719$$ [LA MACCHINA E' REVERSIBILE]

SAPPIAMO CHE:

$$\frac{|Q_F|}{|Q_C|} = \frac{T_F}{T_C} \Rightarrow Q_C = \frac{|Q_F|}{T_F} \cdot T_C$$

Q_F LO RICAVIAMO DALLA QUANTITA' DI GHIACCIO CHE FONDE

$$|Q_F| = L_F \cdot m_g = \left(80\ \frac{cal}{g}\right) \cdot \left(5\ \frac{g}{s}\right) \cdot t = 400\ \frac{cal}{s} \cdot t$$

LA MACCHINA CEDE ALLA SORGENTE FREDDA 400 calorie al secondo

$$Q_C = \frac{|Q_F|}{T_F} \cdot T_C = \frac{400\ \frac{cal}{s}}{273.15} \cdot (700 + 273.15) = 1425\ \frac{cal}{s}$$

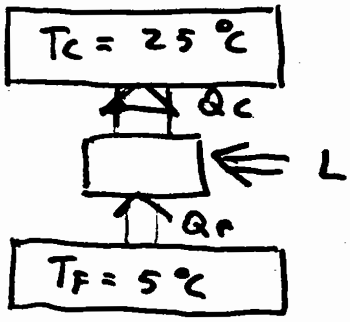
TROVIAMO ORA IL LAVORO FATTO PER UNITA' DI TEMPO (POTENZA)

$$\eta = \frac{L}{Q_C} \Rightarrow L = Q_C \cdot \eta = 1425\ \frac{cal}{s} \cdot 0.719 = 1025\ \frac{cal}{s}$$

$$P = \frac{L}{t} = 1025 \cdot 4.186 = \underline{4.3\ kW}$$

ESONERO 3 - ESERCIZIO 2

Esonero 3 - Esercizio 2 **(7 punti)**
Il freezer di un frigorifero ed il suo contenuto sono alla temperatura di 5 °C ed hanno una capacità termica media di 84 kJ/K. Il frigorifero cede calore alla stanza, che si trova alla temperatura di 25 °C. Qual'è il valore minimo della potenza che deve avere il motore usato per far funzionare il frigorifero affinché questo riduca di 1 °C, in un minuto, la temperatura del freezer e del suo contenuto.
~~**(Risultato: 93.9 W)**~~



$$\eta = \frac{\text{ENERGIA UTILE}}{\text{ENERGIA IMMESSA}}$$

- LA VARIAZIONE DI UN GRADO CORRISPONDE AD UN CALORE DI:

$$Q_F = C \cdot \Delta T = 84 \cdot 10^3 \cdot 1 = 84 \text{ kJ}$$

- IL LAVORO MINIMO, QUINDI L'EFFICIENZA PIU' ALTA, SI OTTIENE CON UNA MACCHINA REVERSIBILE

$$COP = \frac{Q_F}{L} = \frac{Q_F}{Q_C - Q_F} = \frac{T_F}{T_C - T_F} = \frac{273.1 + 5}{20} = 13.90$$

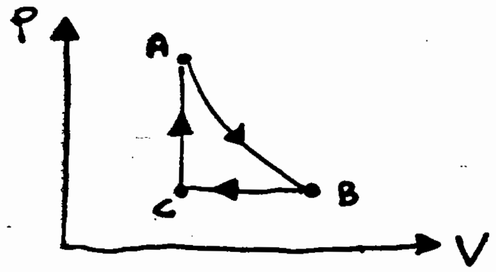
- $$L = \frac{Q_F}{COP} = \frac{84 \cdot 10^3}{13.90} = 6.04 \text{ kJ}$$

- IL LAVORO VIENE FATTO IN UN MINUTO, QUINDI:

$$P = \frac{L}{\Delta t} = \frac{6.04 \cdot 10^3}{60} = 100.7 \text{ W}$$

ESONERO 2 - ESERCIZIO 1

Esonero 2 - Esercizio 1 (7 punti)
Una macchina termica che usa come fluido operante 1 mole di un gas perfetto biatomico percorre un ciclo costituito da tre fasi: (1) un'espansione adiabatica da una pressione iniziale di 2.64 atm e un volume iniziale di 10 l a una pressione di 1 atm e un volume di 20 l, (2) una compressione a pressione costante fino al volume iniziale di 10 l, (3) un riscaldamento a volume costante fino alla pressione iniziale di 2.64 atm. Si trovi il rendimento di questo ciclo.
(Risultato: $\eta = 0.146$)



$P_A = 2.64$ atm ; $V_A = 10$ l
$P_B = 1$ atm ; $V_B = 20$ l
$P_C = P_B = 1$ atm ; $V_C = V_A = 10$ l
$C_V = \frac{5}{2} R$

$\eta = \frac{L}{Q_{ASS}}$; adiabatica reversibile : $PV^\gamma =$ costante ; $\gamma = \frac{C_P}{C_V}$

1) ADIABATICA : $Q = 0 \Rightarrow L = -\Delta U$

$$T_A = \frac{P_A V_A}{nR} = \frac{2.64 \cdot 1.01 \cdot 10^5 \cdot 10 \cdot 10^{-3}}{1 \cdot 8.314} = 320.7 \text{ K}$$

$$T_B = \frac{P_B V_B}{nR} = \frac{1 \cdot 20 \cdot 101}{1 \cdot 8.314} = 243.0 \text{ K}$$

$$\Delta U = n C_V \Delta T = 1 \cdot \frac{5}{2} \cdot 8.314 \cdot (243.0 - 320.7) = -1615.0 \text{ J}$$

$$L = -\Delta U = 1615 \text{ J}$$

2) BC : ISOBARA

$$L = P \Delta V = 1 \cdot (10 - 20) \cdot 101 = -1010 \text{ J}$$

$$T_C = \frac{P_C V_C}{nR} = \frac{1 \cdot 10 \cdot 101}{1 \cdot 8.314} = 121.5 \text{ K}$$

$$Q = n c_p \Delta T = n(C_V + R)\Delta T = 1 \cdot \frac{7}{2} \cdot 8.314 \cdot (121.5 - 243.0) = -3535.5 \text{ J}$$

3) CA : ISOCORA $\quad L = 0$

$$Q = \Delta U$$

$$\Delta U = n C_v \Delta T = 1 \cdot \frac{5}{2} \cdot 8.314 \cdot (320.7 - 121.5) = 4140.4 \text{ J}$$

$$Q = 4140.4 \text{ J}$$

- $L_{TOT} = L_{AB} + L_{BC} = 1615 - 1010 = \underline{605 \text{ J}}$

- $Q_{TOT} = Q_{BC} + Q_{CA} = -3535.5 + 4140.4 = \underline{604.9 \simeq 605 \text{ J}}$

$\Delta U = Q_{TOT} - L_{TOT} = 605 - 605 = 0$ [in un ciclo ΔU è sempre uguale a zero]

- $\eta = \dfrac{L_{TOT}}{Q_{ASSOR.}} = \dfrac{605}{4140.4} = \underline{0.146}$

PROVA SCRITTA - 20 APRILE 1998

UNA CENTRALE TERMOELETTRICA IDEALE OPERA SEGUENDO UN CICLO TERMODINAMICO CON DUE SORGENTI DI CALORE. LA CENTRALE EROGA UNA POTENZA EFFETTIVA DI $2\cdot10^8$ W CON UN RENDIMENTO DEL 70%. LA SORGENTE DI CALORE A TEMPERATURA INFERIORE E' COSTITUITA DA UNA CONDOTTA D'ACQUA, LA CUI TEMPERATURA AUMENTA DI UN VALORE $\Delta T = 5\,°C$, DOPO LO SCAMBIO DI CALORE CON LA CENTRALE. SI CALCOLI LA PORTATA DELLA CONDOTTA.

o——o——o——o

- VOGLIAMO RICAVARE IL CALORE CEDUTO ALLA CONDOTTA D'ACQUA

- IL RENDIMENTO DELLA MACCHINA TERMICA E':

$$\eta = \frac{L}{Q_c} \Rightarrow Q_c = \frac{L}{\eta}$$ [calore assorbito dalla macchina]

INOLTRE $L = Q_c - |Q_F|$

$$\Rightarrow L = \frac{L}{\eta} - |Q_F| \Rightarrow |Q_F| = \frac{L}{\eta} - L = L\,\frac{1-\eta}{\eta}$$

$$Q_F = L\,\frac{1-\eta}{\eta} = 2\cdot10^8\,\frac{1-0.7}{0.7} = 0.857\cdot10^8 \text{ J/s}$$

- QUESTO E' IL CALORE CEDUTO ALL'ACQUA PER SECONDO

INFATTI $L = P\cdot\Delta t$

- IL CALORE CEDUTO SARA' $Q_F \cdot t$

20-4-1998

- QUESTO CALORE, CEDUTO AD UNA MASSA DI ACQUA m, PROVOCA UN INNALZAMENTO DELLA TEMPERATURA PARI A:

$$\Delta T = \frac{Q}{m \cdot c} \Rightarrow Q = mc \cdot \Delta T$$

- VALUTIAMO LA QUANTITA' DI ACQUA CHE OGNI SECONDO VIENE A CONTATTO CON LA MACCHINA TERMICA

$$\text{Portata} = \text{Sezione} \times \text{Velocita'} = \text{Volume} / \text{tempo}$$

$$\Rightarrow V = R \cdot t \qquad [\text{Volume} = \text{Portata} \cdot \text{Tempo}]$$

- LA MASSA DI ACQUA VALE:

$$m = V \cdot \rho \qquad [\text{volume} \times \text{densita'}] \qquad \left[\rho_A = 10^3 \ \frac{kg}{m^3}\right]$$

- QUINDI:

$$Q_F \cdot t = (R \cdot t) \cdot \rho \cdot c \cdot \Delta T \qquad \left[c = 4186 \ \frac{J}{kg \cdot K}\right]$$

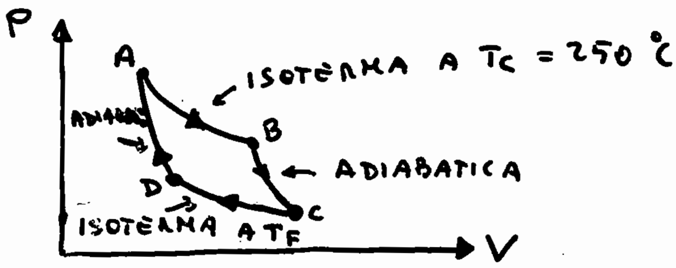
$$\Rightarrow R = \frac{Q_F}{\rho \cdot c \cdot \Delta T} = \frac{0.857 \cdot 10^8}{10^3 \cdot 4186 \cdot 5} = \underline{4.095 \ m^3/s}$$

PROVA SCRITTA - 8 LUGLIO 1996

UNA MACCHINA TERMICA REVERSIBILE LAVORA SECONDO UN CICLO DI CARNOT, UTILIZZANDO COME FLUIDO 0.420 MOLI DI UN GAS PERFETTO. L'ESPANSIONE ISOTERMICA AVVIENE ALLA TEMPERATURA DI 250 °C E PORTA A RADDOPPIARE IL VOLUME INIZIALE; LA COMPRESSIONE ISOTERMICA SI REALIZZA ALLA TEMPERATURA DI 50 °C. SI CALCOLI:

a) LA QUANTITA' DI CALORE CHE IL GAS CEDE IN OGNI CICLO AL TERMOSTATO A TEMPERATURA MINORE

b) IL LAVORO PRODOTTO DALLA MACCHINA IN OGNI CICLO



$T_C = 250\ °C$

$T_F = 50\ °C$

$V_B = 2\,V_A$

$n = 0.420$

- LA MACCHINA DI CARNOT E' REVERSIBILE, QUINDI:

$$\eta = \frac{L}{Q_c} = 1 - \frac{T_F}{T_C} = 1 - \frac{273.1+50}{273.1+250} = 0.382$$

- NELLA TRASFORMAZIONE ISOTERMA AB $\Delta U = 0 \Rightarrow Q = L$

$$L_{AB} = nRT_c \ln\frac{V_B}{V_A} = nRT_c \ln 2 = 0.420 \cdot 8.314 \cdot (273.1+250)\cdot \ln 2 =$$

$$\boxed{L_{AB} = 1266\ J} = Q_{AB} = Q_c$$

- IL LAVORO FATTO IN OGNI CICLO VALE:

$$L = \eta \cdot Q_c = 0.382 \cdot 1266 = \underline{483.6\ J}$$

- DATO CHE IN UN CICLO $\Delta U = 0$, ALLORA

$$L = Q_{TOT} = Q_c - |Q_F|$$

$$\Rightarrow |Q_F| = Q_c - L = 1266 - 483.6 = \underline{782.4\ J}$$

Entropia (S)

- Il secondo principio della termodinamica è stato descritto con riferimento a enunciati su quali trasformazioni sono possibili e quali sono impossibili.

- Nel 1865 Clausius introdusse il concetto di Entropia per esprimere in forma astratta il secondo principio senza riferirsi a nessun dispositivo particolare.

- Si può definire la variazione di entropia di un sistema in due modi:

1. In termini di energia scambiata sotto forma di calore e di temperatura alla quale avviene lo scambio.

2. Contando le disposizioni microscopiche con cui è possibile realizzare lo stesso stato macroscopico (meccanica statistica).

   - L'entropia è una misura del disordine di un sistema

   - Un sistema, a parità di energia, tende a portarsi verso lo stato di massimo disordine.

Definizione dell'entropia

- Immaginiamo un sistema che faccia una trasformazione infinitesima reversibile scambiando il calore δQ alla temperatura T.

  [dato che la trasformazione è reversibile, la temperatura della sorgente e del sistema è la stessa. Se fossero diverse, come succede nei casi reali, la trasformazione sarebbe irreversibile].

- Si definisce come variazione infinitesima di entropia la quantità:

$$\boxed{dS = \frac{\delta Q}{T}}$$

- La variazione di entropia tra uno stato iniziale **i** ed uno stato finale **f** è pari a:

$$\boxed{\Delta S = S(f) - S(i) = \int_i^f {}_{rev} \frac{\delta Q}{T}}$$

- La trasformazione per andare da **i** a **f** deve essere **reversibile**, altrimenti vale la disuguaglianza di Clausius nel caso la trasformazione sia irreversibile.

$$\boxed{\Delta S = S(f) - S(i) > \int_i^f {}_{irr} \frac{\delta Q}{T}}$$

N.B. T è sempre la temperatura della sorgente e non del sistema. Solo per trasformazioni reversibili le due sono le stesse.

Entropia: proprietà

- Si dimostra che S è una funzione di stato, cioè la sua variazione dipende solo dallo stato iniziale e dallo stato finale, ma non dal percorso.

- L'entropia è una grandezza estensiva, vale a dire è una grandezza additiva.

- La grandezza che interessa in una trasformazione è la variazione di entropia e non il suo valore assoluto.

- L'entropia è definita a meno di una costante arbitraria. Il terzo principio della termodinamica stabilisce il valore di questa costante.

- In una trasformazione reversibile l'entropia dell'universo (sistema più ambiente) rimane costante, mentre in una trasformazione irreversibile l'entropia dell'universo aumenta sempre.

- Le trasformazioni spontanee (che sono irreversibili) avvengono in modo tale da aumentare l'entropia dell'universo.

Entropia come funzione di stato

- Prendiamo un ciclo di Carnot:
  Q_C = calore assorbito dal sistema alla temperatura T_C
  Q_F = calore ceduto dal sistema alla temperatura T_F

- Abbiamo che:

$$\eta = 1 - \frac{|Q_F|}{|Q_C|} = 1 - \frac{T_F}{T_C} \quad \Rightarrow \quad \frac{|Q_F|}{|Q_C|} = \frac{T_F}{T_C}$$

- Quindi:

$$\frac{|Q_F|}{T_F} = \frac{|Q_C|}{T_C} \quad \Rightarrow \quad \frac{|Q_C|}{T_C} - \frac{|Q_F|}{T_F} = 0$$

- Consideriamo il calore con il segno opportuno, si ha:

$$\frac{Q_C}{T_C} + \frac{Q_F}{T_F} = 0$$

- Se il sistema scambiasse calore con **n** sorgenti, si avrebbe:

$$\frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_2}{T_2} + \cdots \frac{Q_i}{T_i} + \cdots \frac{Q_n}{T_n} = 0 \quad ; \sum_{i=1}^{n} \frac{Q_i}{T_i} = 0$$

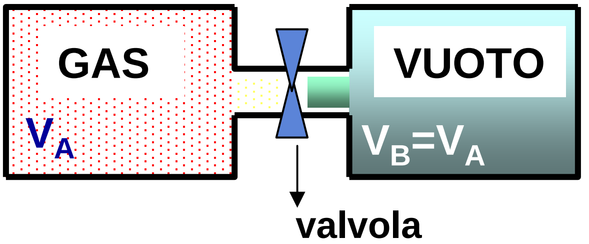
- Q_i è il calore scambiato, in modo reversibile, dal sistema con la sorgente i-esima a temperatura T_i.

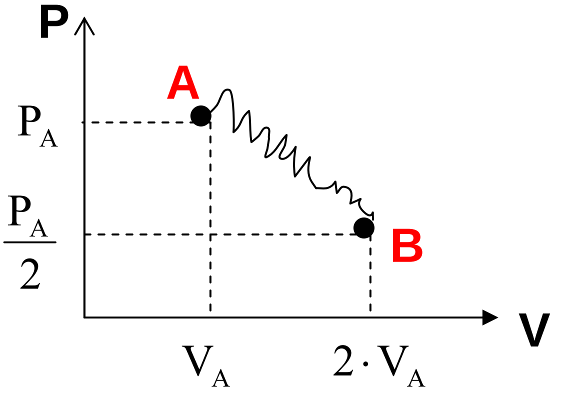
- Se facciamo tendere n all'infinito, la sommatoria si trasforma in un integrale ciclico:

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{Q_i}{T_i} = \oint \frac{\delta Q}{T} = 0$$

- $\oint \frac{\delta Q}{T} = 0$ è la condizione affinché la grandezza $dS = \frac{\delta Q}{T}$ sia il differenziale di una funzione di stato

Variazioni di entropia nelle trasformazioni irreversibili: espansione libera di un gas perfetto





- L'espansione libera di un gas è un processo irreversibile
  - Stato iniziale: $V = V_A$; $P = P_A$; $T = T_A$
  - Stato finale: $V=2 \cdot V_A$; $P = P_A/2$; $T = T_A$
- La trasformazione è un'espansione libera nel vuoto. Non viene scambiato né calore e né lavoro.
  - $Q = 0$; $L = 0$; $\Delta U = 0$; $\Delta T = 0$
- Valutiamo l'integrale di Clausius:

$$\int_A^B \frac{\delta Q}{T} = \frac{1}{T_A}\int_A^B \delta Q = \frac{Q}{T_A} = 0$$

- Allora $\Delta S = 0$? **NO**

perché il calcolo dell'entropia va fatto lungo una trasformazione reversibile che abbia lo stesso stato iniziale e lo stesso stato finale della trasformazione irreversibile.

ΔS: espansione libera nel vuoto

- Dato che la temperatura dello stato iniziale e dello stato finale è la stessa, si può scegliere come trasformazione reversibile un'isoterma.

$$\boxed{\Delta S = \int_{A\,rev}^{B} \frac{\delta Q}{T}}$$

- Nell'isoterma si ha: $\Delta U = Q - L = 0 \Rightarrow Q = L$

$$\delta Q = \delta L = PdV = \frac{nRT}{V} dV$$

$$\Delta S = \int_{A\,rev}^{B} \frac{\delta Q}{T} = \int_{A}^{B} \frac{nRT}{TV} dV = nR \int_{A}^{B} \frac{dV}{V} = nR \cdot \ln \frac{V_B}{V_A}$$

- Dato che nel nostro esempio $V_B = 2V_A$, si ha:

$$\boxed{\Delta S = S(B) - S(A) = nR \cdot \ln 2 > 0}$$

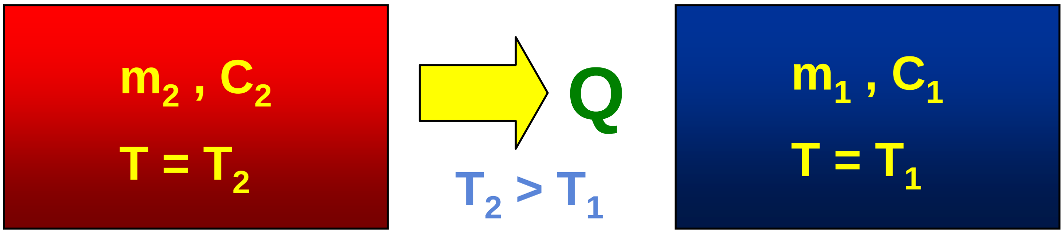
- In una espansione libera l'entropia S è aumentata, cioè è aumentato il disordine del sistema.

- N.B. vale sempre la disuguaglianza di Clausius

$$\boxed{\int_{A\,irr}^{B} \frac{\delta Q}{T} \leq S(B) - S(A)}$$

Il segno di uguale vale solo per trasformazioni reversibili

ΔS: scambio di calore



- Abbiamo un corpo di massa m_2, calore specifico c_2 e temperatura T_2 che viene messo in contatto termico con un altro di massa m_1, calore specifico c_1 e temperatura T_1.

- Se $T_2 > T_1$ si avrà uno scambio di calore tra i due corpi fino a quando questi non raggiungeranno l'equilibrio termico a temperatura T_f.

- Il calore "ceduto" dal corpo 2 vale:

$$Q_2 = m_2 \cdot c_2 \cdot (T_f - T_2) \qquad \text{[negativo]}$$

- Il calore "assorbito" dal corpo 1 vale:
-

$$Q_1 = m_1 \cdot c_1 \cdot (T_f - T_1) \qquad \text{[positivo]}$$

- Se non c'è dispersione di calore verso l'ambiente si deve avere:

$$Q_1 + Q_2 = 0$$

$$m_1 \cdot c_1 \cdot (T_f - T_1) + m_2 \cdot c_2 \cdot (T_f - T_2) = 0$$

$$T_f = \frac{m_1 \cdot c_1 \cdot T_1 + m_2 \cdot c_2 \cdot T_2}{m_1 \cdot c_1 + m_2 \cdot c_2}$$ **[Temperatura finale di equilibrio]**

$$T_2 > T_f > T_1$$

ΔS: scambio di calore

- Per calcolare ΔS dobbiamo scegliere una trasformazione reversibile che unisca gli stessi stati iniziali e finali

- Immaginiamo di mettere a contatto i due corpi con delle sorgenti e variamo poi la temperatura delle stesse

$$dS = \frac{\delta Q}{T} = \frac{mcdT}{T}$$

cmdT: calore infinitesimo scambiato con la sorgente

$$\Delta S_1 = \int_{T_1}^{T_f} \frac{m_1 c_1 dT}{T} = m_1 c_1 \ln\frac{T_f}{T_1} > 0$$

[il corpo si è scaldato]

$$\Delta S_2 = \int_{T_2}^{T_f} \frac{m_2 c_2 dT}{T} = m_2 c_2 \ln\frac{T_f}{T_2} < 0$$

[il corpo si è raffreddato]

$$\Delta S = \Delta S_1 + \Delta S_2$$

- Esempio numerico: immaginiamo che i due corpi siano identici.

$$m_1 = m_2 = m \ \text{ e } \ c_1 = c_2 = c$$

e che le temperature siano $T_1 = 20$ ºC e $T_2 = 60$ ºC

$$T_f = \frac{m\cdot c\cdot T_1 + m\cdot c\cdot T_2}{m\cdot c + m\cdot c} = \frac{T_1 + T_2}{2} = \frac{20+60}{2} = 40\,^{o}C$$

$$\Delta S_1 = mc\cdot\ln\frac{273+40}{273+20} = mc\cdot 0.0660$$

$$\Delta S_2 = mc\cdot\ln\frac{273+40}{273+60} = -mc\cdot 0.0619$$

$$\Delta S = mc\cdot 0.0041 > 0$$

<u>L'entropia è aumentata perché lo scambio di calore è un processo irreversibile</u>

ESERCIZI CONSIGLIATI

Entropia

- Serway (3° Edizione) – Cap. 18
  - 21 – 23 – 27 – 29 – 31 – 33 - 53
- Halliday (5° Edizione) – Cap. 21
  - 1E – 3E – 5E – 7E – 9P – 11P – 13P

PROBLEMA

UNA MACCHINA TERMICA SCAMBIA CALORE CON DUE SOLE SORGENT[I] A TEMPERATURA $T_C = 500\,K$ E $T_F = 300\,K$ RISPETTIVAMENTE. IN UN CERTO INTERVALLO DI TEMPO LA MACCHINA PRODUCE UN LAVORO $L = 100\,J$ CON UN RENDIMENTO $\eta = 0.20$. CALCOLARE LA CORRISPONDENTE VARIAZIONE DI ENTROPIA DELL'UNIVERSO.

$$- \eta_{REV} = 1 - \frac{T_F}{T_C} = 1 - \frac{300}{500} = 1 - 0.6 = 0.4$$

$\Rightarrow \eta = 0.20 < \eta_{REV} \Rightarrow$ LA MACCHINA E' IRREVERSIBILE

$\Rightarrow \Delta S_{UNIVERSO} > 0$

- $\eta = \dfrac{L}{Q_C} \Rightarrow Q_C = \dfrac{L}{\eta} = \dfrac{100}{0.2} = 500\,J$ (calore assorbito)

$|Q_F| = Q_C - L = 500 - 100 = 400\,J$ (calore ceduto)

NOTARE CHE:

$$\frac{|Q_F|}{|Q_C|} = \frac{400}{500} = 0.8 \neq \frac{T_F}{T_C} = \frac{300}{500} = 0.6$$ POICHE' E' IRREVERSIBILE

$$\Delta S_{UNIV.} = \Delta S_{CALDA} + \Delta S_{FREDDA} + \Delta S_{MACCHINA}$$

$\Delta S_{CALDA} = \dfrac{Q_C}{T_C} = \dfrac{-500}{500} = -1\,J/K$ [la sorgente calda cede calore]

$\Delta S_{FREDDA} = \dfrac{Q_F}{T_F} = \dfrac{400}{300} = 1.33\,J/K$ [la sorgente fredda ASSORBE calore]

$\Delta S_{MACCHINA} = 0$ POICHE' LA MACCHINA FA UNA TRASFORMAZIONE CICLICA

$$\Delta S_{UNIV} = -1 + 1.33 + 0 = 0.33\,\frac{J}{K} > 0$$

ESONERO 2 - ESERCIZIO 2

Esonero 2 - Esercizio 2 (7 punti)
Se un blocco di piombo di massa 2 kg, alla temperatura di 100 °C, viene lasciato cadere in un lago la cui temperatura è 10 °C, si trovi la variazione di entropia dell'universo. Il calore specifico del piombo è 128 J/($kg \cdot K$). Si assuma la capacità termica del lago infinita.
(Risultato: 10.7 J/K) → ALLORA LA TEMPERATURA DEL LAGO NON CAMBIA

- IL BLOCCO RAGGIUNGE LA STESSA TEMPERATURA DEL LAGO
- IL CALORE CEDUTO DAL BLOCCO AL LAGO VALE:

$$|Q| = m \cdot c \cdot |\Delta T| = 2 \cdot 128 \cdot (100-10) = 23040 \text{ J}$$

- IL PROCESSO È IRREVERSIBILE.

SCEGLIAMO UN PROCESSO REVERSIBILE PER CALCOLARE ΔS

$$dS = \frac{\delta Q}{T} = \frac{mc\,dT}{T}$$

$$\Delta S = \int_{T_{iniz.}}^{T_{fin}} mc\frac{dT}{T} = mc \ln\frac{T_F}{T_i} = 2 \cdot 128 \cdot \ln\frac{283.1}{373.1} = -70.67 \text{ J/K}$$

- VARIAZIONE DI ENTROPIA DEL LAGO:

$$\Delta S = \frac{Q_{ass.}}{T} = \frac{23040}{283.1} = 81.38 \text{ J/K}$$

- VARIAZIONE DI ENTROPIA DELL'UNIVERSO

$$\Delta S_U = \Delta S_{LAGO} + \Delta S_{PIOMBO} = 81.38 - 70.67 = 10.7 \text{ J/K}$$

- $\Delta S_U > 0$ PERCHÉ IL PROCESSO È IRREVERSIBILE

PROBLEMA

UN BLOCCO DI RAME DI MASSA 1 kg, ALLA TEMPERATURA DI 100 °C, VIENE INTRODOTTO IN UN RECIPIENTE DI CAPACITA' TERMICA TRASCURABILE, CONTENENTE 4 l DI ACQUA ALLA TEMPERATURA DI 0 °C. SI TROVI LA VARIAZIONE DI ENTROPIA: a) DEL BLOCCO DI RAME; b) DELL'ACQUA; c) DELL'UNIVERSO.

o——o——o——o

- TROVIAMO LA TEMPERATURA DI EQUILIBRIO FINALE.

$$m_R \cdot c_R \cdot (T_f - T_R) + m_A \cdot c_A \cdot (T_F - T_A) = 0$$

$$T_F = \frac{m_R \cdot c_R \cdot T_R + m_A \cdot c_A \cdot T_A}{m_R \cdot c_R + m_A \cdot c_A} =$$

$$= \frac{1 \cdot 387 \cdot 100 + 4 \cdot 4186 \cdot 0}{1 \cdot 387 + 4 \cdot 4186} = \underline{2.26\ °C}$$

- PER CALCOLARE LA VARIAZIONE DI ENTROPIA IPOTIZZIAMO UN PROCESSO REVERSIBILE CHE CONNETTA GLI STESSI STATI INIZIALI E FINALI

- RAME:

$$dS = \frac{\delta Q}{T} = \frac{m_R \cdot c_R \, dT}{T}$$

$$\Delta S_A = \int_{T_R}^{T_f} \frac{m_R \cdot c_R \, dT}{T} = m_R \cdot c_R \int_{T_R}^{T_f} \frac{dT}{T} = m_R \cdot c_R \cdot \ln \frac{T_f}{T_R}$$

$$\Delta S_R = 1 \cdot 387 \cdot \ln \frac{273.1 + 2.26}{273.1 + 100} = \underline{-117.5 \ \frac{J}{K}}$$

- ACQUA:

$$\Delta S_A = m_A \cdot c_A \cdot \ln \frac{T_f}{T_A} = 4 \cdot 4186 \cdot \ln \frac{273.1 + 2.26}{273.1} = +138.0 \ \frac{J}{K}$$

- UNIVERSO:

$$\Delta S_u = \Delta S_A + \Delta S_R = 138.0 - 117.5 = +20.5 \ J/K$$

N.B. $\Delta S_u > 0$ PERCHE' IL PROCESSO E' IRREVERSIBILE

PROVA SCRITTA - 20 LUGLIO 1998

UNA CERTA QUANTITA' DI He, IN CONDIZIONI DI GAS PERFETTO, OCCUPA UN VOLUME DI 2 ℓ A 2 atm A 30 °C. IL GAS SUBISCE, UNA DOPO L'ALTRA, LE SEGUENTI TRASFORMAZIONI:

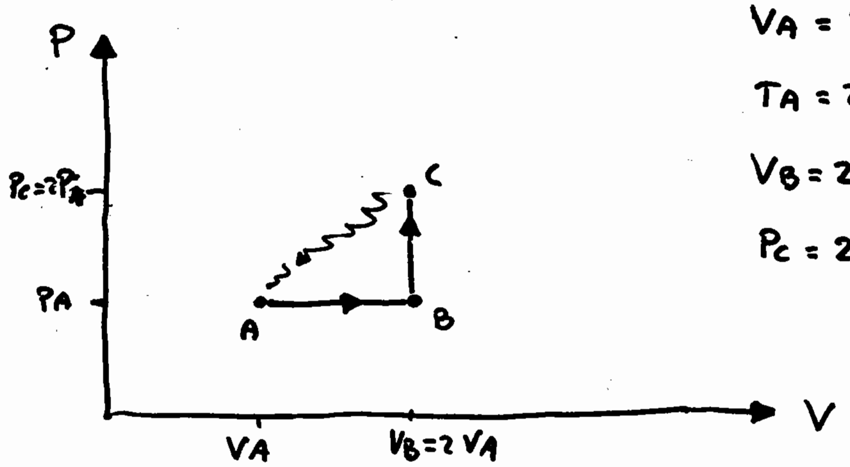
a) UNA ISOBARA REVERSIBILE, CHE RADDOPPIA IL VOLUME DEL GAS

b) UNA ISOCORA REVERSIBILE, CHE RADDOPPIA LA PRESSIONE DEL GAS

c) UNA TRASFORMAZIONE NON REVERSIBILE, CHE RIPORTA IL GAS ALLE CONDIZIONI INIZIALI.

PER CIASCUNA DELLE TRASFORMAZIONI SI CALCOLI, OVE POSSIBILE, IL LAVORO COMPIUTO DAL GAS E LA VARIAZIONE DI ENTROPIA.

o——o——o——o



$V_A = 2\,\ell$; $P_A = 2$ atm

$T_A = 273.1 + 30 = 303.1$ K

$V_B = 2V_A = 4\,\ell$; $P_B = P_A$

$P_C = 2P_A = 4$ atm

- TRASFORMAZIONE AB: ISOBARA

$$L = P\Delta V = P_A \cdot (V_B - V_A) = 2 \cdot 1.01 \cdot 10^5 \cdot (4-2) \cdot 10^{-3} = 404 \text{ J}$$

$$\Delta S = \int_{T_A}^{T_B} \frac{\delta Q}{T} \quad ; \quad T_B = \frac{V_B}{V_A} \cdot T_A = \frac{4}{2} \cdot 303.1 = 606.2 \text{ K}$$

- PER UNA TRASFORMAZIONE A PRESSIONE COSTANTE SI PUO' SCRIVERE:

$$\delta Q = n\, C_p\, dT$$

$$C_p = R + C_v = R + \frac{3}{2}R = \frac{5}{2}R$$ [L'ELIO E' UN GAS MONOATOMICO]

- RICAVIAMO IL NUMERO DI MOLI DEL GAS

$$n = \frac{P_A \cdot V_A}{R \cdot T_A} = \frac{2 \cdot 1.01 \cdot 10^5 \cdot 2 \cdot 10^{-3}}{8.314 \cdot 303.1} = 0.1603 \text{ moli}$$

$$\Delta S = \int_{T_A}^{T_B} \frac{\delta Q}{T} = \int_{T_A}^{T_B} \frac{n C_p \, dT}{T} = n C_p \int_{T_A}^{T_B} \frac{dT}{T} = n C_p \ln \frac{T_B}{T_A}$$

$$\underline{\Delta S} = S(B) - S(A) = 0.1603 \cdot \frac{5}{2} \cdot 8.314 \cdot \ln \frac{606.2}{303.1} = \underline{2.31 \ J/K}$$

- TRASFORMAZIONE BC : ISOCORA

$$L = 0 \qquad (\text{non varia il volume})$$

NELL'ISOCORA IL CALORE VIENE FORNITO A VOLUME COSTANTE

$$\Rightarrow \qquad \delta Q = n C_v \, dT$$

- CALCOLIAMO LA TEMPERATURA DEL PUNTO C

$$\frac{P}{T} = \text{costante} \quad \Rightarrow \quad T_C = \frac{P_C}{P_B} \cdot T_B = \frac{2 P_B}{P_B} \cdot T_B = 2 \cdot 606.2 = 1212.4 \text{ K}$$

$$\Delta S = n C_v \ln \frac{T_C}{T_B} = 0.1603 \cdot \frac{3}{2} \cdot 8.314 \cdot \ln 2 = +1.39 \ J/K$$

- TRASFORMAZIONE CA : IRREVERSIBILE

PER CALCOLARE IL LAVORO AVREMMO DOVUTO CONOSCERE IL CALORE SCAMBIATO IN QUESTA TRASFORMAZIONE E POI FARE:

$$L = Q - \Delta U$$

- L'ENTROPIA E' UNA FUNZIONE DI STATO, QUINDI IN UN CICLO SI DEVE AVERE $\Delta S = 0$, ALLORA:

$$0 = \Delta S_{AB} + \Delta S_{BC} + \Delta S_{CA} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Delta S_{CA} = -(\Delta S_{AB} + \Delta S_{BC}) = -(2.31 + 1.39) = -3.70 \ J/K$$

PROBLEMA

UN SISTEMA TERMODINAMICO ESEGUE UNA TRASFORMAZIONE FRA DUE STATI DI EQUILIBRIO, AL TERMINE DELLA QUALE LA SUA ENERGIA INTERNA E' AUMENTATA DELLA QUANTITA' ΔU MENTRE LA SUA ENTROPIA E' AUMENTATA DELLA QUANITA' ΔS. DURANTE LA TRASFORMAZIONE IL SISTEMA PUO' SCAMBIARE CALORE CON UNA SOLA SORGENTE A TEMPERATURA T. CALCOLARE IL LAVORO MASSIMO CHE IL SISTEMA PUO' COMPIERE.

DATI : $\Delta U = 800$ cal , $\Delta S = 4$ cal/K ; $T = 300$ K

o——o——o——o

- IL LAVORO COMPIUTO DAL SISTEMA E' PARI A:

$$L = Q - \Delta U$$

- A PARITA' DI ΔU PER MASSIMIZZARE L OCCORRE MASSIMIZZARE IL CALORE SCAMBIATO Q

- RICORDIAMO LA DISUGUAGLIANZA DI CLAUSIUS:

$$\Delta S \geq \int_i^f \frac{dQ}{T} \quad \text{[l'uguagliauza vale per trasf. reversibili]}$$

- DATO CHE IL SISTEMA SCAMBIA CALORE CON UNA SOLA SORGENTE SI HA

$$\Delta S \geq \frac{Q}{T} \implies \Delta S \cdot T \geq Q$$

- IL MASSIMO CALORE SCAMBIATO VALE:

$$Q_{MAX} = T \cdot \Delta S \quad \text{[trasformazione reversibile]}$$

- $$L_{MAX} = Q_{MAX} - \Delta U = T \cdot \Delta S - \Delta U =$$
$$= 300 \cdot 4 - 800 = \underline{400 \text{ calorie}}$$

PROVA SCRITTA - 9 LUGLIO 1999

UN CILINDRO, LE CUI PARETI NON CONSENTONO SCAMBI DI CALORE CON L'ESTERNO, E' CHIUSO DA ENTRAMBI I LATI. IL CILINDRO E' DIVISO IN DUE VOLUMI DA UN DISCO INTERNO, ANCHE ESSO TERMICAMENTE ISOLANTE, LIBERO DI MUOVERSI SENZA ATTRITO. INIZIALMENTE CIASCUNO DEI VOLUMI E' RIEMPITO DA UN GAS, ASSIMILABILE AD UN GAS PERFETTO, DI VOLUME 10 ℓ, PRESSIONE 1 atm, TEMPERATURA 300 K. UN RISCALDATORE E' USATO NEL VOLUME DI DESTRA DEL CILINDRO, PER RISCALDARE LENTAMENTE IL GAS, FINO A RAGGIUNGERE UNA PRESSIONE FINALE AI 64/27 DI QUELLA INIZIALE. NOTO IL RAPPORTO TRA IL CALORE SPECIFICO A PRESSIONE E VOLUME COSTANTE DEL GAS ($\gamma = 1.5$), CALCOLARE:

a) LA VARIAZIONE DI ENTROPIA DEL GAS NEL LATO SINISTRO

b) IL VOLUME E LA TEMPERATURA FINALI NEL LATO SINISTRO

c) LA TEMPERATURA FINALE NEL LATO DESTRO

1) IL CALORE VIENE FORNITO LENTAMENTE, QUINDI LA TRASFORMAZIONE E' REVERSIBILE

2) NON C'E' PASSAGGIO DI CALORE DA DESTRA A SINISTRA, QUINDI IL GAS DI SINISTRA FA UNA TRASFORMAZIONE ADIABATICA REVERSIBILE

3) LA TEMPERATURA NEI DUE LATI PUO' ESSERE DIVERSA

4) IN CONDIZIONE DI EQUILIBRIO MECCANICO, LA PRESSIONE NEI DUE LATI DEVE ESSERE LA STESSA $\left[P_1 = P_2 = \frac{64}{27} P_0\right]$

5) $V_1 + V_2 = 2 V_0$

$$\Delta S = S_{FIN} - S_{INIZ} = \int_{i\ rev.}^{f} \frac{\delta Q}{T}$$

a) DATO CHE IL GAS NEL LATO SINISTRO PASSA DALLO STATO INIZIALE A QUELLO FINALE ATTRAVERSO UN'ADIABATICA REVERSIBILE, CIOE' SENZA SCAMBIO DI CALORE, SI HA:

$$\delta Q = 0 \quad \Rightarrow \quad \Delta S = 0$$

b) IN UNA TRASFORMAZIONE ADIABATICA REVERSIBILE DI UN GAS PERFETTO, VALE LA RELAZIONE SEGUENTE:

$$PV^{\gamma} = \text{COSTANTE} \qquad \left[\text{dove } \gamma = \frac{c_p}{c_v} \right]$$

[N.B. PER UN ISOTERMA SI HA: $PV = \text{COSTANTE}$]

QUINDI PER IL GAS SUL LATO SINISTRO SI HA:

$$P_1 V_1^{\gamma} = P_0 V_0^{\gamma}$$

MA DATO CHE $P_1 = \frac{64}{27} P_0 = \left(\frac{4}{3}\right)^3 P_0$ SI HA:

$$\frac{64}{27} \cancel{P_0} V_1^{\gamma} = \cancel{P_0} V_0^{\gamma} \Rightarrow V_1^{\gamma} = \frac{27}{64} V_0^{\gamma} \qquad \left[\gamma = 1.5 = \frac{3}{2}\right]$$

$$V_1^{3/2} = \left(\frac{3}{4}\right)^3 V_0^{3/2} \Rightarrow V_1^{1/2} = \frac{3}{4} V_0^{1/2}$$

$$\boxed{V_1 = \left(\frac{3}{4}\right)^2 V_0 = \frac{9}{16} V_0}$$

$$V_1 = \frac{9}{16} \cdot V_0 = \frac{9}{16} \cdot 10 = 5.625 \ \ell$$

- PER UNA TRASFORMAZIONE ADIABATICA REVERSIBILE DI UN GAS PERFETTO E' ANCHE VALIDA LA RELAZIONE:

$$TV^{\gamma-1} = \text{costante} \qquad \left[\gamma = \frac{c_p}{c_v}\right]$$

QUINDI:

$$V_1^{\alpha-1}\,T_1 = V_0^{\alpha-1}\,T_0$$

$$V_1^{\frac{3}{2}-1}\,T_1 = V_0^{\frac{3}{2}-1}\,T_0 \quad \Rightarrow \quad V_1^{1/2}\,T_1 = V_0^{1/2}\,T_0$$

DATO CHE $V_1 = \left(\frac{3}{4}\right)^2 V_0$ SI HA:

$$\frac{3}{4}V_0^{1/2}\,T_1 = V_0^{1/2}\,T_0$$

$$\Rightarrow \boxed{T_1 = \frac{4}{3}T_0 = \frac{4}{3}\cdot 300 = 400\ \text{K}}$$

c) PER RICAVARE LA TEMPERATURA DEL GAS NEL LATO DESTRO RICORRIAMO ALL' EQUAZIONE DEL GAS PERFETTO

$$PV = nRT$$

$$\Rightarrow T_2 = \frac{P_2 \cdot V_2}{nR} \quad ; \quad P_2 = \frac{64}{27}P_0 \quad ; \quad V_2 = 2V_0 - V_1 = \frac{23}{16}V_0 \quad ; \quad n = \frac{P_0V_0}{RT_0}$$

$$T_2 = \frac{P_2V_2}{R}\cdot\frac{RT_0}{P_0V_0} = \frac{P_2V_2}{P_0V_0}\cdot T_0 = \frac{\frac{64}{27}\cdot P_0\cdot\frac{23}{16}V_0}{P_0V_0}\cdot T_0 =$$

$$= \frac{64}{27}\cdot\frac{23}{16}\cdot T_0 = 3.41\,T_0 = 3.41\cdot 300 = \underline{1023\ \text{K}}$$

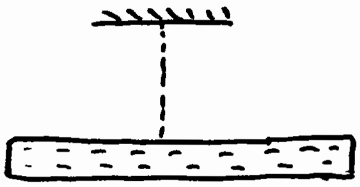
Elettrostatica

- Legge di Coulomb
- Campo elettrico
- Teorema di Gauss
- Potenziale elettrico
- Conduttori
- Capacità e condensatori
- Energia elettrostatica
- Dielettrici

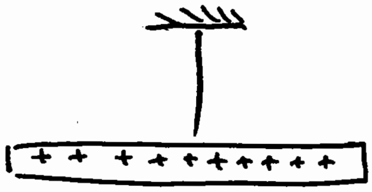
ELETTROSTATICA

- TALETE DI MILETO SCOPRÌ CHE QUANDO UN PEZZO DI AMBRA VENIVA STROFINATO ERA IN GRADO DI ATTRARRE PEZZETTI DI CARTA

AMBRA = ELEKTRON



BACCHETTA DI PLASTICA STROFINATA CON UNA PELLE



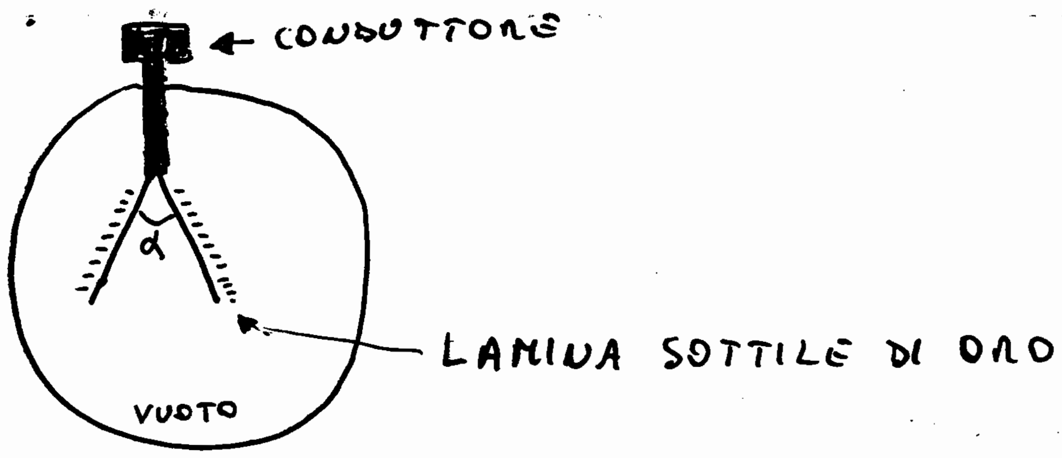
BACCHETTA DI VETRO STROFINATA CON DELLA SETA

- DUE BACCHETTE DI VETRO SI RESPINGONO
- DUE BACCHETTE DI PLASTICA SI RESPINGONO
- UNA BACCHETTA DI VETRO ED UNA DI PLASTICA SI ATTRAGGONO

- SE UNA BACCHETTA "SCARICA" SI METTE A CONTATTO CON UNA "CARICA", SI CARICA ANCH'ESSA.

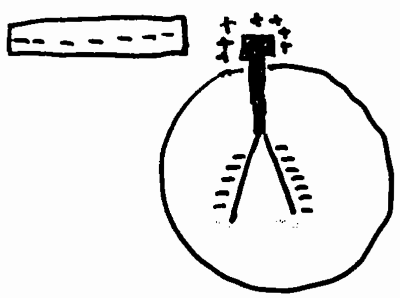
- B. FRANKLIN (~1750) IPOTIZZÒ CHE VI FOSSE UN FLUIDO ELETTRICO CHE SI TRASMETTEVA DA UN CORPO AD UN ALTRO E CHE SI CONSERVAVA.

ELETTROSCOPIO

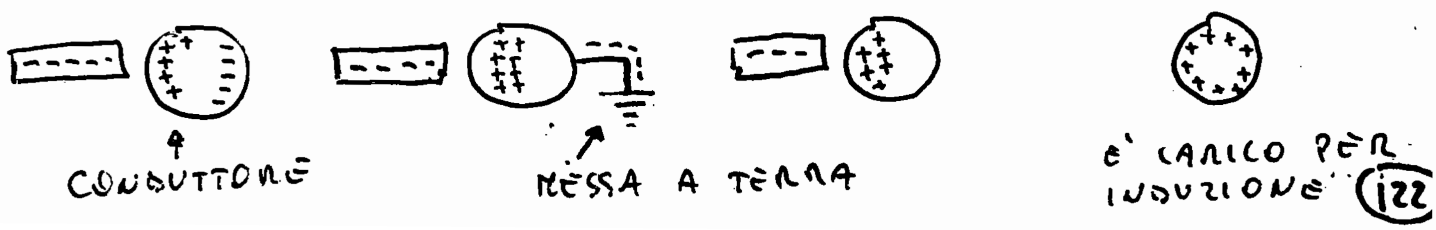


- ERA POSSIBILE MISURARE LA QUANTITA' DI CARICA POSSEDUTA DA UN OGGETTO CON UNO STRUMENTO CHIAMATO ELETTROSCOPIO.

- METTENDO A CONTATTO UN CORPO CARICO CON L'ELETTROSCOPIO, PARTE DELLA CARICA SI TRASFERIVA SULLE LAMINE D'ORO CHE SI RESPINGEVANO.
  L'ANGOLO α E' PROPORZIONALE ALLA CARICA Q.



- INDUZIONE ELETTROSTATICA
  SE SI AVVICINA UN CORPO CARICO ALL'ELETTROSCOPIO SI OSSERVA CHE LE LAMINE REGISTRANO UNA PRESENZA DI CARICA



LEGGE DI COULOMB

- LA FORZA CHE SI ESERCITA TRA DUE CARICHE PUNTIFORMI IN QUIETE VALE:

$$\vec{F} = K \frac{q_1 \cdot q_2}{r^2} \hat{r}$$

- q = VALORE DELLA CARICA
- r = DISTANZA TRA LE DUE CARICHE
- K = COSTANTE (DI COULOMB) CHE DIPENDE DAL SISTEMA DI UNITÀ DI MISURA ADOTTATO E DAL MEZZO IN CUI SONO IMMERSE LE CARICHE

- NEL VUOTO, NEL S.I., SI HA:

$$K = 8.9876 \cdot 10^9 \, N \frac{m^2}{C^2} \simeq 9.0 \cdot 10^9 \frac{N\,m^2}{C^2}$$

- PER SEMPLIFICARE LE LEGGI DELL'ELETTROMAGNETISMO SI PONE:

$$K = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$$

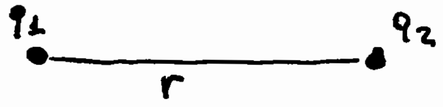
- $\varepsilon_0 = 8.8542 \cdot 10^{-12} \frac{C^2}{N \cdot m^2}$ [costante dielettrica del vuoto (permittività)]

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_1 \cdot q_2}{r^2} \hat{r}$$

- LA FORZA È DIRETTA LUNGO LA RETTA CONGIUNGENTE LE DUE CARICHE
- PUÒ ESSERE ATTRATTIVA O REPULSIVA

UNITÀ DI MISURA DELLA CARICA

IL COULOMB



$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 \cdot q_2}{r^2}\hat{r}$$

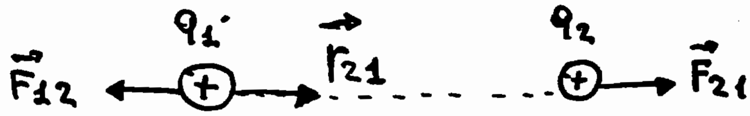
- NEL S.I. LA QUANTITÀ DI CARICA SI MISURA IN COULOMB C
- DUE CARICHE DI 1C POSTE ALLA DISTANZA DI 1 m ESERCITANO UNA SULL'ALTRA UNA FORZA PARI A $9 \cdot 10^9$ N
- IL COULOMB È UNA QUANTITÀ DI CARICA MOLTO GRANDE
- L'UNITÀ DI MISURA FONDAMENTALE NEL S.I. NON È IL COULOMB MA L'AMPERE A, CHE È L'UNITÀ DI MISURA DELLA CORRENTE ELETTRICA
- CARICA DI UN ELETTRONE

$$Q_e = -1.60 \cdot 10^{-19}\ C$$

$$\Rightarrow \quad 1\ C = \frac{1}{|Q_e|} = 6.25 \cdot 10^{18} \text{ elettroni}$$

N.B. IN UN cm^3 DI RAME CI SONO CIRCA 10^{23} ELETTRONI

FORZA DI COULOMB



REPULSIVA

$$\vec{F}_{21} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_1 \cdot q_2}{r_{21}^2} \hat{r}_{21}$$

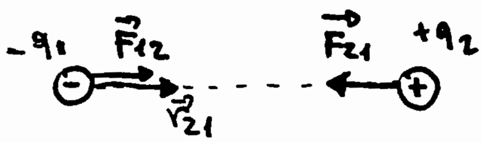
forza sulla carica 2 dovuta alla carica 1

- IL RAGGIO VETTORE $\vec{r}$ È DIRETTO DALLA CARICA CHE ESERCITA LA FORZA ALLA CARICA CHE LA SUBISCE
- VERSORE $\hat{r} = \dfrac{\vec{r}}{|\vec{r}|}$
- PER IL PRINCIPIO DI AZIONE E REAZIONE SI HA:

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$$

REPULSIVA

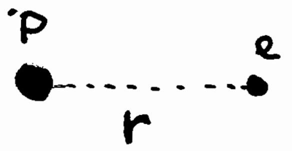
$$\vec{F}_{21} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_1 \cdot q_2}{r_{21}^2} \hat{r}_{21}$$



ATTRATTIVA

$$\vec{F}_{21} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_1 \cdot q_2}{r_{21}^2} \hat{r}_{21}$$

ATOMO DI IDROGENO



- LA DISTANZA TRA UN PROTONE ED UN ELETTRONE IN UN ATOMO DI IDROGENO E', IN MEDIA, PARI A:

$$r \simeq 5.3 \cdot 10^{-11} m \simeq 0.5 \text{ Å}$$

- FORZA ELETTROSTATICA (attrattiva)

$$|F_e| = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_p \cdot q_e}{r^2} = \left(9 \cdot 10^9 \frac{N \cdot m^2}{C^2}\right) \frac{(1.6 \cdot 10^{-19} C)^2}{(5.3 \cdot 10^{-11} m)^2} = 8.2 \cdot 10^{-8} N$$

- VALUTIAMO LA FORZA DI ATTRAZIONE GRAVITAZIONALE

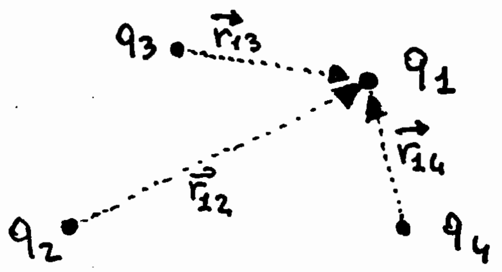
$$|F_g| = G \frac{m_e \cdot m_p}{r^2} = \left(6.67 \cdot 10^{-11} \frac{N \cdot m^2}{Kg^2}\right) \frac{(9.11 \cdot 10^{-31} Kg) \cdot (1.67 \cdot 10^{-27} Kg)}{(5.3 \cdot 10^{-11} m)^2} = 3.6 \cdot 10^{-47} N$$

- $$\frac{|F_e|}{|F_g|} = \frac{8.2 \cdot 10^{-8}}{3.6 \cdot 10^{-47}} \simeq 2 \cdot 10^{39}$$

$\Rightarrow$ LA FORZA GRAVITAZIONALE TRA PARTICELLE ATOMICHE CARICHE E' COMPLETAMENTE TRASCURABILE RISPETTO ALLA FORZA ELETTROSTATICA.

PRINCIPIO DI SOVRAPPOSIZIONE

- SUPPONIAMO DI AVERE 4 CARICHE, q_1, q_2, q_3, q_4
  VALUTIAMO LA FORZA CHE LE TRE CARICHE q_2, q_3, q_4
  ESERCITANO SULLA CARICA q_1



$\vec{F}_{12} = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0} \dfrac{q_1 \cdot q_2}{r_{12}^2} \hat{r}_{12}$ forza esercitata sulla carica 1 dalla carica 2

$\vec{F}_{13} = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0} \dfrac{q_1 \cdot q_3}{r_{13}^2} \hat{r}_{13}$ forza esercitata sulla carica 1 dalla carica 3

$\vec{F}_{14} = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0} \dfrac{q_1 \cdot q_4}{r_{14}^2} \hat{r}_{14}$ forza esercitata sulla carica 1 dalla carica 4

- CIASCUNA CARICA SEPARATAMENTE ESERCITA SULLA CARICA 1 LA FORZA $\vec{F}_{1i}$ $(i = 2, 3, 4)$

PRINCIPIO DI SOVRAPPOSIZIONE

- LA FORZÁ CHE LE TRE CARICHE ESERCITANO CONTEMPORANEAMENTE SULLA CARICA 1 È DATA DALLA SOMMA VETTORIALE:

$$\vec{F}_1 = \vec{F}_{12} + \vec{F}_{13} + \vec{F}_{14} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r_{12}^2}\hat{r}_{12} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_3}{r_{13}^2}\hat{r}_{13} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 \cdot q_4}{r_{14}^2}\hat{r}_{14} =$$

$$= q_1 \left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_2}{r_{12}^2}\hat{r}_{12} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_3}{r_{13}^2}\hat{r}_{13} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_4}{r_{14}^2}\hat{r}_{14}\right) =$$

$$= q_1 \sum_{2}^{4}{}_i \frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\hat{r}_{1i}}{r_{1i}^2}$$

- LA PROPRIETÀ DI POTER SOMMARE GLI EFFETTI DELLE SINGOLE CAUSE PER TROVARE L'EFFETTO GLOBALE SI CHIAMA PRINCIPIO DI SOVRAPPOSIZIONE DEGLI EFFETTI.

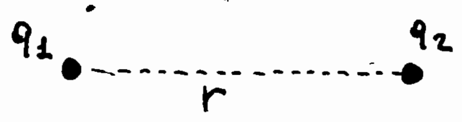
N.B. SE LASCIAMO INVARIATE LE POSIZIONI DELLE CARICHE E CAMBIAMO SOLO IL VALORE DELLA CARICA q_1

$$q_1 \longrightarrow q_1'$$

AVREMO CHE

$$\vec{F}_1' = \frac{q_1'}{q_1} \cdot \vec{F}_1$$

CAMPO ELETTRICO



$$\vec{F}_{21} = q_2 \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_1}{r_{21}^2} \hat{r}_{21}$$

- PROBLEMA CONCETTUALE:
  SULLA CARICA q_2 AGISCE UNA FORZA DOVUTA ALLA PRESENZA DELLA CARICA q_1

- LE DUE CARICHE NON SONO A CONTATTO MA SI TROVANO AD UNA DISTANZA r

- SE LA DISTANZA r CAMBIA ALLORA VARIA ANCHE LA FORZA "SENTITA" DA q_2.

- COME È POSSIBILE CHE VI SIA UNA FORZA SENZA "CONTATTO"?

- FARADAY ($\sim$ 1830) IPOTIZZÒ IL CONCETTO DI CAMPO ELETTRICO

  LA CARICA q_1 MODIFICA LE PROPRIETÀ DELLO SPAZIO INTORNO AD ESSA CREANDO UN CAMPO DI FORZE.
  LA CARICA q_2 INTERAGISCE CON IL CAMPO PRESENTE NEL PUNTO IN CUI ESSA È SITUATA.

N.B. SE LA CARICA q_1 SI SPOSTA, LE PROPRIETÀ DEL CAMPO NEL PUNTO IN CUI SI TROVA q_2 NON CAMBIANO IMME= DIATAMENTE, MA OCCORRE UN CERTO TEMPO $t \simeq \frac{r}{c}$
PER QUESTO MOTIVO STUDIAMO SOLO IL CASO IN CUI TUTTE LE CARICHE SONO FERME (ELETTROSTATICA)

DETERMINAZIONE DEL CAMPO ELETTRICO

1) UNA CARICA q POSTA NELLO SPAZIO PRODUCE UN CAMPO ELETTRICO

2) UN'ALTRA CARICA q_0 INTERAGISCE CON IL CAMPO ELETTRICO PRODOTTO DALLA PRIMA E SUBISCE QUINDI UNA FORZA

3) MISURANDO QUESTA FORZA SI RISALE AL CAMPO.
LA FORZA SI PUO' MISURARE IN MANIERA STATICA (DINAMOMETRO) OPPURE DINAMICA (ACCELERAZIONE, $F = ma$)

- SPERIMENTALMENTE SI TROVA CHE LA FORZA MISURATA E' PROPORZIONALE ALLA CARICA q_0 USATA PER MISURARE IL CAMPO

$$F \propto q_0 \quad \Rightarrow \quad \vec{F} = q_0 \vec{E}$$

- QUINDI OPERATIVAMENTE SI HA:

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_0}$$

- SPOSTANDO LA CARICA q_0 SI DETERMINA $\vec{E}$ IN TUTTI I PUNTI DELLO SPAZIO.

- N.B. PER EVITARE CHE LA CARICA DI PROVA DISTURBI LA DISTRIBUZIONE DELLE ALTRE CARICHE CHE GENERANO IL CAMPO, SI SCEGLIE UNA CARICA MOLTO PICCOLA

$$\vec{E} = \lim_{q_0 \to 0} \frac{\vec{F}}{q_0}$$

- SE SI HANNO PIU' CARICHE IL CAMPO ELETTRICO RISULTANTE E' LA SOMMA DEI SINGOLI CAMPI ELETTRICI (PRINCIPIO DI SOVRAPPOSIZIONE)

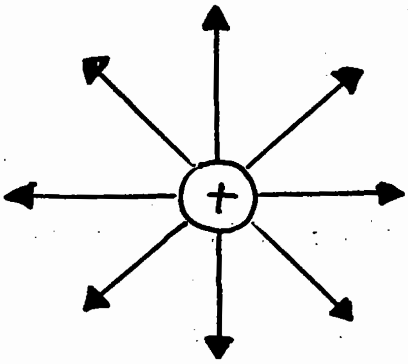
LINEE DI FORZA DI UN CAMPO ELETTRIC

- LE LINEE DI FORZA DANNO LA DIREZIONE E IL VERSO DEL CAMPO. IN OGNI PUNTO IL VETTORE $\vec{E}$ E' TANGENTE ALLE LINEE DEL CAMPO.

CARICA PUNTIFORME $+q$

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\hat{r}$$

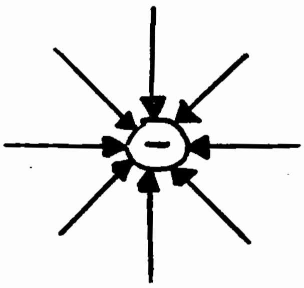
$$\vec{F} = q_0 \cdot \vec{E}$$



LE LINEE DI FORZA DEL CAMPO ELETTRICO SONO DELLE RETTE USCENTI DALLA CARICA

CARICA PUNTIFORME $-q$

$$\vec{E} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\hat{r}$$



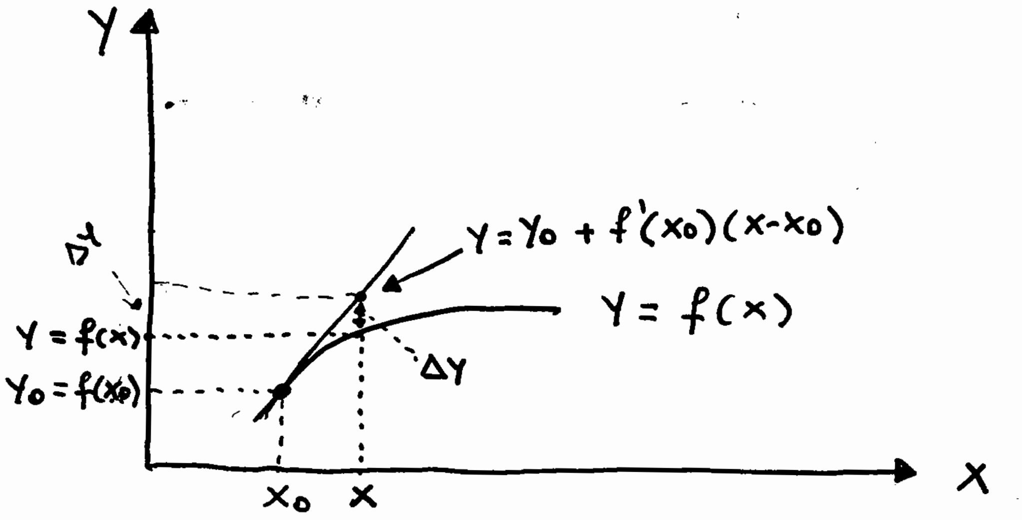
LE LINEE DI FORZA DEL CAMPO ELETTRICO SONO DELLE RETTE ENTRANTI NELLA CARICA

CRITERIO DI FARADAY

DOVE L'INTENSITA' DEL CAMPO E' PIU' FORTE, LE LINEE DI FORZA SONO PIU' DENSE

N.B. LE LINEE DEL CAMPO NON POSSONO MAI INCROCIARSI NEI PUNTI DELLO SPAZIO DOVE NON CI SONO CARICHE

APPROSSIMAZIONE LINEARE



- ABBIAMO UNA RELAZIONE $Y = f(x)$
- CALCOLIAMO LA TANGENTE ALLA CURVA NEL PUNTO (x_0, Y_0)

$$m = f'(x) = \frac{d f(x)}{d x} \longrightarrow f'(x_0)$$

- L'EQUAZIONE DELLA RETTA CHE PASSA PER (x_0, Y_0) È:

$$Y = Y_0 + f'(x_0)(x - x_0)$$

- CALCOLIAMO LA DIFFERENZA TRA LA FUNZIONE E LA RETTA

$$\Delta Y = Y - f(x) = Y_0 + f'(x_0)(x-x_0) - f(x)$$

$$\lim_{x \to x_0} \Delta Y = \lim_{x \to x_0} \left[Y_0 - f(x) + f'(x_0)(x-x_0) \right] = 0$$

- QUINDI SE $x - x_0$ È PICCOLO, SI PUÒ SOSTITUIRE AL VALORE DELLA FUNZIONE $f(x)$ IL VALORE CALCOLATO SULLA ESTRAPOLAZIONE LINEARE. [ESEMPIO: PICCOLE OSCILLAZIONI NEL PENDOLO

N.B. SPESSO $x_0 = 0$

N.B. PER UN'APPROSSIMAZIONE MIGLIORE SI POSSONO USARE DERIVATE SUCCESSIVE (SVILUPPO IN SERIE)

DIPOLO ELETTRICO

- UN DIPOLO ELETTRICO E' UN SISTEMA COMPOSTO DA DUE CARICHE AVENTI LA STESSA INTENSITA' MA SEGNO OPPOSTO E DISTANTI d

- PER IDENTIFICARE LE PROPRIETA' DI QUESTO SISTEMA IN MANIERA GLOBALE, SI PUO' COSTRUIRE UN VETTORE CHIAMATO MOMENTO DI DIPOLO ELETTRICO $\vec{P}$

- INTENSITA': $|\vec{P}| = q \cdot d$ [carica × distanza]

- DIREZIONE : RETTA CONGIUNGENTE LE DUE CARICHE

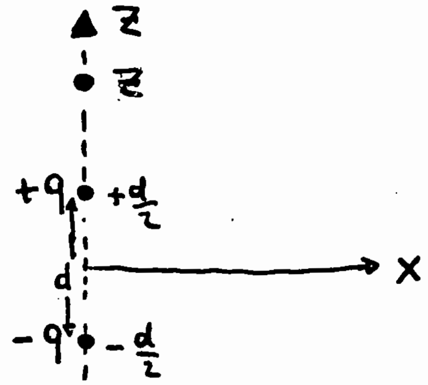
- VERSO : DALLA CARICA NEGATIVA ALLA POSITIVA

- IL DIPOLO E' GLOBALMENTE NEUTRO $(+q - q = 0)$ MA PER IL FATTO CHE LE DUE CARICHE SI TROVANO IN PUNTI DIVERSI SI GENERA NELLO SPAZIO CIRCOSTANTE UN CAMPO ELETTRICO.

N.B. QUESTO E' IL CASO DI ALCUNE MOLECOLE

DIPOLO ELETTRICO

- CALCOLIAMO IL CAMPO $\vec{E}$ IN UN PUNTO SULL'ASSE DEL DIPOLO.



$$\vec{E} = \vec{E}_{(+)} + \vec{E}_{(-)}$$

[Principio di sovrapposizione]

$$|\vec{E}| = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r_+^2} - \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r_-^2} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\left(z-\frac{d}{2}\right)^2} - \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\left(z+\frac{d}{2}\right)^2} =$$

$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 z^2}\left[\frac{1}{\left(1-\frac{d}{2z}\right)^2} - \frac{1}{\left(1+\frac{d}{2z}\right)^2}\right]$$

- SUPPONIAMO ORA DI VOLER CONOSCERE IL CAMPO AD UNA DISTANZA MOLTO MAGGIORE DELLE DIMENSIONI DEL DIPOLO $z \gg d \Rightarrow \frac{d}{2z} \ll 1$

- $f(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$; $f'(x) = \frac{2}{(1-x)^3}$; $f'(x=0) = 2$

- APPROSSIMAZIONE LINEARE DI $f(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$:

$$y = f(x=0) + f'(x=0)\cdot(x-0) = 1 + 2x$$

- DATO CHE $x = \frac{d}{2z}$ SI HA:

$$E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 z^2}\left[\left(1+\frac{d}{z}\right) - \left(1-\frac{d}{z}\right)\right] = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 z^2}\cdot\frac{2d}{z} = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{qd}{z^3}$$

- RICORDANDO CHE $|\vec{p}| = q\cdot d$ ABBIAMO:

$$\boxed{E_z = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{p}{z^3}}$$

ESERCIZI CONSIGLIATI

Campo elettrico e forza di Coulomb

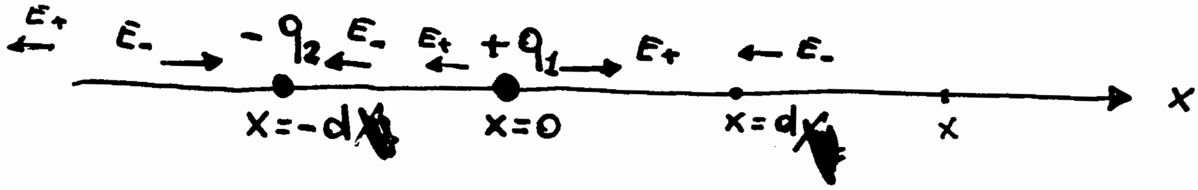
- Serway (3° Edizione) – Cap. 19
  - 1 – 3 – 5 – 7 – 9 – 11 – 13 – 17 – 23 – 25 – 27 – 51 – 53
- Halliday (5° Edizione) – Cap. 22
  - 1E – 3E – 5P – 9P – 11P – 13P – 19E – 21E
- Halliday (5° Edizione) – Cap. 23
  - 5E – 9P – 11P – 13P – 15E – 21P – 29E – 33E – 35E – 37P – 39P

ESERCIZIO 1

Esercizio 1

Due cariche puntiformi di intensità $q_1 = 2.0 \cdot 10^{-8}$ C e $q_2 = -4 \cdot q_1$ sono distanti tra loro d=50 cm. Trovare il punto sull'asse che le congiunge in cui il campo è nullo.

(Risultato: a) In un punto distante d dalla carica positiva e 2d dalla negativa)



- CAMPO E_+ GENERATO DALLA CARICA POSITIVA

$$E_+ = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1}{x^2} \qquad [\text{la carica sta in } x=0]$$

- CAMPO E_- GENERATO DALLA CARICA NEGATIVA

$$E_- = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_2}{(x+d)^2} \qquad [\text{la carica sta in } x=-d]$$

- SOMMIAMO I DUE CAMPI PER TROVARE IL PUNTO IN CUI:

$$\vec{E} = \vec{E}_+ + \vec{E}_- = 0$$

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1}{x^2} - \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{4q_1}{(x+d)^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{4x^2} = \frac{1}{(x+d)^2} \quad \Rightarrow$$

$$4x^2 = (x+d)^2 \quad \Rightarrow \quad 2x = x+d \quad \Rightarrow \quad \boxed{x = d}$$

N.B. IL RISULTATO E' INDIPENDENTE DAL VALORE DELLA CARICA q_1

$$\cancel{\left.\begin{matrix} -2x = x+d \\ -3x = d \end{matrix}\right\}} \Rightarrow x = -d/3$$

ESERCIZIO 2

Esercizio 2

Un elettrone viene accelerato verso est a $1.80 \cdot 10^9\ m/s^2$ da un campo elettrico. Si determino l'intensità e la direzione del campo elettrico.

(Risultato: a) E=$-10.2 \cdot 10^{-3}\ N/C$ (verso ovest))

- SULL'ELETTRONE AGISCE UNA FORZA CHE PROVOCA UN'ACCELERAZIONE

$$\vec{F} = m\vec{a}$$

- LA FORZA AGENTE SULL'ELETTRONE È LA FORZA ELETTROSTATICA

$$\vec{F} = -q_e \cdot \vec{E}$$

- QUINDI :

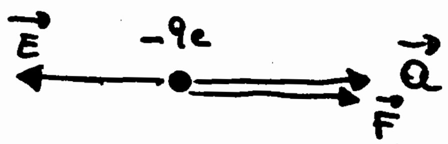
$$-q_e \cdot \vec{E} = m\vec{a}$$

$$\Rightarrow \vec{E} = -\frac{m}{q_e} \cdot \vec{a}$$

$$\vec{E} = -\frac{(9.1 \cdot 10^{-31}\ kg)}{(1.6 \cdot 10^{-19}\ C)} \cdot 1.8 \cdot 10^{9}\ \frac{m}{s^2} = \frac{9.1}{1.6} \cdot 1.8 \cdot 10^{(-31+9+19)} =$$

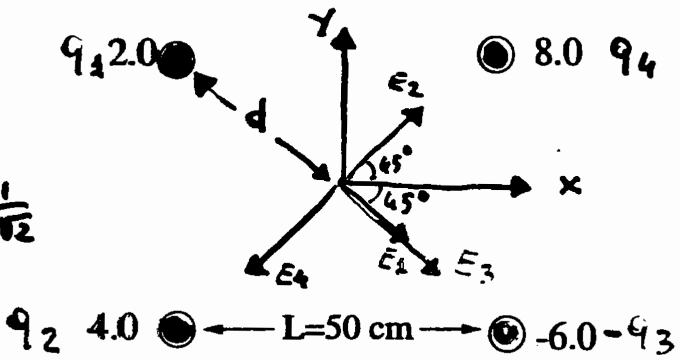
$$= -10.2 \cdot 10^{-3}\ \frac{N}{C}$$

- IL CAMPO $\vec{E}$ È DIRETTO IN VERSO OPPOSTO ALL'ACCELERAZIO



ESONERO 3 - ESERCIZIO 4

Esonero 3 - Esercizio 4 (6 punti)
Quattro cariche di 2.0 μC, 4 μC, -6.0 μC e 8.0 μC sono nei vertici di un quadrato il cui lato è lungo 50.0 cm. Si trovi il campo elettrico (modulo, direzione e verso) nel centro del quadrato.
(Risultato: $6.43 \cdot 10^5$ N/C a 26.5° rispetto alla diagonale dalla carica di 2.0 μC alla carica di -6.0 μC)



- $\cos 45° = \sin 45° = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$d = \frac{L}{2}\sqrt{2} = \frac{L}{\sqrt{2}}$

$\frac{1}{d^2} = \frac{2}{L^2} = \frac{2}{0.5^2} = 8\,m$

- $\vec{E_1} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1}{d^2}\left[\cos 45°\,\hat{i} - \sin 45°\,\hat{j}\right]$
- $\vec{E_2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_2}{d^2}\left[\cos 45°\,\hat{i} + \sin 45°\,\hat{j}\right]$
- $\vec{E_3} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_3}{d^2}\left[\cos 45°\,\hat{i} - \sin 45°\,\hat{j}\right]$
- $\vec{E_4} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_4}{d^2}\left[-\cos 45°\,\hat{i} - \sin 45\,\hat{j}\right]$

- SOMMIAMO LE COMPONENTI LUNGO L'ASSE X

$$E_x = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{d^2}\frac{1}{\sqrt{2}}\left[q_1+q_2+q_3-q_4\right] = 9\cdot10^9\cdot\frac{8}{\sqrt{2}}\left[2+4+6-8\right]\cdot10^{-6} = \underline{203\cdot10^3\ \frac{V}{m}}$$

- SOMMIAMO LE COMPONENTI LUNGO L'ASSE Y

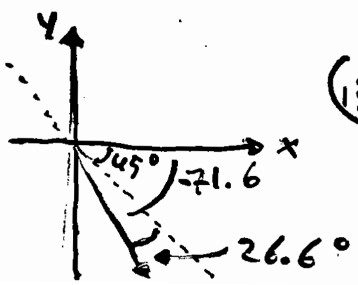
$$E_Y = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{d^2}\frac{1}{\sqrt{2}}\left[-q_1+q_2-q_3-q_4\right] = 9\cdot10^9\cdot\frac{8}{\sqrt{2}}\left[-2+4-6-8\right]\cdot10^{-6} = -611\cdot10^3\ V/m$$

- MODULO DI $\vec{E}$

$$|\vec{E}| = \sqrt{E_x^2+E_Y^2} = \sqrt{203^2\cdot10^6+611^2\cdot10^6} = 6.43\cdot10^5\ V/m$$

- DIREZIONE DI $\vec{E}$

$$\varphi = \arctan\frac{E_Y}{E_x} = \arctan\frac{-611\cdot10^3}{203\cdot10^3} = -71.6°$$



ESERCIZIO 3

Esercizio 3

Un ammasso di nuvole cariche produce un campo elettrico nell'aria vicino alla superficie terrestre. Una particella con carica $-2.0 \cdot 10^{-9}$ C subisce una forza elettrostatica tendente verso il basso di $3.0 \cdot 10^{-6}$ N quando viene posta in questo campo.

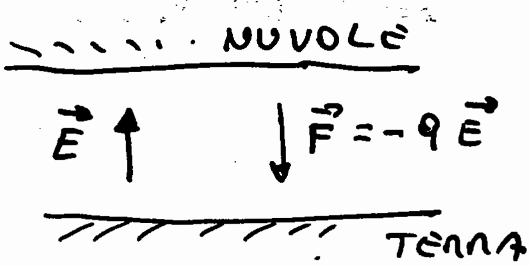
a) Qual'è l'intensità del campo elettrico?

b) Quali sono l'intensità e la direzione della forza elettrostatica esercitata su un protone posto in questo campo?

c) Qual'è la forza gravitazionale esercitata sul protone?

d) Qual'è il rapporto tra la forza elettrostatica e la forza gravitazionale in questo caso?

(Risultato: a) E=$1.5 \cdot 10^3$ N/C, b) F=$2.4 \cdot 10^{-16}$ N (verso l'alto), c) F=$1.6 \cdot 10^{-26}$ N, d) $1.5 \cdot 10^{10}$)



a) $$|\vec{E}| = \frac{|\vec{F}|}{|q|} = \frac{3.0 \cdot 10^{-6}\,N}{2.0 \cdot 10^{-9}} = 1.5 \cdot 10^{3}\,\frac{N}{C}$$

b) IL CAMPO $\vec{E}$ È DIRETTO VERSO L'ALTO

IL PROTONE HA CARICA POSITIVA, QUINDI LA FORZA AGENTE SU DI ESSO È DIRETTA VERSO L'ALTO

$$|\vec{F}| = q \cdot |\vec{E}| = (1.6 \cdot 10^{-19}\,C)\,(1.5 \cdot 10^{3}\,\frac{N}{C}) = 2.4 \cdot 10^{-16}\,N$$

c) LA FORZA GRAVITAZIONALE AGENTE SUL PROTONE VALE:

$$F_g = m_p \cdot g = (1.67 \cdot 10^{-27}\,kg) \cdot (9.8\,\frac{m}{s^2}) = 1.6 \cdot 10^{-26}\,N$$

d) IL RAPPORTO TRA LE DUE FORZE VALE:

$$\frac{|F_e|}{|F_g|} = \frac{2.4 \cdot 10^{-16}\,N}{1.6 \cdot 10^{-26}\,N} = 1.5 \cdot 10^{10}$$

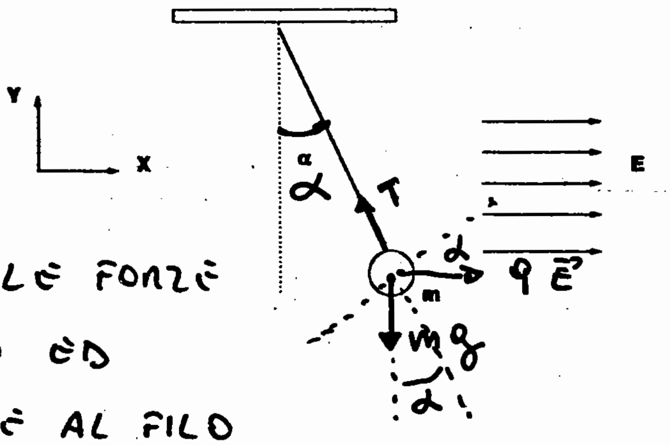
N.B. LA FORZA ELETTROSTATICA È MOLTO PIÙ GRANDE DELLA FORZA GRAVITAZIONALE

ESERCIZIO 7

Esercizio 7

Una pallina di plastica di massa m=2.0 g è sospesa ad un filo di 2.0 cm di lunghezza in una regione in cui agisce un campo elettrico uniforme orizzontale di intensità $E = 1.0 \cdot 10^3\ N/C$, come mostrato in figura. Se la pallina è in equilibrio, come mostrato in figura, per un angolo $\alpha = 15°$, qual'è la carica della pallina?

(Risultato: $q = \underline{5.25 \cdot 10^{-6}\ C}$)



PROIETTIAMO LE FORZE LUNGO IL FILO ED ORTOGONALMENTE AL FILO

PROIEZIONE ORTOGONALE

$$-mg\sin\alpha + qE\cos\alpha = F_\perp$$

PROIEZIONE PARALLELA AL FILO

$$-T + mg\cos\alpha + qE\sin\alpha = F_\parallel$$

AFFINCHÈ LA PALLINA SIA IN EQUILIBRIO LA PROIEZION ORTOGONALE DEVE ESSERE ZERO

$$F_\perp = 0 \Rightarrow mg\sin\alpha = qE\cos\alpha$$

$$\Rightarrow q = \frac{mg}{E}\tan\alpha = \frac{(2\cdot10^{-3}kg)(9.8\ \frac{m}{s^2})}{(1.0\cdot10^3\ \frac{N}{C})}\tan 15° = 5.25\cdot10^{-6}\ C$$

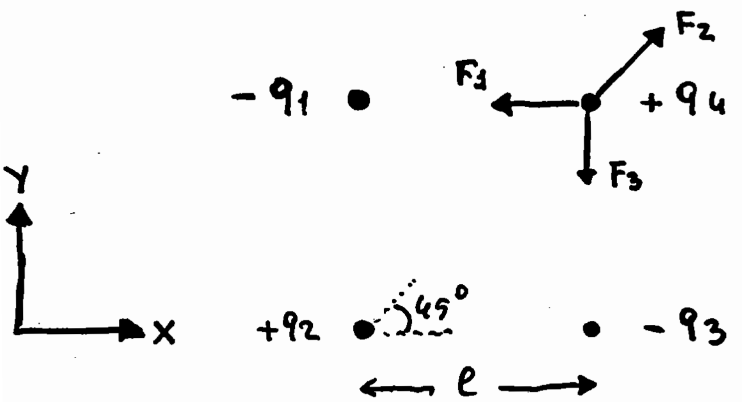
LA TENSIONE DEL FILO VALE:

$$T = mg\cos\alpha + qE\sin\alpha = 2\cdot10^{-3}\cdot9.8\cdot\cos15° + 5.25\cdot10^{-6}\cdot1.0\cdot10^{3}\sin15° =$$

$$= 18.93\cdot10^{-3} + 1.36\cdot10^{-3} = \underline{20.3\ N}$$

PROVA SCRITTA - 29 NOV. 1991

QUATTRO CARICHE, RISPETTIVAMENTE DI VALORE $q_1=-3C$, $q_2=2C$, $q_3=-1C$, $q_4=4C$, SONO POSTE AI VERTICI DI UN QUADRATO DI 10 cm DI LATO. QUANTO VALE (IN MODULO, DIREZIONE E VERSO), LA FORZA ELETTROSTATICA, DOVUTA ALLE CARICHE q_1, q_2, q_3 CHE SI ESERCITA SU q_4?



$$\vec{F}_1 = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_4}{\ell^2}\,\hat{x}$$

$$\vec{F}_3 = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_3 q_4}{\ell^2}\,\hat{y}$$

$$\vec{F}_2 = |\vec{F}_2|\cos 45^\circ\,\hat{x} + |\vec{F}_2|\,\text{sen}\,45^\circ\,\hat{y}$$

$$|\vec{F}_2| = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_2 q_4}{\ell^2\cdot 2}$$

- LA DIAGONALE DI UN QUADRATO VALE $\ell\sqrt{2}$

$$\cos 45^\circ = \text{sen}\,45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\vec{F}_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_2 q_4}{\ell^2 2}\frac{1}{\sqrt{2}}\,\hat{x} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_2 q_4}{\ell^2 2}\frac{1}{\sqrt{2}}\,\hat{y}$$

- FORZA TOTALE LUNGO X

$$F_x = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_2 q_4}{\ell^2 2}\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_4}{\ell^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_4}{\ell^2}\left(\frac{q_2}{2\sqrt{2}} - q_1\right) =$$

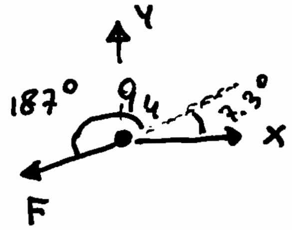
$$= 9\cdot 10^9\,\frac{4}{0.1^2}\left(\frac{2}{2\sqrt{2}} - 3\right) = -8.25\cdot 10^{12}\ N$$

- FORZA TOTALE LUNGO Y

$$F_Y = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_4}{\ell^2}\left(\frac{q_2}{2\sqrt{2}} - q_3\right) = 9\cdot 10^9\,\frac{4}{0.1^2}\left(\frac{2}{2\sqrt{2}} - 1\right) = -1.05\cdot 10^{12}\ N$$

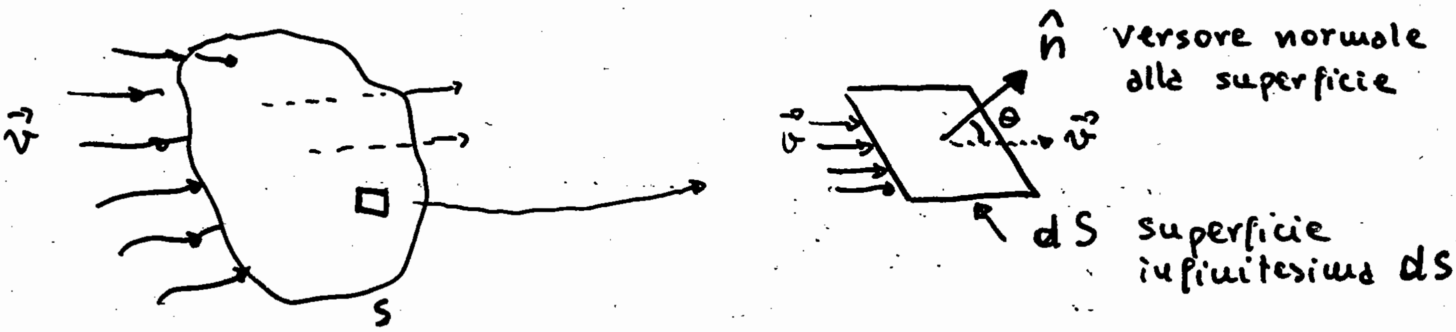
- $|\vec{F}| = \sqrt{F_x^2 + F_Y^2} = 8.32\cdot 10^{12}\ N$

$$\Theta = \text{arctg}\,\frac{F_Y}{F_x} = \text{arctg}\,\frac{-1.05}{-8.25} = 187.3^\circ$$



FLUSSO DI UN CAMPO VETTORIALE

- IL FLUSSO DI UN CAMPO VETTORIALE È UNA GRANDEZZA PROPORZIONALE AL NUMERO DI LINEE DI FORZA DEL CAMPO CHE ATTRAVERSANO UNA DATA SUPERFICIE



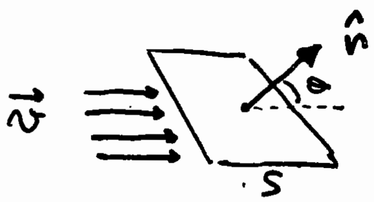
- $d\Phi = \vec{v} \cdot \hat{n}\, dS = |\vec{v}|\, dS \cos\theta$
- θ È L'ANGOLO FORMATO DALLA NORMALE ALLA SUPERFICIE CON IL VETTORE $\vec{v}$.

  SE L'ANGOLO È 90° ALLORA IL FLUSSO È NULLO.

- IL FLUSSO ATTRAVERSO L'INTERA SUPERFICIE S È DATO DALLA SOMMA DEI FLUSSI ELEMENTARI $d\Phi$

$$\Phi_S(\vec{v}) = \int_S d\Phi = \int_S \vec{v} \cdot \hat{n}\, dS = \int_S |\vec{v}|\, dS \cos\theta$$

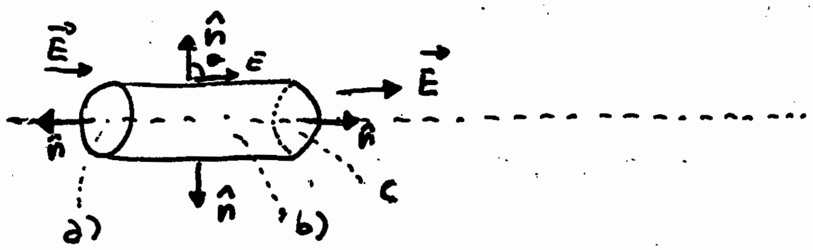
- CASO PARTICOLARE: LA SUPERFICIE È PIANA ED IL VETTORE $\vec{v}$ È LO STESSO IN TUTTI I PUNTI DELLA SUPERFICIE



$$\Phi_S(\vec{v}) = \int_S \vec{v} \cdot \hat{n}\, dS = \vec{v} \cdot \hat{n} \int_S dS = \vec{v} \cdot \hat{n}\, S = \underline{|\vec{v}| \cdot S \cdot \cos\theta}$$

PROBLEMA 24-1

LA FIGURA MOSTRA UNA SUPERFICIE GAUSSIANA DI FORMA CILINDRICA CON RAGGIO R IMMERSA IN UN CAMPO ELETTRICO UNIFORME $\vec{E}$. L'ASSE DEL CILINDRO SIA PARALLELO AL CAMPO. QUANTO VALE IL FLUSSO Φ DEL CAMPO ELETTRICO PER QUESTA SUPERFICIE CHIUSA?



$$\Phi_s(\vec{E}) = \int_s \vec{E}\cdot\hat{n}\,ds = \int_a \vec{E}\cdot\hat{n}\,ds + \int_b \vec{E}\cdot\hat{n}\,ds + \int_c \vec{E}\cdot\hat{n}\,ds$$

- SULLA SUPERFICIE a L'ANGOLO TRA $\hat{n}$ E IL CAMPO $\vec{E}$ VALE 180°

$$\int_a \vec{E}\cdot\hat{n}\,ds = \vec{E}\cdot\hat{n}\int_a ds = |\vec{E}|\cdot S_a\cdot\cos\theta = -|\vec{E}|\,S_a$$

- SULLA SUPERFICIE CILINDRICA L'ANGOLO È 90°

$$\int_b \vec{E}\cdot\hat{n}\,ds = \vec{E}\cdot\hat{n}\int_b ds = |\vec{E}|\cdot S_b\cos\theta = |\vec{E}|\cdot S_b\cdot\cos 90° = 0$$

- SULLA SUPERFICIE C L'ANGOLO E' ZERO

$$\int_c \vec{E}\cdot\hat{n}\,ds = \vec{E}\cdot\hat{n}\int_c ds = |\vec{E}|\cdot S_c\cdot\cos\theta = |\vec{E}|\cdot S_c$$

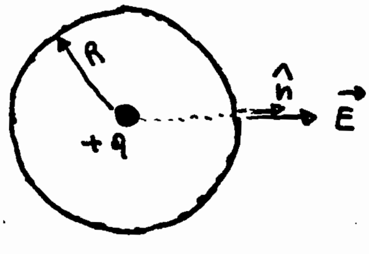
- NEL CILINDRO $S_a = S_c = S$
- SOMMIAMO I TRE INTEGRALI

$$\Phi_s(\vec{E}) = -E\cdot S + 0 + E\cdot S = 0$$

$\Rightarrow$ IL FLUSSO DI UN CAMPO UNIFORME ATTRAVERSO UNA SUPERFICIE CHIUSA E' ZERO.

TEOREMA DI GAUSS

- CALCOLIAMO IL FLUSSO DEL CAMPO ELETTRICO GENERATO DA UNA CARICA PUNTIFORME POSITIVA, ATTRAVERSO UNA SUPERFICIE SFERICA CHE HA NEL SUO CENTRO LA CARICA.



$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\hat{r}$$

- SUPERFICIE DI UNA SFERA: $S = 4\pi R^2$

  PRENDIAMO UNA SUPERFICIE INFINITESIMA dS SULLA SFERA

  $dS = R^2 \, d\Omega$

- $d\Omega$ E' L'ANGOLO SOLIDO INFINITESIMO [$d\Omega = \sin\vartheta \, d\vartheta \, d\varphi$]

[circonferenza $= 2\pi R$; infinitesimo di circonferenza $dl = R \, d\varphi$]

- LA NORMALE $\hat{n}$ E' DIRETTA COME IL RAGGIO VETTORE $\vec{R}$

$$d\Phi(\vec{E}) = \vec{E}\cdot\hat{n}\,dS = |\vec{E}|\cdot dS = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{R^2}\cdot R^2 d\Omega = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}d\Omega$$

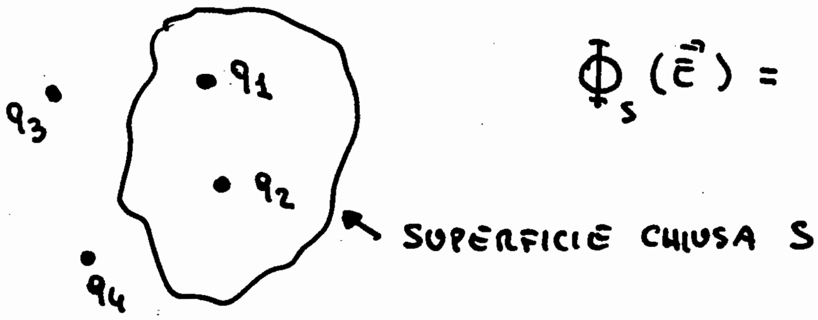
- IL FLUSSO INFINITESIMO NON DIPENDE DAL RAGGIO DELLA SFERA

$$\Phi_S(\vec{E}) = \int_{S_{chiusa}} \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} d\Omega = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\int_{S_{chiusa}} d\Omega = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\cdot 4\pi = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

- q E' LA CARICA CONTENUTA ALL'INTERNO DELLA SFERA

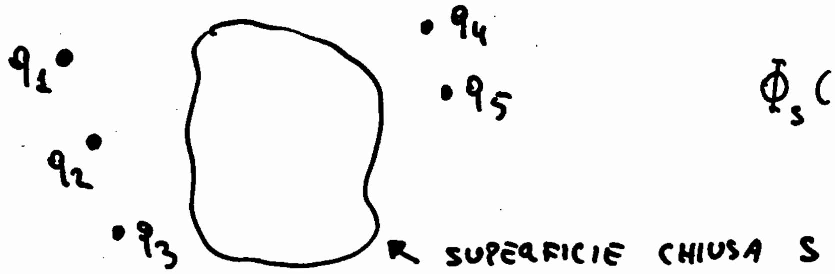
TEOREMA DI GAUSS

- IL FLUSSO DEL CAMPO ELETTRICO ATTRAVERSO UNA SUPERFICIE <u>CHIUSA</u> QUALSIASI E' PARI ALLA SOMMA ALGEBRICA DELLE CARICHE CONTENUTE ALL'INTERNO DIVISO ε_0



$$\Phi_s(\vec{E}) = \frac{q_1 + q_2}{\varepsilon_0}$$

- LE CARICHE AL DI FUORI DELLA SUPERFICIE NON CONTANO, SEBBENE CONTRIBUISCONO AL VALORE DEL CAMPO $\vec{E}$



$$\Phi_s(\vec{E}) = 0$$ [non ci sono cariche all'interno]

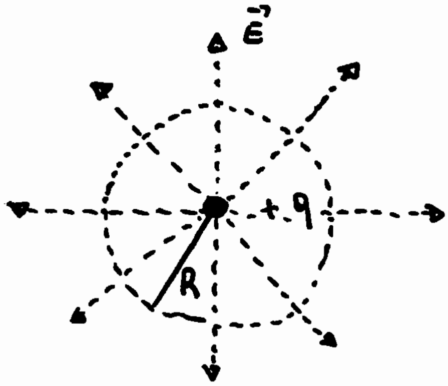
- IL TEOREMA DI GAUSS E' UTILE OGNI QUALVOLTA, PER RAGIONI DI SIMMETRIA, E' POSSIBILE SCEGLIERE UNA SUPERFICIE SULLA QUALE IL MODULO DEL CAMPO ELETTRICO E' COSTANTE

$$\Phi_s(\vec{E}) = \int_{S_{chiusa}} \vec{E}\cdot\hat{n}\, dS = \vec{E}\cdot\hat{n}\int_{S_{chiusa}} dS = |\vec{E}|\int_{S_{chiusa}} dS = |\vec{E}|\cdot S$$

PER IL TEOREMA DI GAUSS $\Phi_s(\vec{E}) = \frac{q_{interna}}{\varepsilon_0}$, ALLORA:

$$|\vec{E}|\cdot S = \frac{q_{interna}}{\varepsilon_0} \Rightarrow |\vec{E}| = \frac{1}{S}\cdot\frac{q_{interna}}{\varepsilon_0}$$

APPLICAZIONI DEL TEOREMA DI GAUSS: CARICA PUNTIFORME



LE LINEE DI FORZA DEL CAMPO ELETTRICO SONO DELLE RETTE USCENTI DALLA CARICA

- PER RAGIONI DI SIMMETRIA IL CAMPO DEVE ESSERE LO STESSO PER UNA STESSA DISTANZA R DALLA CARICA
- SE SCEGLIAMO QUINDI UNA SUPERFICIE SFERICA DI RAGGIO R INCENTRATA SULLA CARICA, IL MODULO DI $\vec{E}$ DEVE ESSERE LO STESSO SU TUTTA LA SUPERFICIE

$$\Phi_S(\vec{E}) = \int_{S_{SFERA}} \vec{E}\cdot\hat{n}\,dS = \vec{E}\cdot\hat{n}\int_{S_{SFERA}} dS = |\vec{E}|\, S_{SFERA} = |\vec{E}|\cdot 4\pi R^2$$

- PER IL TEOREMA DI GAUSS SI HA:

$$\Phi_{S_{chiusa}}(\vec{E}) = \frac{q_{interna}}{\varepsilon_0}$$

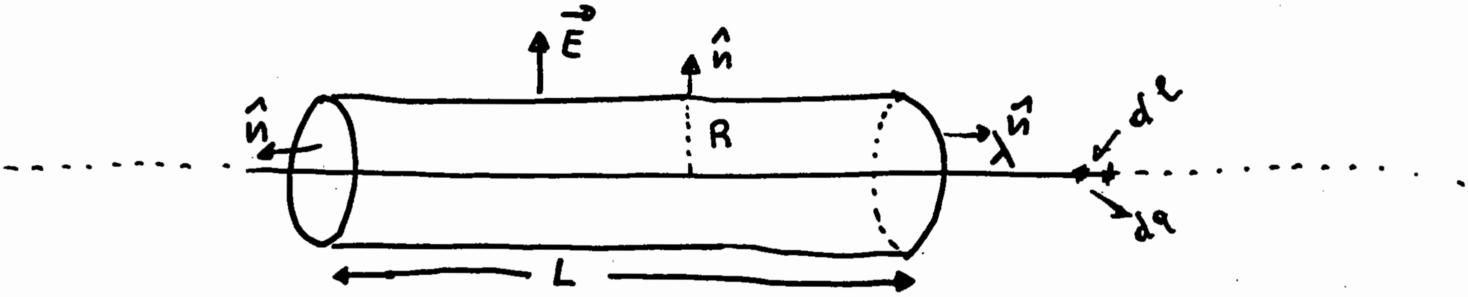
- QUINDI:

$$|\vec{E}|\cdot 4\pi R^2 = \frac{q}{\varepsilon_0} \Rightarrow |\vec{E}| = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{R^2} \quad \left[\text{legge di Coulomb}\right]$$

- N.B. SE NELLE VICINANZE CI FOSSE STATA UN'ALTRA CARICA q' NON CONTENUTA NELLA SFERA, AVREMMO SEMPRE AVUTO $\Phi_S(\vec{E}) = \frac{q}{\varepsilon_0}$, MA NON SAREBBE STATO POSSIBILE IL CALCOLO ESPLICITO DEL FLUSSO, PERCHÉ SAREBBE STATA ROTTA LA SIMMETRIA SFERICA

TEOREMA DI GAUSS:

FILO RETTILINEO INFINITO CARICO



- PRENDIAMO UN FILO RETTILINEO INFINITO CARICO CON UNA DENSITA' LINEARE DI CARICA λ

$$\lambda = \frac{dq}{d\ell} \quad \Rightarrow \quad dq = \lambda \, d\ell$$

- DATO CHE IL FILO E' INFINITO, PER RAGIONI DI SIMMETRIA IL CAMPO NON PUO' CHE ESSERE ORTOGONALE AL FILO, ED AVRA' LA STESSA INTENSITA' PER LA STESSA DISTANZA R DAL FILO

- VI E' UNA SIMMETRIA CILINDRICA, QUINDI SCEGLIAMO COME SUPERFICIE UN CILINDRO DI RAGGIO R E ALTEZZA L

- IL FLUSSO E' NULLO DALLE BASI DEL CILINDRO ($\vec{E} \cdot \hat{n} = 0$)

$$\Phi_s(\vec{E}) = |\vec{E}| \cdot S_{cilindro} = |\vec{E}| \, 2\pi R \cdot L$$

- PER IL TEOREMA DI GAUSS

$$\Phi_s(\vec{E}) = \frac{q_{interna}}{\varepsilon_0} = \frac{\lambda \cdot L}{\varepsilon_0}$$

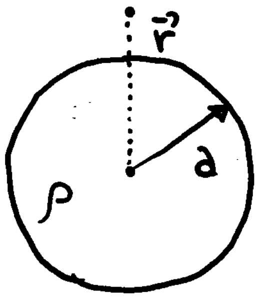
$$\Rightarrow \quad |\vec{E}| \cdot 2\pi R \cdot L = \frac{\lambda \cdot L}{\varepsilon_0} \quad \Rightarrow \quad \boxed{|\vec{E}| = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0} \frac{\lambda}{R}}$$

N.B. ABBIAMO TROVATO $\vec{E}$ SENZA RISOLVERE NESSUN INTEGRALE

TEOREMA DI GAUSS: SFERA UNIFORMEMENTE CARICA

- PRENDIAMO UNA SFERA ISOLANTE UNIFORMEMENTE CARICA CON DENSITA' DI CARICA ρ; Q = CARICA TOTALE

$$\rho = \frac{Q}{V} = \text{costante} \qquad \left[\rho = \frac{dQ}{dV} = \rho(x,y,z) \right]$$

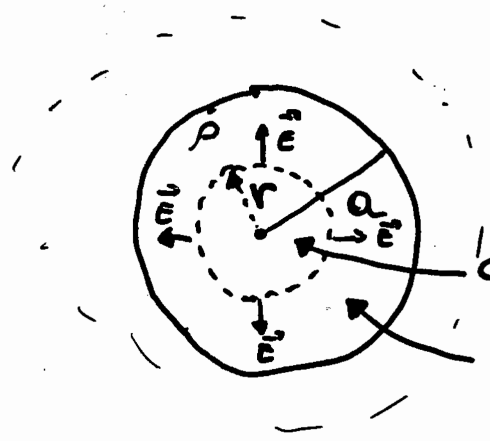


$$V = \frac{4}{3}\pi a^3$$

$$\rho = \frac{Q}{\frac{4}{3}\pi a^3}$$

- LA SFERA HA RAGGIO a.
- VOGLIAMO TROVARE IL VALORE DEL CAMPO ELETTRICO IN UN PUNTO QUALSIASI A DISTANZA $\vec{r}$ DAL CENTRO DELLA SFERA.
- IL PUNTO PUO' ESSERE SIA INTERNO CHE ESTERNO ALLA SFERA
- DATA LA SIMMETRIA SFERICA DELLA DISTRIBUZIONE DI CARICA, IL CAMPO ELETTRICO $\vec{E}$ AVRA' LA DIREZIONE DEL RAGGIO VETTORE ED AVRA' LO STESSO MODULO SU UNA SUPERFICIE SFERICA DI RAGGIO R
- CALCOLIAMO QUINDI IL FLUSSO DI $\vec{E}$ ATTRAVERSO UNA SUPERFICIE SFERICA QUALSIASI DI RAGGIO r

T. DI GAUSS: SFERA CARICA



- $\oint_S(\vec{E}) = \int_{S_{SFERA}} \vec{E}\cdot\hat{n}\, ds = \vec{E}\cdot\hat{n}\int_{S_{SFERA}} ds = |\vec{E}|\, 4\pi r^2$

- PER IL TEOREMA DI GAUSS SI HA:

$$\oint_S(\vec{E}) = \frac{q_{INTERNA}}{\varepsilon_0} = \frac{\rho\cdot\frac{4}{3}\pi r^3}{\varepsilon_0}$$

$$\Rightarrow \quad |\vec{E}|\cdot 4\pi r^2 = \frac{\rho}{\varepsilon_0}\cdot\frac{4}{3}\pi r^3 \quad \Rightarrow \quad |\vec{E}| = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\cdot r$$

$$\boxed{|\vec{E}| = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{a^3}\, r}$$

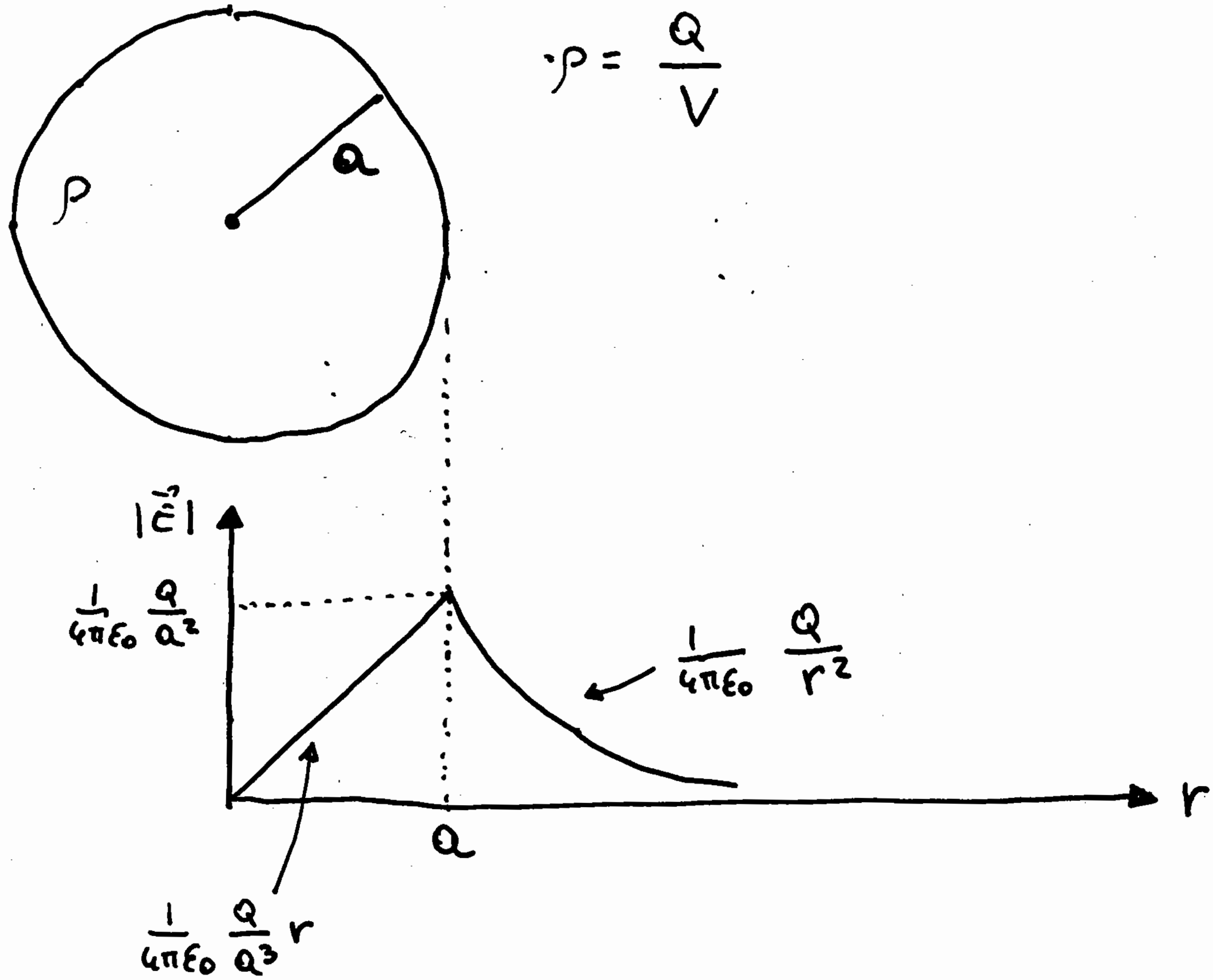
- SE SCEGLIAMO UNA SUPERFICIE SFERICA CON RAGGIO $r > a$, ALLORA TUTTA LA SFERA CARICA È CONTENUTA ED OTTENIAMO

$$|\vec{E}| = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}$$

È LO STESSO CAMPO GENERATO DA UNA CARICA PUNTIFORME Q

QUINDI, VISTA DALL'ESTERNO, È COME SE TUTTA LA CARICA DELLA SFERA FOSSE CONCENTRATA NEL SUO CENTRO.

CAMPO $\vec{E}$ DI UNA SFERA CARICA



N.B. QUANTO DETTO PER LA SFERA CARICA SI APPLICA ANCHE ALLA FORZA GRAVITAZIONALE PERCHE'

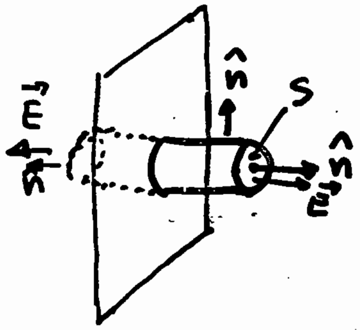
$$\vec{F} = m \cdot G \frac{M}{r^2}\hat{r} \quad \left(\text{stessa dipendenza } \frac{1}{r^2}\right)$$

QUINDI PER UN CORPO DI MASSA m AL DI FUORI DELLA SUPERFICIE DELLA TERRA, E' COME SE TUTTA LA MASSA DELLA TERRA FOSSE CONCENTRATA NEL SUO CENTRO.

POSSIAMO QUINDI TRATTARE L'ATTRAZIONE TRA UN CORPO E LA TERRA COME L'INTERAZIONE DI DUE OGGETTI PUNTIFORMI

TEOREMA DI GAUSS: LAMINA ISOLANTE CARICA

TROVIAMO IL CAMPO ELETTRICO CREATO DA UNA CARICA DISTRIBUITA UNIFORMEMENTE CON DENSITA' SUPERFICIALE σ SU UN PIANO INFINITO ISOLANTE.



$$\sigma = \frac{dQ}{dS} \Rightarrow dQ = \sigma \cdot dS$$

- PER RAGIONI DI SIMMETRIA IL CAMPO $\vec{E}$ DEVE ESSERE ORTOGONALE ALLA LAMINA
- SCEGLIAMO COME SUPERFICIE UN CILINDRO CON L'ASSE PERPENDICOLARE AL PIANO
- IL FLUSSO DALLA FACCIA LATERALE DEL CILINDRO È NULLO PERCHÉ $\vec{E} \cdot \hat{n} = 0$ [l'altezza del cilindro può essere qualsiasi]
- IL FLUSSO DA UNA BASE DEL CILINDRO VALE:

  $$\Phi_S(\vec{E}) = |\vec{E}| \cdot S$$

- IL FLUSSO USCENTE DA TUTTO IL CILINDRO VALE:

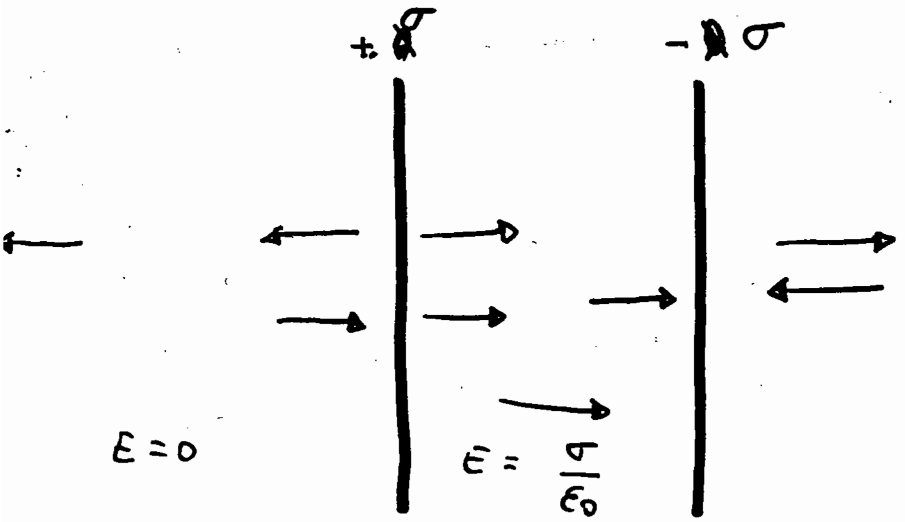
  $$\Phi(\vec{E}) = |\vec{E}| \cdot S + |\vec{E}| \cdot S + 0 = 2|\vec{E}| \cdot S$$

- PER IL TEOREMA DI GAUSS $\Phi(E) = \frac{Q_{interna}}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma \cdot S}{\varepsilon_0}$

$$\Rightarrow 2|\vec{E}| \cdot S = \frac{\sigma \cdot S}{\varepsilon_0} \Rightarrow |\vec{E}| = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

N.B. IL MODULO DEL CAMPO ELETTRICO NON DIPENDE DALLA DISTANZA DALLA LAMINA

DOPPIO STRATO



$E_+ = +\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$

$E_- = -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$

$E = 0$ $\qquad E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$ $\qquad E = 0$

- PRENDIAMO DUE LAMINE PIANE INFINITE, UNA CON DENSITA' $+\lambda$ E L'ALTRA $-\lambda$

- ALL'INTERNO DEL DOPPIO STRATO IL CAMPO VALE $E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$

- FUORI DAL DOPPIO STRATO IL CAMPO VALE 0

ESERCIZI CONSIGLIATI

Flusso del campo elettrico e teorema di Gauss

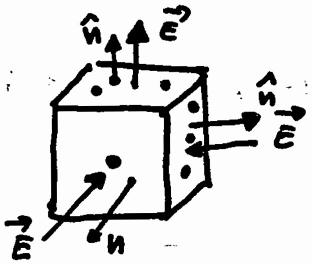
- Serway (3° Edizione) – Cap. 19
  - 29 – 31 – 35 – 37 – 39 - 61
- Halliday (5° Edizione) – Cap. 24
  - 1E – 3E – 5E – 7P – 13E – 15P – 17P – 21E – 23P – 25P – 29E – 35P

ESERCIZIO 4

Esercizio 4

Il flusso elettrico netto attraverso ciascuna faccia di un dado ha intensità in unità di $10^3\ N \cdot m^2/C$ che è esattamente uguale al numero che compare sulla faccia stessa (da 1 a 6). Il flusso è entrante per N dispari e uscente per N pari. Qual'è la carica netta contenuta nel dado?

(Risultato: Q[redacted])
→ 26 uC



$$\Phi_S(\vec{E}) = \int_S \vec{E} \cdot \hat{n}\, dS$$

- LA NORMALE $\hat{n}$ E' USCENTE DALLA SUPERFICIE CHIUSA
- IL FLUSSO ENTRANTE DAI NUMERI DISPARI E' NEGATIVO, MENTRE QUELLO USCENTE DAI PARI E' POSITIVO
- FLUSSO NEGATIVO:

$$\Phi_-(\vec{E}) = (-1 \cdot 10^3 - 3 \cdot 10^3 - 5 \cdot 10^3)\ \frac{N}{C} \cdot m^2 = -9 \cdot 10^3\ \frac{N}{C} \cdot m^2$$

- FLUSSO POSITIVO:

$$\Phi_+(\vec{E}) = (2 \cdot 10^3 + 4 \cdot 10^3 + 6 \cdot 10^3)\ \frac{N}{C} \cdot m^2 = 12 \cdot 10^3\ \frac{N}{C}\ m^2$$

FLUSSO TOTALE:

$$\Phi_S(\vec{E}) = \Phi_+(\vec{E}) + \Phi_-(\vec{E}) = 12 \cdot 10^3 - 9 \cdot 10^3 = 3 \cdot 10^3\ \frac{N}{C} \cdot m^2$$

TEOREMA DI GAUSS: $\Phi_S(\vec{E}) = \frac{Q}{\varepsilon_0}$

$$Q = \varepsilon_0 \cdot \Phi_S(\vec{E}) = \left(8.85 \cdot 10^{-12}\ \frac{C^2}{N \cdot m^2}\right)\left(3 \cdot 10^3\ \frac{N}{C}\ m^2\right) = 26 \cdot 10^{-9}\ C$$

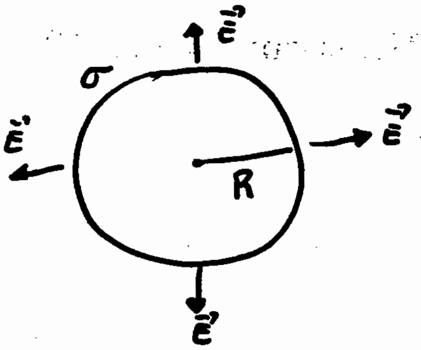
$$Q = 26\ uC$$

ESERCIZIO 5

Esercizio 5

Una sfera conduttrice uniformemente carica avente raggio di 1.2 m ha una densità di carica superficiale di 8.1 $\mu C/m^2$.
a) Si trovi la carica sulla sfera.
b) Si calcoli il flusso elettrico totale uscente dalla superficie della sfera.

(Risultato: a) 147 μC, b) $16.3 \cdot 10^6\ N \cdot m^2/C$)



a) LA CARICA TOTALE PRESENTE SULLA SFERA E' PARI A:

$$Q = \sigma \cdot S$$

• LA SUPERFICIE DELLA SFERA VALE:

$$S = 4\pi R^2 = 4\pi \cdot 1.2^2 = 18.1\ m^2$$

$$\Rightarrow \quad Q = \sigma \cdot S = \left(8.1 \cdot 10^{-6}\ \frac{C}{m^2}\right)\left(18.1\ m^2\right) = \underline{147\ \mu C}$$

IL CAMPO $\vec{E}$ PERPENDICOLARE ALLA SUPERFICIE DEL CONDUTTORE. IL SUO MODULO SI RICAVA CON IL TEOREMA DI COULOMB

$$|\vec{E}| = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} = \frac{8.1 \cdot 10^{-6}\ \frac{C}{m^2}}{8.85 \cdot 10^{-12}\ \frac{C^2}{N m^2}} = 0.9 \cdot 10^6\ \frac{N}{C}$$

) CALCOLIAMO ORA IL FLUSSO USCENTE DA UNA SUPERFICIE SFERICA LEGGERMENTE PIU' GRANDE DELLA SUPERFICIE DELLA SFERA STESSA

$$\Phi_S(\vec{E}) = \int_{S_{SFERA}} \vec{E} \cdot \hat{n}\, dS = |\vec{E}| \int_{S_{SFERA}} dS = |\vec{E}| \cdot S_{SFERA} =$$

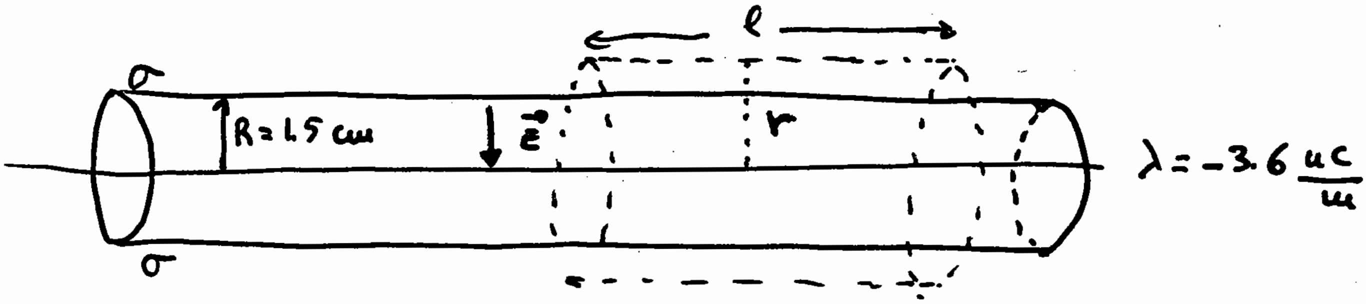
$$= \left(0.9 \cdot 10^6\ \frac{N}{C}\right) \cdot \left(18.1\ m^2\right) = \underline{16.3 \cdot 10^6\ \frac{N}{C} \cdot m^2}$$

ESERCIZIO 6

Esercizio 6

Su un cavo sottile rettilineo molto lungo è presente una carica negativa con densità di carica lineare λ=- 3.6 nC/m. Il cavo viene circondato da un cilindro avente raggio di 1.5 cm, coassiale con il cavo. La densità di carica superficiale σ del cilindro è tale che il campo elettrico al di fuori del cilindro è nullo. Si calcoli la densità di carica positiva σ.

(Risultato: $\sigma = 38 \cdot 10^{-9}\ C/m^2$)



- IL CAMPO ELETTRICO GENERATO DA UN FILO RETTILINEO INFINITO VALE:

$$E_- = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r} \quad [\text{diretto verso il filo perche' } \lambda \text{ negativo}]$$

- PER CALCOLARE IL CAMPO GENERATO DALLE DUE DISTRIBUZIONI DI CARICHE APPLICHIAMO IL TEOREMA DI GAUSS AD UNA SUPERFICIE CILINDRICA DI RAGGIO $r > R$

- CAMPO GENERATO DALLA CARICA POSITIVA

$$\int_S \vec{E}\cdot\hat{n}\,dS = |\vec{E}|\,2\pi r\cdot \ell = \frac{Q}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma\, 2\pi R \ell}{\varepsilon_0}$$

$$\Rightarrow |E_+| = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\frac{R}{r}$$

- I DUE CAMPI (FILO + CILINDRO) DEVONO ESSERE UGUALI IN MODULO

$$|E_+| = |E_-| \Rightarrow \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\frac{R}{r} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r} \Rightarrow \sigma = \frac{\lambda}{2\pi R}$$

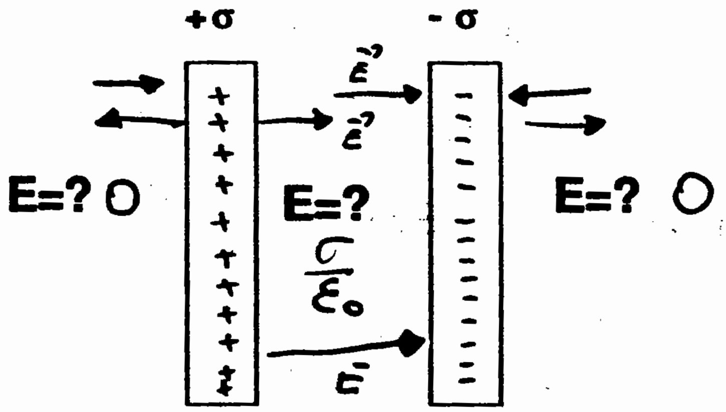
$$\sigma = \frac{3.6\cdot 10^{-9}\frac{C}{m}}{2\pi\cdot(1.5\cdot 10^{-2} m)} = 0.38\cdot 10^{-7}\frac{C}{m^2} \simeq 38\ \frac{nC}{m^2}$$

ESERCIZIO 8

Esercizio 8

Due grandi piatti isolanti sottili sono paralleli e affacciati come in figura. Su un piatto vi è una carica positiva con densità superficiale $\sigma = 8.85 \cdot 10^{-15}\ C/m^2$, mentre sull'altro la carica è negativa e con stessa densità superficiale. Facendo l'approssimazione di piatto infinito, si calcoli il campo elettrico tra i due piatti e all'esterno di essi.

(Risultato: $\underline{E = 1.0 \cdot 10^{-3}\ N/C}$)



I DUE PIATTI POSSONO ESSERE CONSIDERATI COME UNA LAMINA DI DIMENSIONI INFINITE.

IL CAMPO GENERATO DA UNA LAMINA VALE:

$$|\vec{E}| = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

IL PIATTO POSITIVO GENERA UN CAMPO ELETTRICO PARI A $\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$ USCENTE DAL PIATTO

MENTRE IL PIATTO NEGATIVO GENERA IL CAMPO $-\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$ ENTRANTE NEL PIATTO.

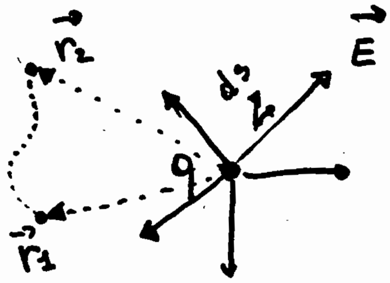
AL DI FUORI DEI PIATTI I DUE CAMPI SI ANNULLANO.

TRA I DUE PIATTI I CAMPI SI SOMMANO E VALGONO

$$|\vec{E}| = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} = \frac{8.85 \cdot 10^{-15}\ C/m^2}{8.85 \cdot 10^{-12}\ \frac{C^2}{N m^2}} = 10^{-3}\ \frac{N}{C}$$

LAVORO SVOLTO DAL CAMPO $\vec{E}$

• CONSIDERIAMO IL CAMPO $\vec{E}$ GENERATO DA UNA CARICA PUNTIFORME q



$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{r^2} \hat{r}$$

[r = distanza dalla carica]

METTIAMO UNA CARICA q_0 NEL CAMPO

$$\vec{F} = q_0 \cdot \vec{E}$$

SPOSTIAMO LA CARICA DAL PUNTO $\vec{r}_1$ AL PUNTO $\vec{r}_2$

IL LAVORO FATTO DALLA FORZA DEL CAMPO $\vec{E}$ VALE:

$$L = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \frac{q \cdot q_0}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{r^2} \hat{r} \cdot d\vec{s} = \int_{r_1}^{r_2} \frac{q q_0}{4\pi\varepsilon_0} \frac{dr}{r^2} =$$

$$= \frac{q_0 \cdot q}{4\pi\varepsilon_0} \left[-\frac{1}{r} \right]_{r_1}^{r_2} = \frac{q_0 \cdot q}{4\pi\varepsilon_0} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)$$

IL LAVORO NON DIPENDE DAL PERCORSO, MA SOLO DALLO STATO FINALE E DA QUELLO INIZIALE

$\Rightarrow$ LA FORZA ELETTROSTATICA È CONSERVATIVA

$\Rightarrow$ SI PUÒ DEFINIRE L'ENERGIA POTENZIALE ELETTROSTATICA

N.B. DATO IL PRINCIPIO DI SOVRAPPOSIZIONE, LE CONCLUSIONI SONO VALIDE QUALUNQUE SIA IL NUMERO DI CARICHE

ENERGIA POTENZIALE ELETTROSTATICA

- CARICA q_0 IN UN CAMPO $\vec{E}$

- FORZA SULLA CARICA $\vec{F} = q_0 \cdot \vec{E}$

- PER MUOVERE LA CARICA q_0 ALL'INTERNO DEL CAMPO $\vec{E}$ DOBBIAMO VINCERE LE FORZE DEL CAMPO APPLICANDO UNA FORZA ESTERNA

$$\vec{F}_{APP} = - q_0 \cdot \vec{E}$$

- DEFINIAMO ENERGIA POTENZIALE DEL CAMPO ELETTRICO $\vec{E}$ IN UN PUNTO $\vec{r}$ DELLO SPAZIO IL LAVORO FATTO DA UNA FORZA ESTERNA PER SPOSTARE LA CARICA q_0 DALL'INFINITO AL PUNTO $\vec{r}$

$$U(\vec{r}) = -\int_{\infty}^{\vec{r}} q_0 \cdot \vec{E} \cdot d\vec{s}$$

- CALCOLIAMO IL LAVORO FATTO DA $\vec{E}$ PER FAR MUOVERE UNA CARICA DA $\vec{A}$ a $\vec{B}$

$$L_{AB} = \int_A^B q_0 \vec{E} \cdot d\vec{s} = \int_A^{\infty} q_0 \vec{E} \cdot d\vec{s} + \int_{\infty}^{B} q_0 \vec{E} \cdot d\vec{s} =$$

$$= -\int_{\infty}^{A} q_0 \vec{E} \cdot d\vec{s} - \left(-\int_{\infty}^{B} q_0 \vec{E} \cdot d\vec{s} \right) = U(A) - U(B)$$

- $L_{AB} = U(A) - U(B)$

- SE $U(B) < U(A) \Rightarrow$ IL LAVORO FATTO DAL CAMPO E' POSITIVO

POTENZIALE ELETTRICO

- $$U(\vec{r}) = -q_0 \int_{\infty}^{\vec{r}} \vec{E} \cdot d\vec{s}$$

- CONSIDERIAMO L'ENERGIA POTENZIALE PER UNITA' DI CARICA

$$V(\vec{r}) = \frac{U(\vec{r})}{q_0} = -\int_{\infty}^{\vec{r}} \vec{E} \cdot d\vec{s} \qquad \text{[potenziale elettrico]}$$

- IL POTENZIALE ELETTRICO DI UN PUNTO ARBITRARIO E' UGUALE AL LAVORO PER UNITA' DI CARICA NECESSARIO PER PORTARE UNA CARICA DI PROVA POSITIVA DALL'INFINITO AL PUNTO

- LA QUANTITA' DI INTERESSE FISICO NON E' IL POTENZIALE BENSI' LA DIFFERENZA DI POTENZIALE

$$\Delta V = V(A) - V(B) = \int_{A}^{B} \vec{E} \cdot d\vec{s}$$

- IL POTENZIALE ELETTRICO SI MISURA IN $\frac{J}{C} = V$ [VOLT]

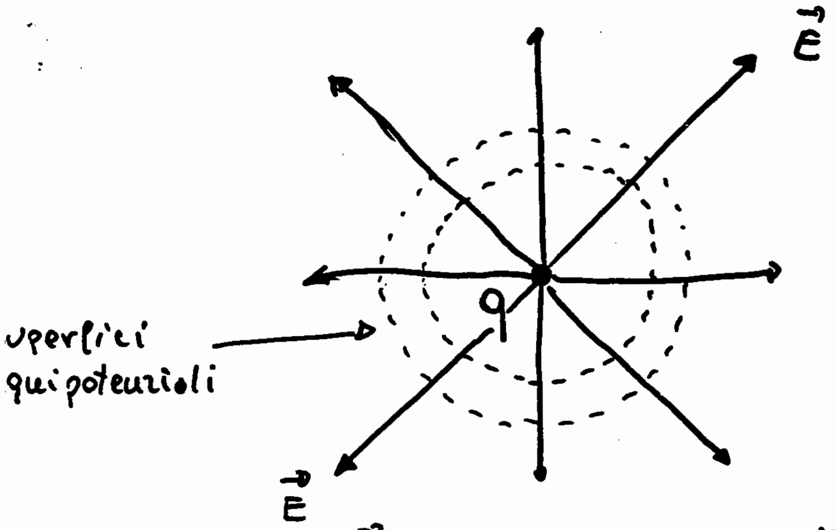
- IL CAMPO ELETTRICO SI MISURA IN $\frac{V}{m} = \frac{N}{C}$

N.B. DEFINIZIONE DI eV [ELETTRON-VOLT]

$$1\ eV = (1.6 \cdot 10^{-19}\ C) \cdot (1\ V) = 1.6 \cdot 10^{-19}\ J$$

ENERGIA ACQUISTATA DA UN ELETTRONE CHE SUPERA UNA d.d.p. DI 1 V

POTENZIALE ELETTRICO DI UNA CARICA PUNTIFORME



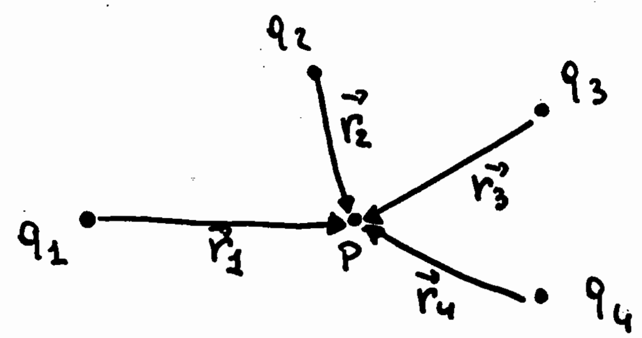
$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\hat{r}$$

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r}$$

$$V(r) = -\int_{\infty}^{\vec{r}} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\hat{r}\cdot d\vec{s} = -\int_{\infty}^{r}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}dr = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r}$$

- IL POTENZIALE È UNA GRANDEZZA SCALARE
- $q > 0 \Rightarrow V > 0$; $q < 0 \Rightarrow V < 0$
- I PUNTI CHE HANNO LA STESSA DISTANZA r DALLA CARICA q HANNO LO STESSO POTENZIALE (SUPERFICIE EQUIPOTENZIALE)
- I PUNTI DI UNA SUPERFICIE ORTOGONALE AL CAMPO ELETTRICO HANNO LO STESSO POTENZIALE
- MUOVENDOSI LUNGO UNA SUPERFICIE EQUIPOTENZIALE NON SI COMPIE LAVORO (NON VARIA L'ENERGIA POTENZIALE)

POTENZIALE DI MOLTE CARICHE P.



- VALE IL PRINCIPIO DI SOVRAPPOSIZIONE

$$V_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1}{r_1}$$ [r_1 = distanza della carica q_1 dal punto $\vec{P}$]

$$V_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_2}{r_2} \quad ; \quad V_3 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_3}{r_3} \quad ; \quad V_4 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_4}{r_4}$$

$$V(P) = V_1 + V_2 + V_3 + V_4 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q_1}{r_1} + \frac{q_2}{r_2} + \frac{q_3}{r_3} + \frac{q_4}{r_4}\right)$$

$$V(P) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_1^4{}_i \frac{q_i}{r_i}$$

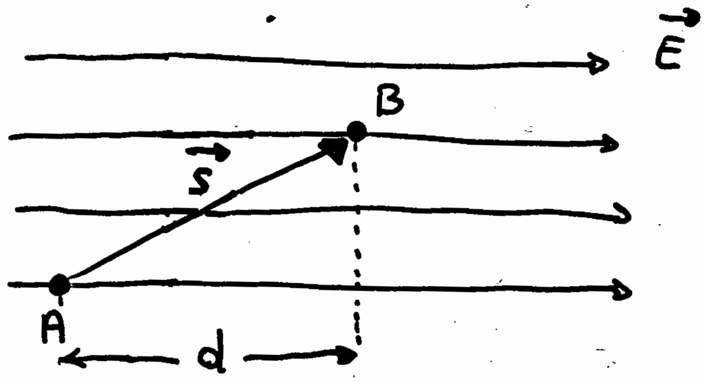
- L'ENERGIA POTENZIALE DI UNA CARICA q_0 POSTA IN $\vec{P}$ VALE

$$U(P) = q_0 \cdot V(P) = q_0 \cdot \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_i^4{}_i \frac{q_i}{r_i}$$

N.B. IL CALCOLO DEL POTENZIALE È PIÙ SEMPLICE DEL CALCOLO DEL CAMPO ELETTRICO

$\Rightarrow$ SI RICAVA V $\Rightarrow$ DA QUESTI SI RICAVA $\vec{E}$

d.d.p. IN UN CAMPO $\vec{E}$ UNIFORME



- CALCOLIAMO LA DIFFERENZA DI POTENZIALE TRA DUE PUNTI $\vec{A}$ E $\vec{B}$ CHE SI TROVANO IN UN CAMPO $\vec{E}$ UNIFORME

$$\Delta V = V(A) - V(B) = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{s} =$$

$$= \vec{E} \cdot \int_{\vec{A}}^{\vec{B}} d\vec{s} = \vec{E} \cdot \vec{s} = E \cdot d$$

- SE CI MUOVIAMO IN VERSO CONCORDE CON IL CAMPO ELETTRICO, IL POTENZIALE DIMINUISCE.

- SE METTIAMO UNA CARICA q_0 POSITIVA, DI MASSA m, IN UN CAMPO $\vec{E}$, LA CARICA SEGUIRA' LE LINEE DEL CAMPO DIMINUENDO LA SUA ENERGIA POTENZIALE E AUMENTANDO LA SUA ENERGIA CINETICA.

N.B.

$$\Delta V = V(f) - V(i) = -\int_i^f \vec{E} \cdot d\vec{s} = -Ed$$

$$\Rightarrow \Delta V = V(i) - V(f) = +\int_i^f \vec{E} \cdot d\vec{s}$$

[IL SERWAY FA CONFUSIONE]

RICAVARE $\vec{E}$ CONOSCENDO V

- IN UN CAMPO UNIFORME ABBIAMO VISTO CHE:

$$V(f) - V(i) = \Delta V = -\vec{E}\cdot d\vec{s} = -E\,d$$

- IN QUESTO CASO:

$$E = -\frac{\Delta V}{d}$$

- NEL CASO DI UNA VARIAZIONE INFINITESIMA

$$dV = -\vec{E}\cdot d\vec{s}$$

- SE IL CAMPO HA UNA SOLA COMPONENTE (E_x) ALLORA SI HA:

$$dV = -\vec{E}\cdot d\vec{s} = -E_x\,dx$$

$$\Rightarrow \boxed{E_x = -\frac{dV}{dx}} \quad \left(\text{derivata di } V \text{ rispetto a } x\right)$$

- NEL CASO GENERALE SI HA:

$$dV = -\vec{E}\cdot d\vec{s} = -\left(E_x\,dx + E_y\,dy + E_z\,dz\right)$$

$$\Rightarrow \quad E_x = -\frac{\partial V}{\partial x} \; ; \quad E_y = -\frac{\partial V}{\partial y} \; ; \quad E_z = -\frac{\partial V}{\partial z} \quad \left[\begin{array}{c}\text{derivate}\\ \text{parziali}\end{array}\right]$$

- N.B. IN CASO DI SIMMETRIA SFERICA

$$dV = -\vec{E}\cdot d\vec{s} = -E\,dr$$

$$\Rightarrow \quad E = -\frac{dV}{dr}$$

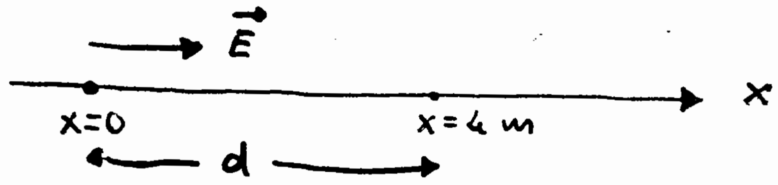
ESERCIZI CONSIGLIATI

Potenziale elettrico

- Serway (3° Edizione) – Cap. 20
  - 1 – 3 – 5 – 7 – 9 – 11 – 13 – 23
- Halliday (5° Edizione) – Cap. 25
  - 3P – 5E – 7P – 13E – 15P – 17P – 19P – 23E

ESONERO 1 - ESERCIZIO 3

Esonero 1 - Esercizio 3 (7 punti)
Un campo elettrioo uniforme ha intensità 2 kN/C ed è diretto ed orientato lungo la direzione positiva dell'asse x. Una carica puntiforme $Q = 3\ \mu C$ viene abbondanata a sé stessa dalla condizione di quiete nell'origine.
a) Quanto vale l'energia cinetica della carica quando essa è nel punto x = 4 m?
b) Quanto vale la variazione di energia potenziale della carica da x=0 a x=4 m?
c) Quanto vale la differenza di potenziale V(4m) - V(0)?
(Risultato: a) $2.4{\cdot}10^{-2}$ J; b) $-2.4{\cdot}10^{-2}$ J; c) -8000 V)



- FORZA ELETTROSTATICA CHE AGISCE SULLA CARICA

$$\vec{F} = q\vec{E}$$

- LA VARIAZIONE DI ENERGIA CINETICA E' UGUALE AL LAVORO FATTO DAL CAMPO

$$L = \Delta K = K_{FIN} - K_{IN} = K_{FIN} - 0$$

$$L = \vec{F}\cdot\vec{s} = Fd = qEd = 3\cdot10^{-6}\cdot2\cdot10^{3}\cdot4 = \underline{24\cdot10^{-3}\ J}$$

LA VARIAZIONE DI ENERGIA POTENZIALE E' UGUALE AL LAVORO FATTO DA UNA FORZA OPPOSTA A QUELLA DEL CAMPO

$$\Delta U = U_{FIN} - U_{INIZ} = -\vec{F}\cdot\vec{s} = -Fd = -\Delta K = \underline{-24\cdot10^{-3}\ J}$$

(INFATTI L'ENERGIA MECCANICA SI CONSERVA

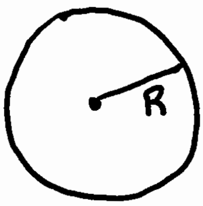
$$\Delta E = \Delta K + \Delta U = \Delta K - \Delta K = 0$$
)

- LA DIFFERENZA DI POTENZIALE E' UGUALE ALLA VARIAZIONE DI ENERGIA POTENZIALE PER UNITA' DI CARICA (1 C)

$$d.d.p = \Delta V = V_{FIN} - V_{INIZ} = \frac{\Delta U}{q} = -\frac{24\cdot10^{-3}}{3\cdot10^{-6}} = -8000\ V$$

PROBLEMA

QUANDO UNA NAVICELLA SPAZIALE SI MUOVE NEL GAS IONIZZATO RAREFATTO DELLA IONOSFERA TERRESTRE, IL SUO POTENZIALE VARIA TIPICAMENTE DI -1.0 V PER OGNI RIVOLUZIONE. ASSUMENDO CHE LA NAVICELLA SIA UNA SFERA DI RAGGIO 10 m, SI STIMI LA QUANTITA' DI CARICA CHE ESSA RACCOGLIE.



- LA CAPACITA' DI UNA SFERA CONDUTTRICE VALE

$$C = 4\pi\varepsilon_0 R = \frac{1}{9}\cdot 10^{-9}\cdot 10 \simeq 1.1 \text{ nF}$$

- VALE LA RELAZIONE

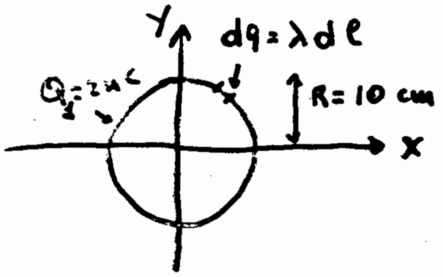
$$Q = C\cdot\Delta V = -1.1\cdot 10^{-9}\cdot 1 = -1.1 \text{ nC}$$

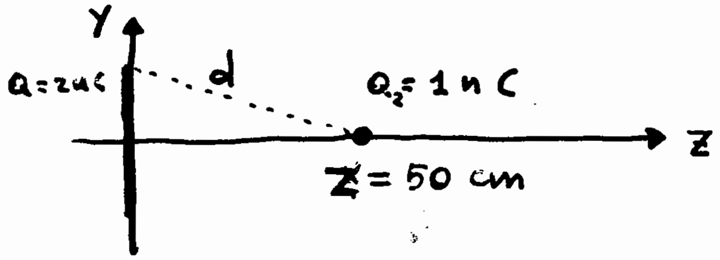
RACCOGLIE ELETTRONI

$$N = \frac{1.1\cdot 10^{-9}}{1.6\cdot 10^{-19}} \simeq 7\cdot 10^{9} \text{ elettroni}$$

PROBLEMA

UNA CARICA DI 2 nC E' DISTRIBUITA UNIFORMEMENTE LUNGO UN ANELLO (CORONA CIRCOLARE) DI RAGGIO 10 cm CHE HA IL CENTRO NELL'ORIGINE E L'ASSE LUNGO L'ASSE Z. UNA CARICA PUNTIFORME DI 1 nC E' COLLOCATA IN Z=50 cm SI TROVI IL LAVORO CHE SI DEVE COMPIERE PER SPOSTARE LA CARICA PUNTIFORME FINO ALL'ORIGINE, ESPRESSO IN JOULE E IN ELETTRONVOLT.





- CONSIDERIAMO IL POTENZIALE GENERATO DALLA CARICA INFINITESIMA $dq = \lambda dl$
  - $\lambda = \frac{Q_1}{2\pi R}$
- $d = \sqrt{R^2+z^2}$ [distanza della carica dq dal punto z]
- $dV = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq}{d}$; $V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^{2\pi R}\frac{dq}{d} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^{2\pi R}\frac{\lambda dl}{\sqrt{R^2+z^2}} =$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda}{\sqrt{R^2+z^2}}\int_0^{2\pi R} dl = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda 2\pi R}{\sqrt{R^2+z^2}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{\sqrt{R^2+z^2}}$$

L'ENERGIA POTENZIALE DELLA CARICA Q_2 NEL PUNTO $z = 50$ cm vale:

$$U(z=0.5m) = Q_2\cdot V(z=0.5m) = 10^{-9}\cdot 9\cdot 10^9\,\frac{2\cdot 10^{-9}}{\sqrt{0.1^2+0.5^2}} = 35.30\cdot 10^{-9}\ J$$

NEL PUNTO $x = 0$ SI HA:

$$U(z=0) = Q_2\cdot V(z=0) = 10^{-9}\cdot 9\cdot 10^9\cdot\frac{2\cdot 10^{-9}}{0.1} = 180\cdot 10^{-9}\ J$$

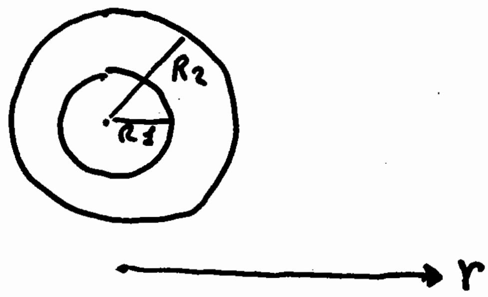
$$L = U(z=0) - U(z=0.5m) = 180\cdot 10^{-9} - 35.30\cdot 10^{-9} = 144.7\ nJ$$

- $\frac{144.7\cdot 10^{-9}}{1.6\cdot 10^{-19}} = 90.4\cdot 10^{10}\ eV$

PROBLEMA

UNA SFERA UNIFORMEMENTE CARICA DI RAGGIO R_1 E' RACCHIUSA DENTRO UNA SUPERFICIE SFERICA, AD ESSA CONCENTRICA DI RAGGIO R_2, MANTENUTA A POTENZIALE COSTANTE.
SAPENDO CHE LA d.d.p. TRA IL CENTRO DELLA SFERA INTERNA E LA SUPERFICIE ESTERNA E' V, CALCOLARE LA DENSITA' ρ DELLA CARICA CHE FORMA LA SFERA.

DATI: $R_1 = 2$ cm, $R_2 = 4$ cm, $V = 10^4$ V, $\varepsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12}$ F/m



- ALL' INTERNO DELLA SFERA CARICA IL CAMPO VALE:

$$E_1 = \frac{\rho}{3\varepsilon_0} r \qquad [r < R_1]$$

- FUORI DALLA SFERA SI HA:

$$E_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q}{r^2} \quad [R_1 < r < R_2] \quad ; \; Q = \rho \cdot V_1 = \rho \frac{4}{3}\pi R_1^3$$

$$E_2 = \frac{\rho}{3\varepsilon_0} \frac{R_1^3}{r^2}$$

$$\Delta V = \int_0^{R_2} \vec{E} \cdot d\vec{s} = \int_0^{R_1} \vec{E}_1 \cdot d\vec{s} + \int_{R_1}^{R_2} \vec{E}_2 \cdot d\vec{s} = \frac{\rho}{3\varepsilon_0} \left[\int_0^{R_1} r\,dr + R_1^3 \int_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{r^2} \right] =$$

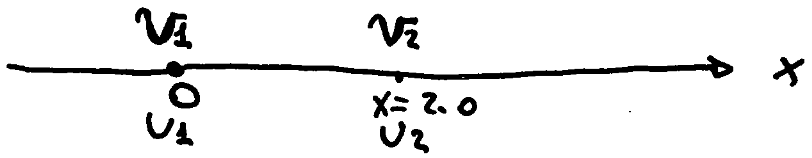
$$= \frac{\rho}{3\varepsilon_0} \left[\left(\frac{1}{2} r^2 \Big|_0^{R_1} \right) + R_1^3 \left(-\frac{1}{r} \Big|_{R_1}^{R_2} \right) \right] = \frac{\rho R_1^2}{3} \left[\frac{3}{2} - \frac{R_1}{R_2} \right]$$

- DA CUI SI RICAVA

$$\rho = \frac{3V \cdot \varepsilon_0}{R_1^2 \left(\frac{3}{2} - \frac{R_1}{R_2} \right)} = \frac{3 \cdot 8.86 \cdot 10^{-12} \cdot 10^4}{(2 \cdot 10^{-2})^2 \left(\frac{3}{2} - \frac{2}{4} \right)} = 6.64 \cdot 10^{-4} \frac{C}{m^3}$$

PROBLEMA 20.8 (SERWAY)

UN ELETTRONE CHE SI MUOVE PARALLELAMENTE ALL'ASSE X HA UNA VELOCITA' INIZIALE DI $3.70 \cdot 10^6$ m/s NELL'ORIGINE. LA SUA VELOCITA' SI RIDUCE A $1.40 \cdot 10^5$ m/s NEL PUNTO $x = 2.0$ cm. CALCOLARE LA d.d.p. FRA L'ORIGINE E IL PUNTO. QUALE PUNTO SI TROVA A POTENZIALE MAGGIORE?



- ENERGIA CINETICA NELL'ORIGINE

$$K_1 = \frac{1}{2} m V_1^2 = \frac{1}{2} \cdot 9.1 \cdot 10^{-31} \cdot (3.70 \cdot 10^6)^2 = 62.3 \cdot 10^{-19} J =$$

$$= \frac{62.3 \cdot 10^{-19}}{1.6 \cdot 10^{-19}} = 38.9 \ eV$$

- ENERGIA CINETICA IN $x = 2.0$ cm

$$K_2 = \frac{1}{2} m V_2^2 = \frac{1}{2} \cdot 9.1 \cdot 10^{-31} \cdot (1.4 \cdot 10^5)^2 = 8.9 \cdot 10^{-21} J = 5.6 \cdot 10^{-2} eV$$

- LA DIMINUZIONE DI ENERGIA CINETICA DEVE ESSERE COMPENSATA DALL'AUMENTO DI ENERGIA POTENZIALE

$$K_1 + U_1 = K_2 + U_2 \Rightarrow U_2 - U_1 = K_1 - K_2$$

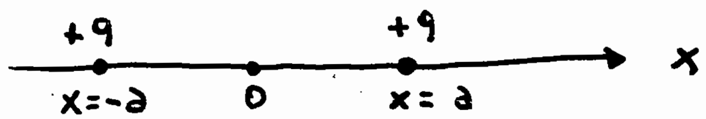
$$U_2 - U_1 = K_1 - K_2 = 38.9 \ eV - 5.6 \cdot 10^{-2} eV \simeq 38.8 \ eV$$

$$d.d.p = \frac{\Delta U}{q} = \frac{38.8 \ eV}{-e} = -38.8 \ V$$

- E' MAGGIORE IL POTENZIALE NELL'ORIGINE

PROBLEMA

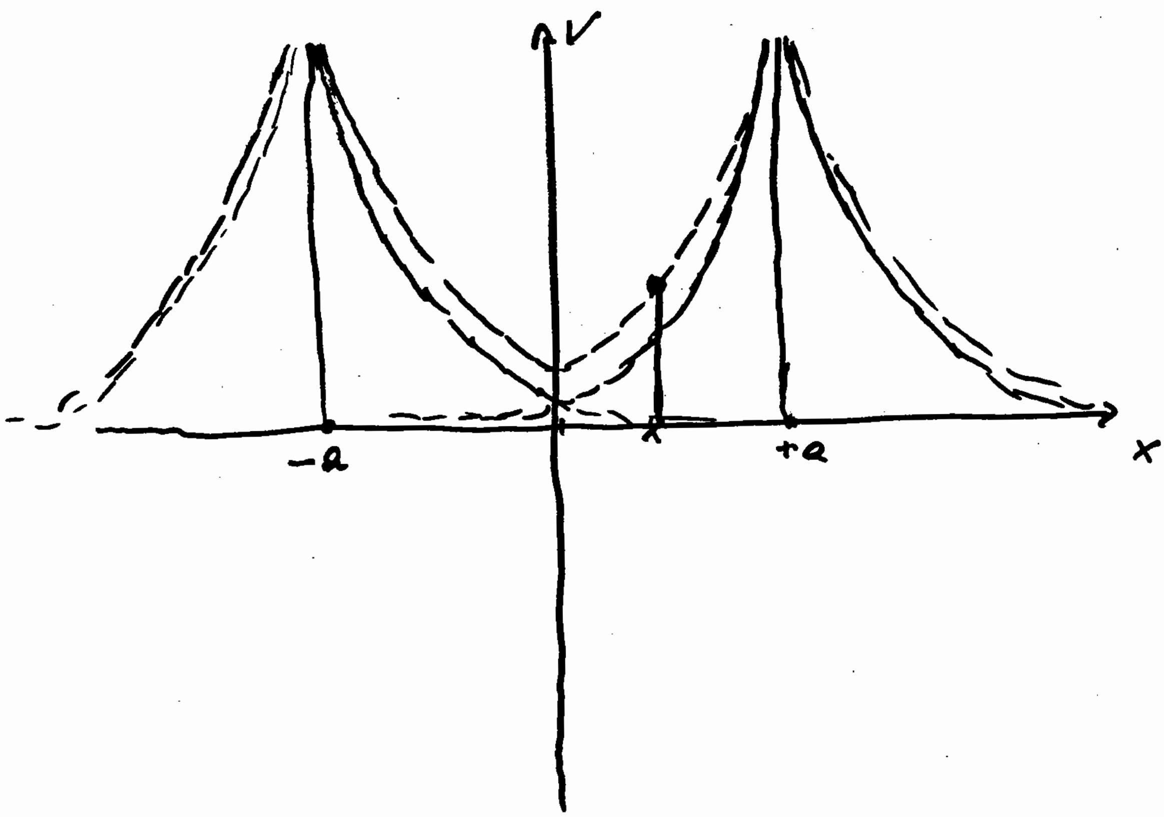
DUE CARICHE POSITIVE $+q$ SONO SULL'ASSE X IN $x = +a$ E $x = -a$. a) SI TROVI IL POTENZIALE $V(x)$ IN FUNZIONE DI X PER I PUNTI SULL'ASSE X. b) SI RAPPRESENTI GRAFICAMENTE $V(x)$ IN FUNZIONE DI X. c) SPIEGARE IL SIGNIFICATO DEL MINIMO DELLA CURVA TRACCIATA.



- IL POTENZIALE E' DATO DALLA SOMMA DEI DUE POTENZIALI

$$V_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{|x-a|} \quad ; \quad V_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{|x+a|}$$

$$V(x) = V_1 + V_2 = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{|x-a|} + \frac{1}{|x+a|}\right)$$

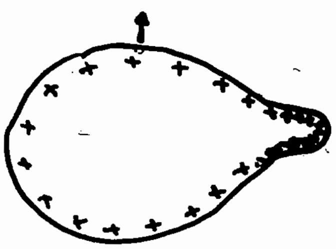


CONDUTTORI

IN UN CONDUTTORE LE CARICHE ELETTRICHE POSSONO MUOVERSI LIBERAMENTE AL SUO INTERNO.

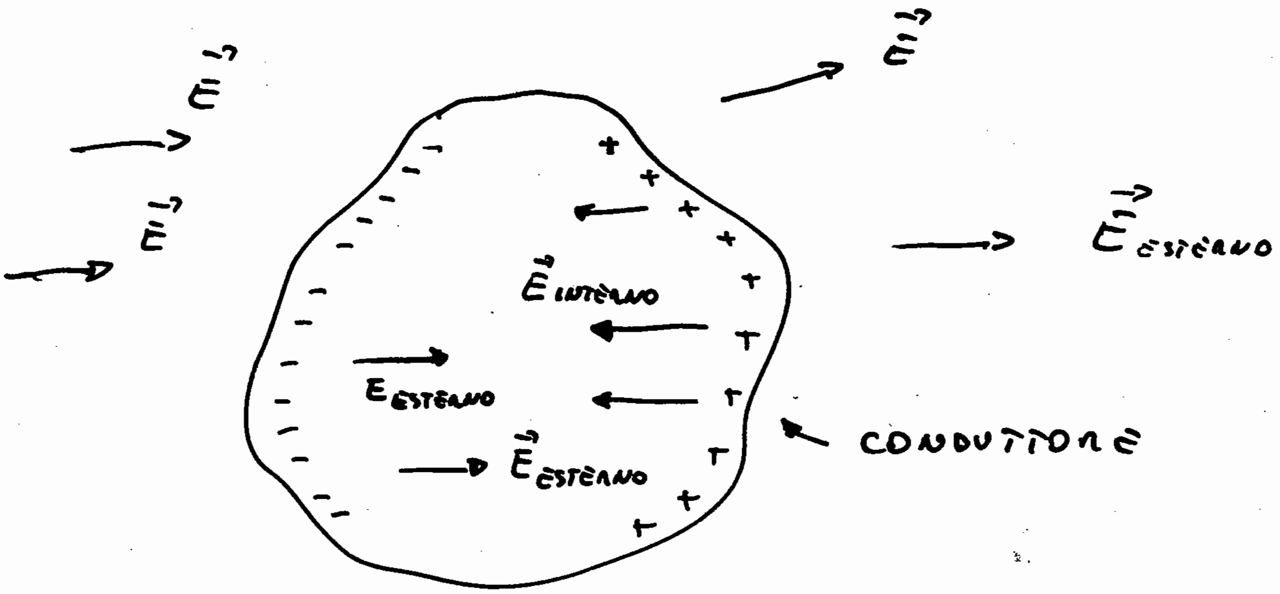
- IN UN CONDUTTORE IN EQUILIBRIO ELETTROSTATICO NON C'E' NESSUN MOVIMENTO DI CARICA
- TALE CONDUTTORE POSSIEDE LE SEGUENTI PROPRIETA':

- IL CAMPO ELETTRICO ALL'INTERNO DI ESSO E' NULLO OVUNQUE
- UN QUALUNQUE ECCESSO DI CARICA SU UN CONDUTTORE ISOLATO DEVE RISIEDERE UNICAMENTE SULLA SUA SUPERFICIE ESTERNA
- IL CAMPO ELETTRICO IN UN PUNTO APPENA AL DI FUORI DI UN CONDUTTORE CARICO E' PERPENDICOLARE ALLA SUPERFICIE E HA MODULO σ/ε_0. (teorema di Coulomb)
- SU UN CONDUTTORE DI FORMA IRREGOLARE, LA CARICA TENDE AD ACCUMULARSI IN PUNTI IN CUI LA CURVATURA E' MAGGIORE (effetto delle punte)



CONDUTTORI:

$\vec{E}$ NULLO ALL'INTERNO



- PONIAMO UN CONDUTTORE IN UN CAMPO $\vec{E}$ ESTERNO
- GLI ELETTRONI ALL'INTERNO SENTIRANNO LA FORZA

$$\vec{F} = -q_e \cdot \vec{E}$$

E QUINDI SI SPOSTERANNO

COSÌ FACENDO SI CREA UN'ASIMMETRIA DI CARICA ALL'INTERNO DEL CONDUTTORE CHE GENERA A SUA VOLTA UN CAMPO $\vec{E}$ "INTERNO"

GLI ELETTRONI SI "RIARRANGIANO" FINO A QUANDO SU DI ESSI NON VI SARÀ PIÙ NESSUNA FORZA CHE LI FA MUOVERE (EQUILIBRIO ELETTROSTATICO)

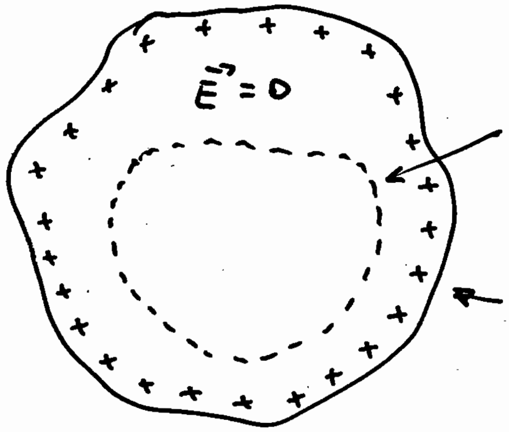
$$\vec{F} = -q_e \cdot \vec{E} = -q_e \left(\vec{E}_{ESTERNO} + \vec{E}_{INTERNO} \right) = 0$$

QUINDI $\vec{E} = \vec{E}_{ESTERNO} + \vec{E}_{INTERNO} = 0$

N.B. LA CONDIZIONE $\vec{E} = 0$ SI OTTIENE QUASI ISTANTANEAMENTE

CONDUTTORI :

CARICA SULLA SUPERFICIE ESTERNA



- METTIAMO UNA CARICA Q SU UN CONDUTTORE ISOLATO.
- LA CARICA SI RIDISTRIBUISCE IN MODO DA AVERE $\vec{E} = 0$ ALL'INTERNO
- SCEGLIAMO UNA SUPERFICIE CHIUSA QUALSIASI ALL'INTERN. DEL CONDUTTORE SULLA QUALE APPLICARE IL TEOREMA DI GAUSS

$$\Phi_s(\vec{E}) = \frac{q_{interne}}{\varepsilon_0}$$

$$\Phi_s(\vec{E}) = \int_{S_{chiusa}} \vec{E} \cdot \hat{n} \, dS = 0 \quad [\text{dato che } \vec{E} = 0]$$

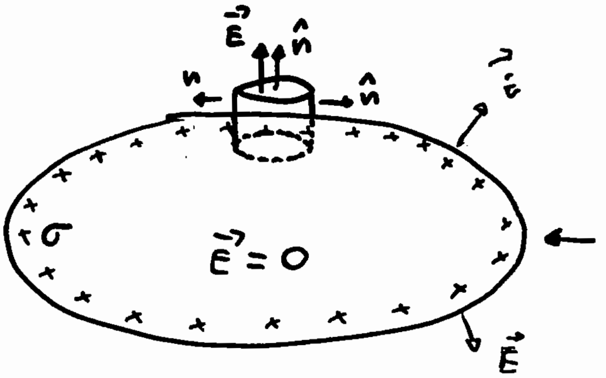
- NE CONSEGUE CHE ANCHE

$$q_{INTERNA} = 0$$

QUINDI LA CARICA NON PUO' CHE DISPORSI SULLA SUPERFICIE ESTERNA

CONDUTTORI:

TEOREMA DI COULOMB



- PRENDIAMO UN CONDUTTORE CHE ABBIA UNA DENSITA' SUPERFICIALE DI CARICA σ

- SE IL CAMPO $\vec{E}$ SULLA SUPERFICIE DEL CONDUTTORE AVESSE UNA COMPONENTE PARALLELA ALLA SUPERFICIE, ALLORA CI SAREBBE SULLE CARICHE UNA FORZA $\vec{F}_{\parallel} = q \cdot \vec{E}_{\parallel}$ CHE LE FAREBBE MUOVERE. DATO CHE IL CONDUTTORE E' IN EQUILIBRIO ELETTROSTATICO ALLORA $\vec{E}$ DEVE ESSERE PERPENDICOLARE

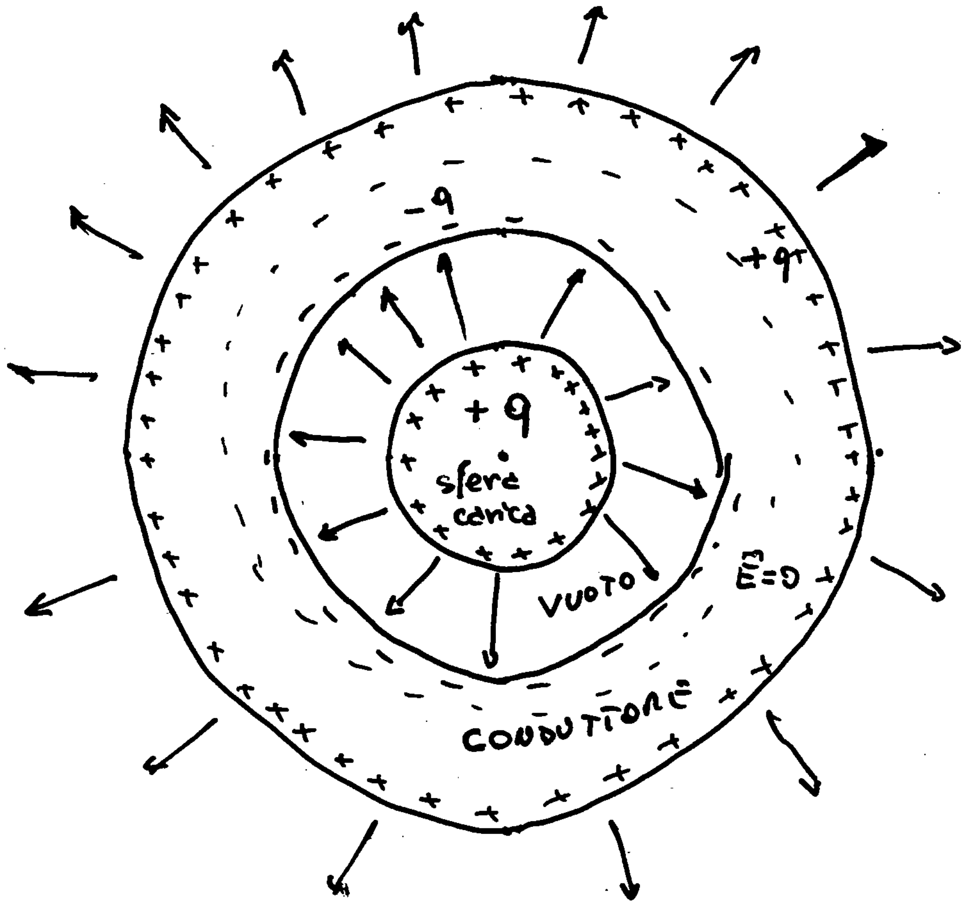
APPLICHIAMO IL TEOREMA DI GAUSS AD UN CILINDRETTO AVENTE SUPERFICIE DI BASE S

$$\Phi_S(\vec{E}) = \underbrace{0}_{\text{base interna}} + \underbrace{0}_{\text{superficie laterale}} + \underbrace{|E| \cdot S}_{\text{base esterna}}$$

$$\Phi_S(\vec{E}) = \frac{Q_{interna}}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma \cdot S}{\varepsilon_0}$$

$$\Rightarrow \quad |E| \cdot S = \frac{\sigma \cdot S}{\varepsilon_0} \quad \Rightarrow \boxed{|\vec{E}| = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}}$$

SFERA CAVA
(INDUZIONE ELETTROSTATICA)

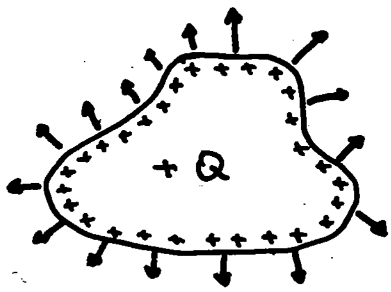


- PRENDIAMO UNA SFERA CONDUTTRICE SCARICA CON ALL'INTERNO UNA CAVITA'.
- METTIAMO ALL'INTERNO DELLA CAVITA' UNA SFERA CONDUTTRICE CARICA CON CARICA +q.
- SULLA SFERA CAVA LE CARICHE SI RIDISTRIBUIRANNO IN MODO DA AVERE $\vec{E}=0$ AL SUO INTERNO.
- SULLA FACCIA INTERNA COMPARE UNA CARICA −q

$$0 = \Phi_s(\vec{E}) = \frac{q_{interna}}{\varepsilon_0} = \frac{+q-q}{\varepsilon_0} = 0$$

- SULLA FACCIA ESTERNA COMPARE LA CARICA +q

POTENZIALE DI UN CONDUTTORE CARICO



- IL CAMPO $\vec{E}$ ALL'INTERNO DI UN CONDUTTORE E' NULLO
- IL CAMPO $\vec{E}$ ESTERNO E' ORTOGONALE ALLA SUPERFICIE

- CALCOLIAMO LA d.d.p. TRA DUE PUNTI SULLA SUPERFICIE

$$\Delta V = V_B - V_A = -\int_A^B \vec{E}\cdot d\vec{s} = 0 \quad [\ \vec{E}\cdot d\vec{s} = 0\ ]$$

$\Rightarrow$ I PUNTI SULLA SUPERFICIE DEL CONDUTTORE HANNO TUTTI LO STESSO POTENZIALE

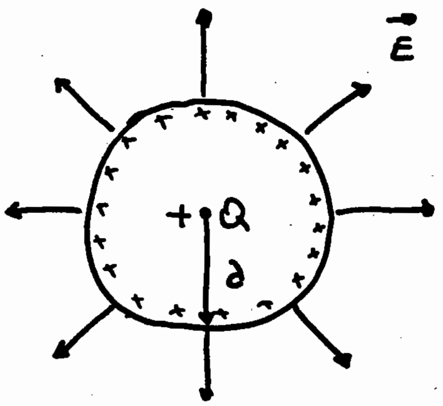
- DATO CHE $\vec{E} = 0$ PER OGNI PUNTO ALL'INTERNO DEL CONDUTTORE, ALLORA TUTTI QUESTI PUNTI HANNO LO STESSO POTENZIALE DELLA SUPERFICIE

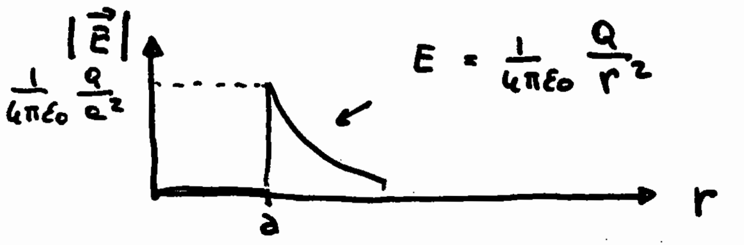
- QUALUNQUE SIA LA FORMA DEL CONDUTTORE, TUTTI I PUNTI DELLO STESSO HANNO LO STESSO POTENZIALE

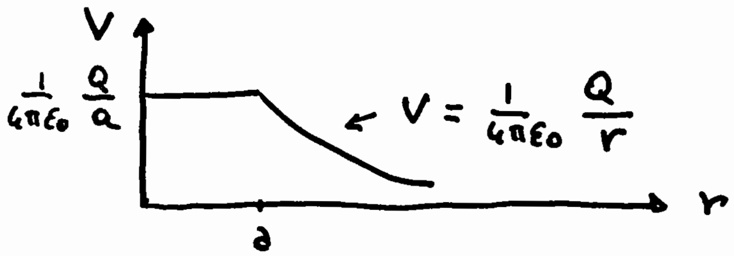
- IL RISULTATO È VALIDO ANCHE PER UNA CAVITA' CONTENUTA ALL'INTERNO DEL CONDUTTORE (GABBIA DI FARADAY)

D

POTENZIALE DI UNA SFERA CONDUTTRICE CARICA







- POTENZIALE DELLA SFERA

$$V(r=a) = -\int_{\infty}^{a} \vec{E}\cdot d\vec{s} = -\int_{\infty}^{a} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}\,dr =$$

$$= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left.\frac{1}{r}\right|_{\infty}^{a} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{a}$$

- $V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 \cdot a}\cdot Q$ IL POTENZIALE DELLA SFERA È PROPORZIONALE ALLA CARICA POSSEDUTA.

- CAPACITÀ DEL CONDUTTORE

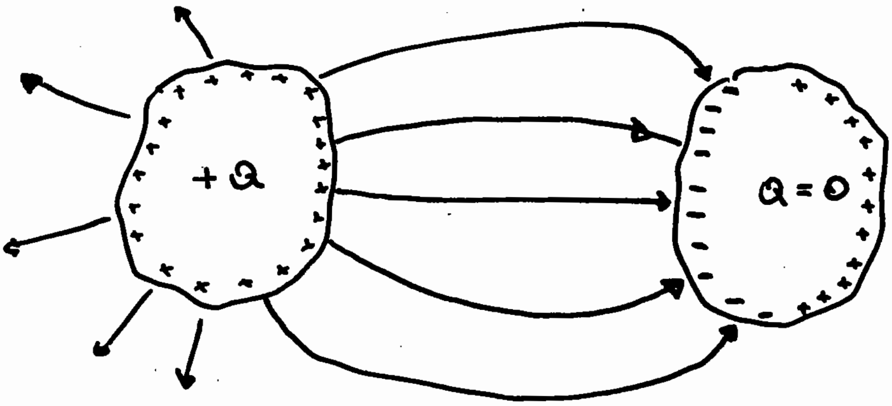
$$C = \frac{Q}{V}$$

- PER LA SFERA SI HA:

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{Q}{\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{a}} = 4\pi\varepsilon_0\cdot a$$ [dipende solo dalla geometri[a] del conduttore

CONDENSATORE

- PRENDIAMO DUE CONDUTTORI QUALSIASI :

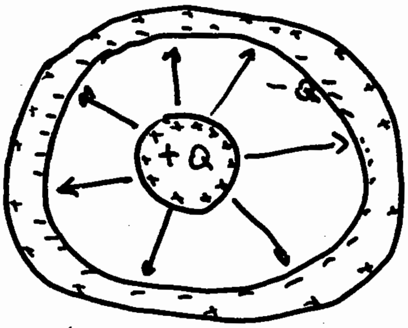


- UNA PARTE DELLE LINEE DI FORZA CHE ESCONO DAL PRIMO CONDUTTORE FINISCONO SUL SECONDO PROVOCANDO UNO SPOSTAMENTO DI CARICHE (INDUZIONE ELETTROSTATICA)

- NEL CASO IN CUI TUTTE LE LINEE DI FORZA CHE ESCONO DAL PRIMO CONDUTTORE FINISCONO SUL SECONDO, SI HA L'INDUZIONE COMPLETA.

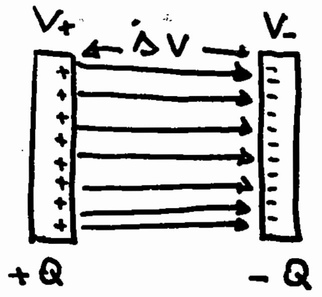
- SI DICE ALLORA CHE I DUE CONDUTTORI COSTITUISCONO LE ARMATURE DI UN CONDENSATORE

- LE CARICHE PRESENTI SULLE DUE ARMATURE HANNO LO STESSO MODULO MA SEGNI DIVERSI



ESEMPIO : CONDENSATORE SFERICO

CAPACITA' DEL CONDENSATORE



- TRA LE DUE ARMATURE VI E' INDUZIONE COMPLETA
- LE CARICHE SULLE DUE ARMATURE SONO UGUALI (IN MODULO)

- IL CONDUTTORE CON CARICA $+Q$ HA POTENZIALE V_+
  " " " " $-Q$ " " V_-

- TRA LE DUE ARMATURE VI E' UNA DIFFERENZA DI POTENZIALE $\Delta V = V_+ - V_-$

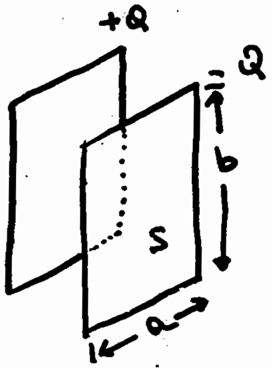
- SI DEFINISCE LA CAPACITA' DEL CONDENSATORE COME:

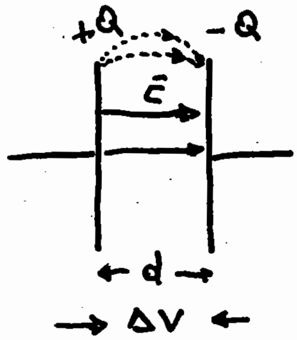
$$C = \frac{Q}{|\Delta V|}$$

- LA CAPACITA' C E' INDIPENDENTE DALLA CARICA E DALLA d.d.p., MA DIPENDE SOLO DALLA GEOMETRIA DELLE ARMATURE, DALLA POSIZIONE RECIPROCA E DAL MATERIALE TRA LE ARMATURE

- LA CAPACITA' SI MISURA IN COULOMB / VOLT = FARAD
- IL FARAD [F] E' UN'UNITA' DI MISURA MOLTO GRANDE

CONDENSATORE PIANO





- CONSIDERIAMO DUE SUPERFICI PIANE DI AREA S DISTANTI d
- SU UN'ARMATURA ABBIAMO LA CARICA +Q E SULL'ALTRA -Q
- LA DENSITA' DI CARICA VALE $\sigma = \frac{Q}{S}$
- FACCIAMO L'APPROSSIMAZIONE DI PIANO INFINITO; E' VALIDA SE $d \ll a$; $d \ll b$
- IL CAMPO ELETTRICO VALE $E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$ TRA LE DUE ARMATURE E ZERO FUORI.
- TRASCURIAMO GLI EFFETTI AI BORDI (ASSUMIAMO $\vec{E}$ UNIFORME)

$$\Delta V = E \cdot d = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \cdot d = \frac{Q}{S}\frac{d}{\varepsilon_0}$$

- LA CAPACITA' DEL CONDENSATORE VALE:

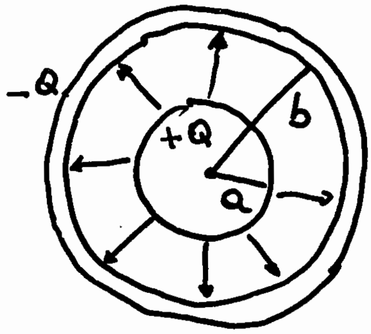
$$C = \frac{Q}{\Delta V} = \frac{Q}{Q\frac{d}{S\varepsilon_0}} = \varepsilon_0 \frac{S}{d}$$

$$\boxed{C = \varepsilon_0 \frac{S}{d}}$$

dipende solo dalla geometria dei conduttori

CONDENSATORE CILINDRICO

UN CONDUTTORE CILINDRICO DI RAGGIO a E CARICA $+Q$ E' CONTENUTO IN UN'ALTRA ARMATURA CILINDRICA COASSIALE DI RAGGIO INTERNO b E CARICA $-Q$. CALCOLARE LA CAPACITA' DI QUESTO CONDENSATORE CILINDRICO, SAPENDO CHE LA SUA LUNGHEZZA E' ℓ.



- SE $a \ll \ell$; $b \ll \ell$ possiamo fare l'ipotesi di filo infinito

- IL CAMPO $\vec{E}$ TRA LE DUE ARMATURE VALE:

$$E = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda}{r} = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{\ell}\frac{1}{r}$$

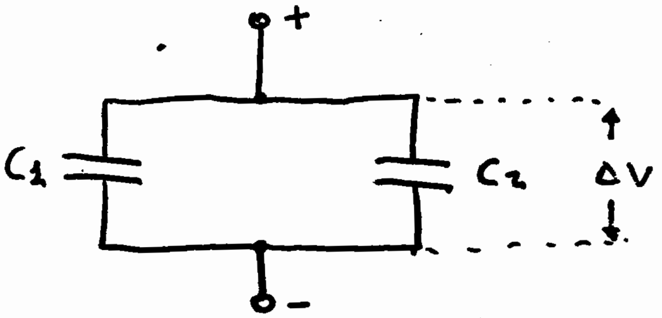
$$V_A - V_B = \int_a^b \vec{E}\cdot d\vec{s} = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{\ell}\int_a^b \frac{1}{r}\,dr = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{\ell}\ln r\Big|_a^b =$$

$$= \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{\ell}\ln\frac{b}{a}$$

- PER DEFINIZIONE $C = \frac{Q}{|\Delta V|}$

$$C = \frac{Q}{\frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 \ell}\ln\frac{b}{a}} = \varepsilon_0 \frac{2\pi\ell}{\ln\frac{b}{a}}$$

CONDENSATORI IN PARALLELO



- LA d.d.p. ΔV AI CAPI DI CIASCUN CONDENSATORE È LA STESSA: LE ARMATURE DEI DUE CONDENSATORI SONO COLLEGATE TRAMITE UN FILO CONDUTTORE, QUINDI DIVENTANO UN UNICO CONDUTTORE E DEVONO AVERE LO STESSO POTENZIALE.

- SIA Q_1 E Q_2 LA CARICA DI C_1 E C_2

$$Q_1 = C_1 \Delta V \quad ; \quad Q_2 = C_2 \Delta V$$

LA CARICA TOTALE CONTENUTA NEL SISTEMA DEI DUE CONDENSATORI:

$$Q_{TOT} = Q_1 + Q_2 = C_1 \Delta V + C_2 \Delta V = (C_1 + C_2) \Delta V$$

QUINDI I DUE CONDENSATORI EQUIVALGONO AD UN UNICO CONDENSATORE DI CAPACITA' EQUIVALENTE:

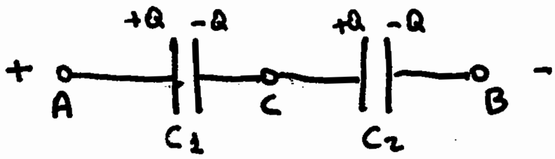
$$C_{eq} = \frac{Q_{TOT}}{\Delta V} = \frac{(C_1 + C_2)\Delta V}{\Delta V} = C_1 + C_2$$

LE CAPACITA' DI CONDENSATORI IN PARALLELO SI SOMMANO.

NEL CASO DI n CONDENSATORI IN PARALLELO SI HA:

$$C_{eq} = \sum_{1}^{n} {}_i\, C_i = C_1 + C_2 + \cdots + C_n$$

CONDENSATORI IN SERIE



- NEL CASO DI CONDENSATORI IN SERIE LA CARICA SU CIASCUNA ARMATURA DEL CONDENSATORE (IN MODULO) È LA STESSA.

- LA d.d.p. V_{AB} È UGUALE A:

$$V_{AB} = V_A - V_B = \underbrace{V_A - V_C}_{\Delta V_1} + \underbrace{V_C - V_B}_{\Delta V_2}$$

- $\Delta V_1 = \dfrac{Q}{C_1}$; $\Delta V_2 = \dfrac{Q}{C_2}$

QUINDI:

$$V_{AB} = \Delta V_{TOT} = \Delta V_1 + \Delta V_2 = \frac{Q}{C_1} + \frac{Q}{C_2} = Q\left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}\right)$$

IL SISTEMA DI DUE CONDENSATORI IN SERIE È EQUIVALENTE A:

$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{\Delta V_{TOT}}{Q} = \frac{Q}{Q}\left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}\right) = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$$

$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} = \frac{C_1 + C_2}{C_1 \cdot C_2} \Rightarrow \boxed{C_{eq} = \frac{C_1 \cdot C_2}{C_1 + C_2}}$$

N.B. $C_{eq} < C_1$; $C_{eq} < C_2$

NEL CASO DI n CONDENSATORI IN SERIE SI HA:

$$\frac{1}{C_{eq}} = \sum_{1}^{n} {}_i \frac{1}{C_i} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \dots + \frac{1}{C_n}$$

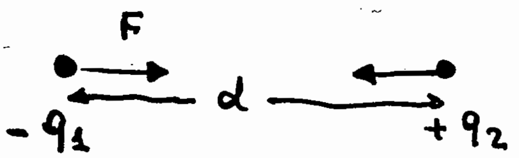
ESERCIZI CONSIGLIATI

Conduttori e circuiti con condensatori

- Serway (3° Edizione) – Cap. 20
  - 31 – 33 – 35 – 39 – 41 – 43 – 45
- Halliday (5° Edizione) – Cap. 25
  - 45E – 47P – 49P
- Halliday (5° Edizione) – Cap. 26
  - 1E – 3E – 5E – 7E – 11E – 13E – 17P – 19P – 21P

PROVA SCRITTA - 15 MARZO 1990

DUE CONDUTTORI PUNTIFORMI, DI CARICA $q_1 = -10 \cdot 10^{-6}$ C E $q_2 = 6 \cdot 10^{-6}$ C, SONO POSTI A 40 cm DI DISTANZA. SI DETERMINI L'INTENSITA', LA DIREZIONE E IL VERSO DELLA FORZA TRA I DUE. I DUE CONDUTTORI VENGONO QUINDI PORTATI A CONTATTO, E POI DI NUOVO ALLONTANATI ALLA DISTANZA ORIGINARIA. SI DETERMINI ANCORA L'INTENSITA', LA DIREZIONE E IL VERSO DELLA FORZA NEL NUOVO CASO



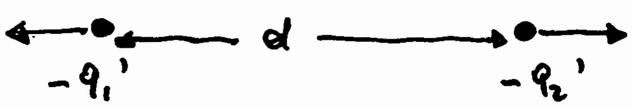
la forza e' attrattiva

$$|\vec{F}| = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 \cdot q_2}{d^2} = 9 \cdot 10^9 \, \frac{10 \cdot 10^{-6} \cdot 6 \cdot 10^{-6}}{0.4^2} = 3.375 \text{ N}$$

QUANDO I DUE CONDUTTORI VENGONO MESSI A CONTATTO LA CARICA SI RIDISTRIBUISCE IN MODO CHE I DUE CONDUTTORI ABBIANO LO STESSO POTENZIALE.

IN QUESTO CASO LA CARICA SARA' LA STESSA

$$q_1' = q_2' = \frac{q_1 + q_2}{2} = \frac{-10 \cdot 10^{-6} + 6 \cdot 10^{-6}}{2} = -2 \cdot 10^{-6} \text{ C}$$

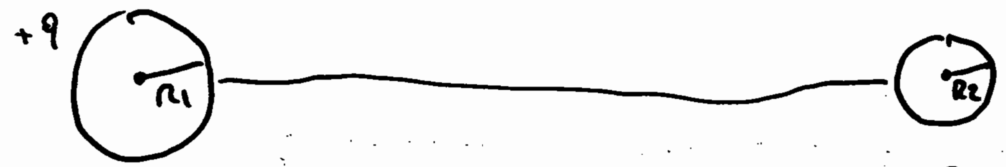


la forza e' repulsiva

$$|\vec{F}| = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1' \cdot q_2'}{d^2} = 9 \cdot 10^9 \, \frac{+2 \cdot 10^{-6} \cdot 2 \cdot 10^{-6}}{0.4^2} = 0.225 \text{ N}$$

PROBLEMA

UNA SFERA CONDUTTRICE DI RAGGIO $R_1 = 1m$ HA UNA CARICA ELETTRICA $q = 3 \cdot 10^{-9} C$. LA SFERA VIENE CONNESSA AD UNA SFERA CONDUTTRICE PIU' PICCOLA E SCARICA, AVENTE RAGGIO $R_2 = 0.5 m$, PER MEZZO DI UN FILO CONDUTTORE DI CAPACITA' TRASCURABILE.
LA DISTANZA TRA LE DUE SFERE E' GRANDE, TALE DA POTER TRASCURARE EFFETTI DI INDUZIONE ELETTROSTATICA.
DETERMINARE LA CARICA DI CIASCUNA SFERA DOPO IL COLLEGAMENTO



$C_2 = 4\pi\varepsilon_0 R_2$

$C_1 = 4\pi\varepsilon_0 R_1$

- PRIMA DEL COLLEGAMENTO

$q_1 = q$ $\qquad\qquad$ $q_2 = 0$

$V_1 = q_1/C_1 = \frac{q}{C_1}$ $\qquad\qquad$ $V_2 = q_2/C_2 = 0$

- DOPO IL COLLEGAMENTO IL POTENZIALE DELLE DUE SFERE DEVE ESSERE LO STESSO (SONO UN UNICO CONDUTTORE)

q_1 $\qquad\qquad$ q_2

$V_1 = \frac{q_1}{C_1}$ $\qquad\qquad$ $V_2 = \frac{q_2}{C_2}$

$$\begin{cases} q_1 + q_2 = q & \rightarrow \text{la carica si conserva} \\ \frac{q_1}{C_1} = \frac{q_2}{C_2} \end{cases}$$

- RISOLVENDO IL SISTEMA SI HA:

$q_1 = \frac{C_1}{C_1 + C_2} q$ $\qquad\qquad$ $q_2 = \frac{C_2}{C_1+C_2} q$

$C_1 = 4\pi\varepsilon_0 R_1 = \frac{1}{9} \cdot 10^{-9} \cdot 1 = \frac{1}{9} u F$; $C_2 = 4\pi\varepsilon_0 R_2 = \frac{1}{9} \cdot 10^{-9} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{18} u F$

$q_1 = \frac{2/18}{3/18} \cdot 3 \cdot 10^{-9} = 2 nC$; $q_2 = q - q_1 = 1 nC$

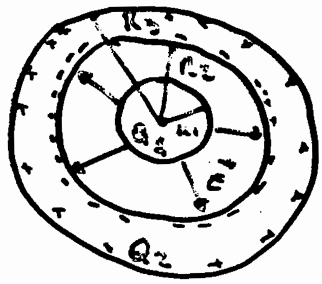
PROBLEMA

UNA SFERA CONDUTTRICE DI RAGGIO $R_1 = 5$ cm PORTA UNA CARICA $Q_1 = +10^{-6}$ C. UN GUSCIO SFERICO (SFERA CAVA) PURE CONDUTTORE, CONCENTRICO ALLA SFERA DI RAGGIO R_1, AVENTE RAGGIO INTERNO $R_2 = 10$ cm E RAGGIO ESTERNO $R_3 = 12$ cm, E' CARICATO CON CARICA $Q_2 = 10\,Q_1$.

CALCOLARE, NELL' IPOTESI CHE IL SISTEMA SIA NEL VUOTO:

a) LA DENSITA' DI CARICA SUPERFICIALE σ_2 SULLA SUPERFICIE INTERNA DEL GUSCIO SFERICO ESTERNO (DI RAGGIO R_2)

b) LA d.d.p. $(V_1 - V_2)$ TRA I DUE CONDUTTORI CONSIDERATI



$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_1}{r^2}\hat{r}$$

- TRA I DUE CONDUTTORI VI E' INDUZIONE COMPLETA.

  SULLA FACCIA INTERNA SI INDUCE LA CARICA $-Q_1$

  (MENTRE SU QUELLA ESTERNA VI E' LA CARICA $Q_2 + Q_1$)

$$\sigma_2 = -\frac{Q_1}{4\pi R_2^2} = -\frac{10^{-6}}{4\pi\cdot 0.1^2} = -7.96\cdot 10^{-6}\ \mathrm{C/m^2}$$

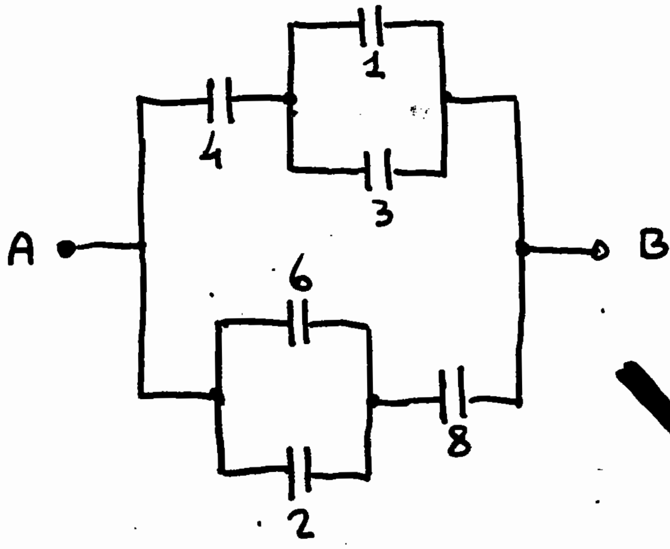
- IL CAMPO $\vec{E}$ TRA I DUE CONDUTTORI VALE $\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_1}{r^2}\hat{r}$

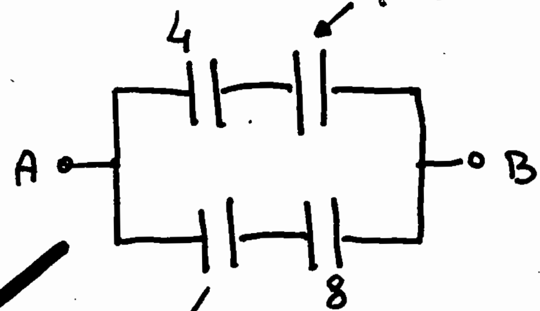
$$V_1 - V_2 = \int_{R_1}^{R_2} \vec{E}\cdot d\vec{e} = \int_{R_1}^{R_2} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_1}{r^2}\,dr = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{R_1}^{R_2}\frac{dr}{r^2} = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0}\left(-\frac{1}{r}\Big|_{R_1}^{R_2}\right) =$$

$$= \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) = 9\cdot 10^9\cdot 10^{-6}\left(\frac{1}{0.05} - \frac{1}{0.1}\right) = \underline{9\cdot 10^4\ \mathrm{V}}$$

CIRCUITO CON CONDENSATORI

• LE CAPACITA' SONO ESPRESSE IN μF

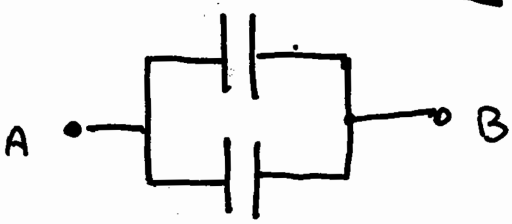




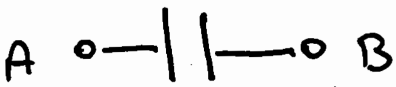
$4 = 1 + 3$

$8 = 6 + 2$

$2 = \frac{4 \cdot 4}{4 + 4} = \frac{4}{2}$



$4 = \frac{8 \cdot 8}{8 + 8} = \frac{8}{2}$

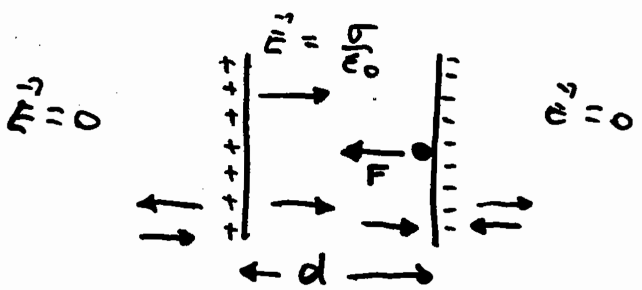


$C_{eq} = 4 + 2 = 6\ \mu F$

IL CIRCUITO DI 6 CONDENSATORI E' EQUIVALENTE AD UN UNICO CONDENSATORE DI CAPACITA' EQUIVALENTE PARI A $6\ \mu F$

PROVA SCRITTA - 20 APRILE 1999

DUE LASTRE DI METALLO AFFACCIATE, POSTE ALLA DISTANZA DI 10 cm, SONO CARICATE CON UNA DENSITA' DI CARICA UNIFORME ED OPPOSTA, PARI (IN MODULO) A 10^{-8} C/m². UN ELETTRONE (DI CARICA $e = -1.6 \cdot 10^{-19}$ C E MASSA $m = 9.1 \cdot 10^{-31}$ Kg) SI TROVA IN QUIETE IN PROSSIMITA' DELLA LASTRA CARICA NEGATIVAMENTE. CON QUALE VELOCITA' COLPIRA' LA LASTRA A CARICA POSITIVA? DOPO QUANTO TEMPO?



ipotesi di lastre infinite (condensatore piano)

- OGNI LASTRA PRODUCE NELLO SPAZIO IL CAMPO $\vec{E} = \frac{1}{2}\frac{\sigma}{\varepsilon_0}$
  IL CAMPO E' NULLO FUORI DALLE ARMATURE E VALE $\vec{E} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$ TRA LE ARMATURE DIRETTO DALLA LASTRA POSITIVA A QUELLA NEGATIVA.

- LA FORZA SULL'ELETTRONE VALE $\vec{F} = -e\vec{E}$ DIRETTA IN VERSO OPPOST.

$$L = \vec{F}\cdot\vec{S} = eEd = \Delta K = \frac{1}{2} m v^2$$

$$v = \sqrt{\frac{2eEd}{m}} = \sqrt{\frac{2 * 1.6 * 10^{-19} * 10^{-8} * 0.1}{9.1 * 10^{-31} * 8.85 * 10^{-12}}} = \sqrt{\frac{2 * 1.6 * 0.1}{9.1 * 8.85} \cdot 10^{-19-8+31+12}}$$

$$v = 0.063 \cdot 10^{8} = 6.3 \cdot 10^{6} \text{ m/s} \quad < \quad c = 3 \cdot 10^{8} \text{ m/s}$$

- IL MOTO E' UNIFORMEMENTE ACCELERATO, QUINDI

$$S = \frac{1}{2} a t^2 \quad \Rightarrow \quad t = \sqrt{\frac{2S}{a}} \quad ; \quad a = \frac{F}{m} = \frac{eE}{m}$$

$$a = \frac{eE}{m} = \frac{e\sigma}{m\varepsilon_0} = \frac{1.6 * 10^{-19} * 10^{-8}}{9.1 \cdot 10^{-31} * 8.85 \cdot 10^{-12}} = \frac{1.6}{9.1 * 8.85} \cdot 10^{-19-8+31+12} = 1.99 \cdot 10^{14} \text{ m/s}^2$$

$$t = \sqrt{\frac{2S}{a}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 0.1}{1.99 \cdot 10^{14}}} = 3.2 \cdot 10^{-8} \text{ s} = \underline{32 \text{ ns}}$$

ENERGIA ELETTROSTATICA

- SUPPONIAMO DI AVERE DUE CARICHE q_1 E q_2 POSTE ALL'INFINITO E DI VOLERLE PORTARE NEI PUNTI $\vec{r_1}$ E $\vec{r_2}$

- SPOSTIAMO q_1 IN $\vec{r_1}$. NON C'È NESSUN CAMPO $\vec{E}$, QUINDI IL LAVORO FATTO È ZERO.

- SPOSTIAMO LA CARICA q_2 IN $\vec{r_2}$.
DOBBIAMO FARE UN LAVORO CONTRO IL CAMPO CREATO DA q_1.

$$\vec{E_1} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1}{r'^2}\hat{r}' \qquad [\ \vec{r}' = \vec{r} - \vec{r_1}$$

$$L = -\int_{\infty}^{\vec{r_2}} q_2 \cdot \vec{E_1} \cdot d\vec{s} = -\int_{\infty}^{\vec{r_2}} q_2 \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1}{r'^2}\hat{r}' \cdot d\vec{s} =$$

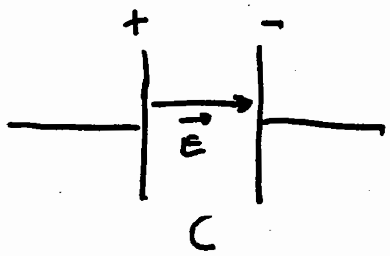
$$= -\frac{q_1 \cdot q_2}{4\pi\varepsilon_0}\left(-\frac{1}{r'}\Big|_{\infty}^{\vec{r_2}}\right) = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{|\vec{r_2} - \vec{r_1}|} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 r_{12}}$$

- SE $q_1 \cdot q_2 > 0 \Rightarrow L$ È POSITIVO

- PER COSTRUIRE IL SISTEMA DI DUE CARICHE SI COMPIE UN LAVORO CHE VIENE IMMAGAZZINATO COME ENERGIA ELETTROSTATICA DEL SISTEMA.

- SE LE DUE CARICHE VENGONO LASCIATE LIBERE, SI RIPORTANO ALL'INFINITO RESTITUENDO L'ENERGIA

ENERGIA IMMAGAZZINATA IN UN CONDENSATORE



- PRENDIAMO UN CONDENSATORE DI CAPACITA' C
- PRENDIAMO UNA CARICA ELEMENTARE dQ E SPOSTIAMOLA DA UN'ARMATURA ALL'ALTRA
- SE LA d.d.p. TRA LE ARMATURE È V, LA VARIAZIONE DI ENERGIA POTENZIALE DELLA CARICA dq VALE:

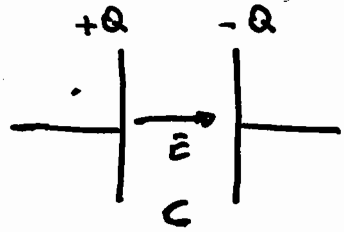
$$dU = V \cdot dq$$

- LA VARIAZIONE DELL'ENERGIA POTENZIALE È PARI AD UN LAVORO FATTO SUL SISTEMA

$$dL = dU = V\,dq$$

- LE CARICHE GIA PRESENTI SULL'ARMATURA CREANO UN CAMPO CHE SI OPPONE ALL'ACCUMULO DI ALTRA CARICA, QUINDI IL LAVORO CHE FACCIAMO PER "CARICARE" IL CONDENSATORE AUMENTA ALL'AUMENTARE DELLA CARICA

ENERGIA DEL CONDENSATORE



- LAVORO ELEMENTARE PER SPOSTARE LA CARICA dq DA UN'ARMATURA ALL'ALTRA

$$dL = V\,dq$$

- MA DATO CHE $V = \frac{q}{C}$ [q = carica già presente sul condensatore]

$$dL = V\,dq = \frac{q}{C}\,dq$$

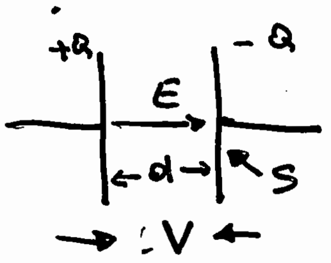
- PER CALCOLARE IL LAVORO TOTALE PER SPOSTARE L'INTERA CARICA Q DA UN'ARMATURA ALL'ALTRA SI FA:

$$L = \int_0^Q \frac{q}{C}\,dq = \frac{1}{C}\,\frac{q^2}{2}\Big|_0^Q = \frac{1}{2}\,\frac{Q^2}{C}$$

- IL LAVORO FATTO VIENE IMMAGAZZINATO COME ENERGIA ELETTROSTATICA DAL CONDENSATORE E VIENE "RESTITUITO" IN FASE DI SCARICA

$$\boxed{U = \frac{1}{2}\,\frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2}\,C\,V^2}$$

ENERGIA DEL CONDENSATORE: DOVE VIENE IMMAGAZZINATA?



$$C = \varepsilon_0 \cdot \frac{S}{d}$$

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} = \frac{Q}{S\varepsilon_0}$$

$$V = E \cdot d$$

- $U = \frac{1}{2} C V^2 =$

$$= \frac{1}{2}\left(\varepsilon_0 \frac{S}{d}\right)(E \cdot d)^2 = \frac{1}{2}\varepsilon_0 \cdot S \cdot d \cdot E^2$$

- $S \cdot d$ E' IL VOLUME CONTENUTO ALL'INTERNO DEL CONDENSATORE NELLE NOSTRE APPROSSIMAZIONI E' L'UNICA REGIONE DELLO SPAZIO IN CUI E' PRESENTE IL CAMPO ELETTRICO.

- DIVIDIAMO L'ENERGIA DEL CONDENSATORE PER IL SUO VOLUME

$$\boxed{u = \frac{U}{Sd} = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2}$$

- $\frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2$ E' LA DENSITA' DI ENERGIA ELETTROSTATICA.

- IL RISULTATO HA VALIDITA' GENERALE.

OGNI QUALVOLTA NELLO SPAZIO E' PRESENTE UN CAMPO ELETTRICO, VI E' ASSOCIATA UN'ENERGIA ELETTROSTATICA LA CUI DENSITA' DI ENERGIA VALE:

$$u = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2$$

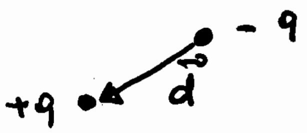
DIELETTRICI

- IL DIELETTRICO È UN MATERIALE NON CONDUTTORE, OVVERO È UN ISOLANTE.

- LE CARICHE NON POSSONO MUOVERSI LIBERAMENTE

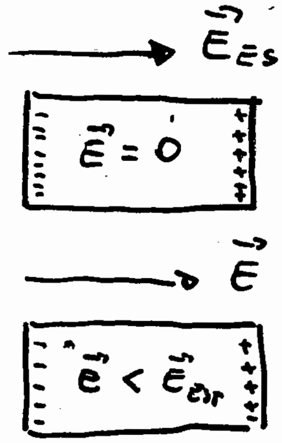
- I DIELETTRICI POSTI IN UN CAMPO ELETTRICO POSSONO, SEBBENE SIANO DEGLI ISOLANTI, MODIFICARE IL CAMPO $\vec{E}$

- IL CAMPO $\vec{E}$ ESTERNO PROVOCA UNA DEFORMAZIONE DELLE MOLECOLE ED UN' ORIENTAMENTO, IN MODO TALE CHE A LIVELLO MACROSCOPICO IL MATERIALE ACQUISTA UN MOMENTO DI DIPOLO ELETTRICO



$$\vec{p} = q\vec{d}$$

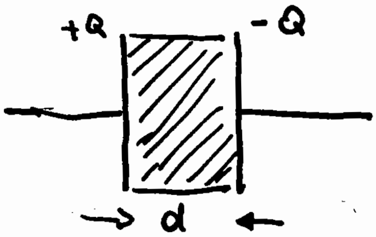
- IL DIPOLO ELETTRICO INDOTTO GENERA UN CAMPO ELETTRICO IN VERSO OPPOSTO AL CAMPO $\vec{E}$ ESTERNO CHE HA "CREATO" IL DIPOLO.



CONDUTTORE

DIELETTRICO

CONDENSATORE IN PRESENZA DI UN DIELETTRICO



- L'EFFETTO DEL DIELETTRICO È DI AUMENTARE LA CAPACITÀ DEL CONDENSATORE

- $E_0 = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$ [campo E nel vuoto in assenza di dielettrico]

$E_p = -\alpha E_0$; $0 < \alpha < 1$ [campo generato dal dipolo elettrico indotto dal campo E_0]

$E = E_0 + E_p = E_0 - \alpha E_0 = E_0 (1-\alpha)$ [campo E totale presente nel dielettrico]

COSTANTE DIELETTRICA RELATIVA ε_r (K SUL SERWAY)

$$\varepsilon_r = \frac{1}{1-\alpha} > 1$$

$E = \frac{E_0}{\varepsilon_r}$ [il campo E in presenza del dielettrico è minore del campo E_0 che si aveva nel vuoto]

$V = E d = \frac{E_0}{\varepsilon_r} d = \frac{V_0}{\varepsilon_r}$ $[V_0 = E_0 d]$

$C = \frac{Q}{V} = \frac{Q}{V_0} \varepsilon_r = \varepsilon_r C_0$ [C_0 = capacità in assenza di dielettrico]

$$\boxed{C = \varepsilon_r \varepsilon_0 \frac{S}{d}}$$

LA CAPACITÀ È AUMENTATA DI UN FATTORE ε_r

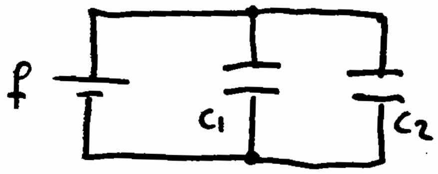
ESERCIZI CONSIGLIATI

Energia elettrostatica

- Serway (3° Edizione) – Cap. 20
  - 49 – 51 – 53 – 55 – 57 – 63 – 65 – 71
- Halliday (5° Edizione) – Cap. 25
  - 31E – 33P – 37P – 39P – 41P – 43P
- Halliday (5° Edizione) – Cap. 26
  - 23E – 25E – 29E – 31E – 33P

3. Due condensatori, di capacità $C_1 = 3\times10^{-12}$ F e $C_2 = 6\times10^{-12}$ F, sono tra loro connessi in parallelo. Tra le armature estreme è applicata una differenza di potenziale V=1000 volt. Si calcoli la capacità totale del sistema, la carica depositata su ciascuna delle armature e l'energia totale immagazzinata.

SCRITTO 10 FEBBRAIO 1999

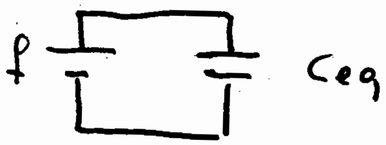


$f = 10^3\ V$

$C_1 = 3\cdot10^{-12}\ F \quad ; \quad C_2 = 6\cdot10^{-12}\ F$

- LE CAPACITA' DEI CONDENSATORI IN PARALLELO SI SOMMANO

$$C_{eq} = C_1 + C_2 = 3\cdot10^{-12} + 6\cdot10^{-12} = 9\cdot10^{-12}\ F$$



- CARICA TOTALE IMMAGAZZINATA DAL SISTEMA

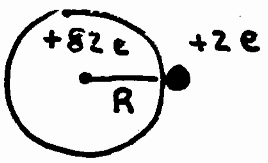
$$Q_{TOT} = f\cdot C_{eq} = 10^3\cdot 9\cdot10^{-12} = 9\cdot10^{-9}\ C$$

- ENERGIA POTENZIALE ELETTROSTATICA

$$U = \frac{1}{2} C_{eq}\cdot f^2 = \frac{1}{2}\cdot 9\cdot10^{-12}\cdot(10^3)^2 = 4.5\cdot10^{-6}\ J$$

PROBLEMA

UN NUCLEO ^{210}Po RADIOATTIVO EMETTE UNA PARTICELLA α DI CARICA $+2e$ ED ENERGIA 5.30 MeV. SI SUPPONGA CHE IMMEDIATAMENTE DOPO CHE LA PARTICELLA α SI E' FORMATA ED E' FUGGITA DAL NUCLEO, ESSA SIA ALLA DISTANZA R DAL CENTRO DEL NUCLEO DISCENDENTE ^{206}Pb LA CUI CARICA E' 82e. SI CALCOLI R PONENDO UGUALE A 5.30 MeV L'ENERGIA POTENZIALE ELETTROSTATICA DELLE DUE PARTICELLE SEPARATE DA QUESTA DISTANZA.



- IL POTENZIALE SULLA SUPERFICIE DELLA SFERA VALE:

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{R}$$

$$\Rightarrow \quad U = qV = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Qq}{R}$$ [energia potenziale della particella α]

$$R = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Qq}{U}$$

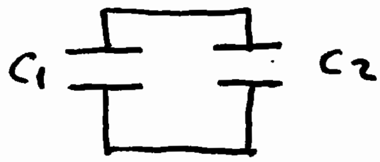
- $U = 5.30\ MeV = (5.30\cdot 10^{6}\, eV)\cdot\left(1.6\cdot 10^{-19}\frac{J}{eV}\right) = 8.48\cdot 10^{-13}\, J$
- $Q = 82\,e = 82\cdot 1.6\cdot 10^{-19}\, C = 1.31\cdot 10^{-17}\, C$
- $q = 2e = 2\cdot 1.6\cdot 10^{-19}\, C = 3.2\cdot 10^{-19}\, C$

$$R = 9\cdot 10^{9}\,\frac{1.31\cdot 10^{-17}\cdot 3.2\cdot 10^{-19}}{8.48\cdot 10^{-13}} = \frac{9\cdot 1.31\cdot 3.2}{8.48}\cdot 10^{9-17-19+13} = 4.5\cdot 10^{-14}\, m$$

ESONERO 2 - ESERCIZIO 3

Esonero 2 - Esercizio 3 (6 punti)

Un condensatore di 2.0 μF viene caricato ad una differenza di potenziale di 12.0 V e poi viene scollegato dalla batteria. a) Se si collega un secondo condensatore, inizialmente scarico, in parallelo con il primo condensatore, la differenza di potenziale scende a 4.0 V. Quanto vale la capacità del secondo condensatore?
b) Nel primo condensatore si inserisce poi un dielettrico di costante dielettrica relativa pari a 2. Quale sarà il valore della nuova differenza di potenziale ai capi del condensatore?
(Risultato: a) 4 μF; b) 3 V)



- CARICA SUL PRIMO CONDENSATORE

$$Q = C_1 \cdot \Delta V = 2 \cdot 10^{-6} \cdot 12 = 24\ \mu C$$

- COLLEGANDO L'ALTRO CONDENSATORE LA CARICA TOTALE SI CONSERVA

CAPACITA' EQUIVALENTE $C_{eq} = \dfrac{Q}{\Delta V} = \dfrac{24 \cdot 10^{-6}}{4} = 6\ \mu F$

- DATO CHE $C_{eq} = C_1 + C_2 \Rightarrow C_2 = C_{eq} - C_1 = 6 \cdot 10^{-6} - 2 \cdot 10^{-6} = \underline{4\ \mu F}$

b) CON IL DIELETTRICO LA CAPACITA' DEL PRIMO CONDENSATORE DIVENTA:

$$C_1' = \varepsilon_r \cdot C_1 = 2 \cdot 2 \cdot 10^{-6} = 4\ \mu F$$

- LA CAPACITA' EQUIVALENTE DIVENTA:

$$C'_{eq} = C_1' + C_2 = 4 \cdot 10^{-6} + 4 \cdot 10^{-6} = 8\ \mu F$$

- LA d.d.p. DIVENTA:

$$\Delta V' = \frac{Q}{C'_{eq}} = \frac{24 \cdot 10^{-6}}{8 \cdot 10^{-6}} = 3 V$$

PROVA SCRITTA - 27 MARZO 2000

UN CONDENSATORE A FACCIE PIANE E PARALLELE E' POSTO IN ARIA ED HA LA CAPACITA' DI $3.3 \cdot 10^{-10}$ F. CALCOLARE LA VARIAZIONE DI ENERGIA ELETTROSTATICA QUANDO LO SPAZIO FRA LE ARMATURE E' RIEMPITO CON OLIO DI COSTANTE DIELETTRICA RELATIVA $\varepsilon_r = 5$, NELLE SEGUENTI CONDIZIONI:

a) LA d.d.p. FRA LE ARMATURE E' MANTENUTA COSTANTE AL VALORE DI 600 V.

b) LA CARICA SULLE ARMATURE E' MANTENUTA COSTANTE AL VALORE DI $2 \cdot 10^{-7}$ C.

o——o——o

- L'INSERIMENTO DELL'OLIO AUMENTA LA CAPACITA' DEL CONDENSATORE DEL FATTORE ε_r

$$C' = \varepsilon_r \cdot C$$

- ENERGIA ELETTROSTATICA DEL CONDENSATORE

$$U = \frac{1}{2} C V^2 \quad \text{OPPURE} \quad U = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C}$$

DOVETE USARE LA PRIMA FORMULA QUANDO SI MANTIENE COSTANTE V E LA SECONDA QUANDO SI MANTIENE COSTANTE Q

a) $$\Delta U = \frac{1}{2} C' V^2 - \frac{1}{2} C V^2 = \frac{1}{2} \varepsilon_r C V^2 - \frac{1}{2} C V^2 = (\varepsilon_r - 1) \frac{1}{2} C V^2 > 0$$

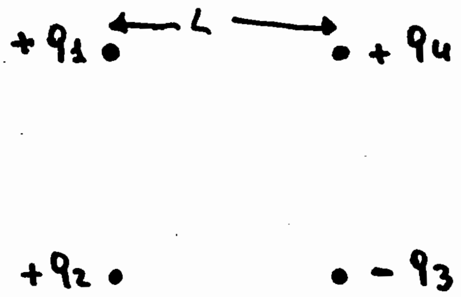
$$\Delta U = (5-1) \frac{1}{2} \cdot 3.3 \cdot 10^{-10} \cdot 600^2 = +2.4 \cdot 10^{-4} \text{ J}$$

b) $$\Delta U = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C'} - \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{\varepsilon_r C} - \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} = \left(\frac{1}{\varepsilon_r} - 1\right) \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} < 0$$

$$\Delta U = \left(\frac{1}{5} - 1\right) \frac{1}{2} \frac{(2 \cdot 10^{-7})^2}{3.3 \cdot 10^{-10}} = -4.85 \cdot 10^{-5} \text{ J}$$

PROBLEMA

QUATTRO CARICHE PUNTIFORMI, CIASCUNA DI MODULO $2\mu C$, SONO NEI VERTICI DI UN QUADRATO DI LATO $L = 4$ cm. SI TROVI L'ENERGIA POTENZIALE ELETTROSTATICA DI QUESTO INSIEME DI CARICHE.



- L'ENERGIA POTENZIALE DI UN SISTEMA DI CARICHE E' IL LAVORO FATTO PER COSTRUIRE QUELL'INSIEME

) PORTIAMO LA CARICA $q_1 \rightarrow$ NESSUN LAVORO FATTO

LA CARICA q_1 CREA NELLO SPAZIO IL POTENZIALE $V(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1}{r}$

) SECONDA CARICA

$$L_2 = U_{FINALE} - U_{INIZIALE} = q_2 V(r) - q_2 V(\infty) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{L} - 0$$

$$V(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1}{|\vec{r}-\vec{r}_1|} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_2}{|\vec{r}-\vec{r}_2|}$$

) TERZA CARICA

$$L_3 = U_{FINALE} - U_{INIZIALE} = -q_3 V(r) = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_3 q_1}{L\sqrt{2}} - \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_3 q_2}{L}$$

$$V(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1}{|\vec{r}-\vec{r}_1|} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_2}{|\vec{r}-\vec{r}_2|} - \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_3}{|\vec{r}-\vec{r}_3|}$$

) QUARTA CARICA

$$L_4 = q_4 \cdot V(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_4 q_1}{L} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_4 q_2}{L\sqrt{2}} - \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_4 q_3}{L}$$

$$U = L_2 + L_3 + L_4 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{q_1 q_2}{L} - \frac{q_3 q_1}{L\sqrt{2}} - \frac{q_3 q_2}{L} + \frac{q_4 q_1}{L} + \frac{q_4 q_2}{L\sqrt{2}} - \frac{q_4 q_3}{L}\right] =$$

$$= \frac{9\cdot 10^9}{0.04}\cdot 10^{-12}\left[2\cdot 2 - \frac{2\cdot 2}{\sqrt{2}} - 2\cdot 2 + 2\cdot 2 + \frac{2\cdot 2}{\sqrt{2}} - 2\cdot 2\right] = 0$$

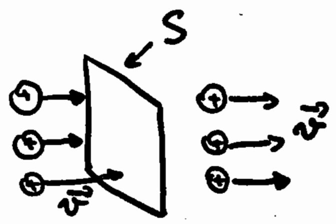
Corrente elettrica

- Corrente elettrica
- Densità di corrente
- Legge di Ohm
- Forza elettromotrice
- Generatore reale
- Effetto Joule
- Resistenze in serie e parallelo
- Circuito RC

CORRENTE ELETTRICA

- UN MOVIMENTO CONCORDE DI CARICHE ELETTRICHE DELLO STESSO SEGNO DA ORIGINE ALLA CORRENTE ELETTRICA.

- CONSIDERIAMO DELLE CARICHE CHE ATTRAVERSANO UNA DATA SUPERFICIE S



- SI DEFINISCE CORRENTE LA QUANTITA' DI CARICA CHE ATTRAVERSA LA SUPERFICIE PER UNITA' DI TEMPO

$$I_{MED} = \frac{\Delta Q}{\Delta t}$$

- LA DEFINIZIONE RIGOROSA E':

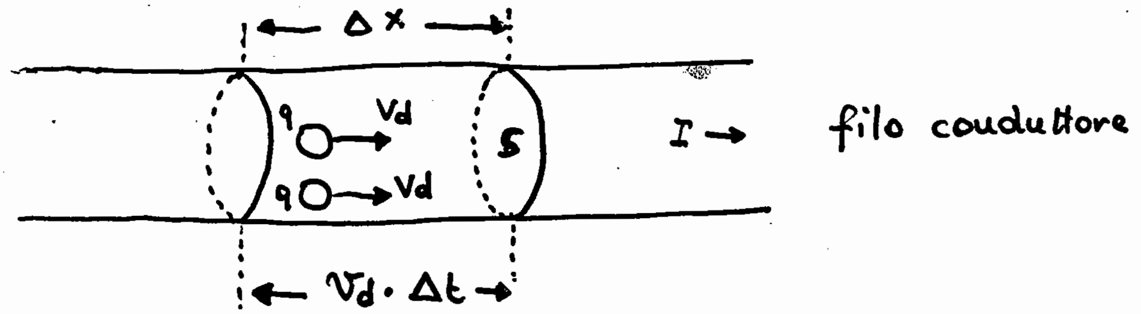
$$I = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{dQ}{dt}$$

- LA CORRENTE SI MISURA IN COULOMB/SECONDO = AMPERE [A

- L'AMPERE (A) E' L'UNITA' DI MISURA FONDAMENTALE DEI FENOMENI ELETTRICI

- SI SCEGLIE PER CONVENZIONE COME VERSO DI SCORRIMENTO DELLA CORRENTE QUELLO DEL MOTO DELLE CARICHE POSITIVE

DENSITA' DI CORRENTE



- CONSIDERIAMO UN FILO CONDUTTORE DI SEZIONE S ATTRAVERSATO DALLA CORRENTE I

$$I = \frac{\Delta Q}{\Delta t}$$

- ΔQ E' LA QUANTITA' DI CARICA CHE ATTRAVERSA LA SEZIONE S NEL TEMPO Δt
- ΔQ E' LA CARICA CONTENUTA NEL CILINDRO DI BASE S ED ALTEZZA $\Delta x = v_d \cdot \Delta t$
- v_d E' LA VELOCITA' DI DERIVA CON LA QUALE SI MUOVONO LE CARICHE NEL LORO INSIEME
- n = NUMERO DI PORTATORI DI CARICA PER UNITA' DI VOLUME

$$\Delta Q = n \cdot \text{Volume} \cdot q = n \cdot S \cdot \Delta x \cdot q = n \cdot S\, v_d \cdot \Delta t \cdot q$$

$$I = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = n q v_d \cdot S$$

- DENSITA' DI CORRENTE J = CORRENTE PER UNITA' DI SUPERFICIE

$$J = \frac{I}{S} = n q v_d \quad \rightarrow \quad \vec{J} = n q \vec{v_d}$$

- VEDREMO CHE LA DENSITA' DI CORRENTE $\vec{J}$ E' UN VETTORE PROPORZIONALE AL CAMPO ELETTRICO $\vec{E}$

ESEMPIO 21.1 (Serway)

UN FILO DI RAME CON SEZIONE DI AREA $3.0 \cdot 10^{-6}\ m^2$ E' PERCORSO DA UNA CORRENTE DI 10.0 A. TROVARE LA VELOCITA' DI DERIVA DEGLI ELETTRONI IN QUESTO FILO. LA DENSITA' DEL RAME E' $8.95\ g/cm^3$.

- PESO MOLECOLARE DEL RAME = 63.5 g/mole
- RICAVIAMO IL VOLUME OCCUPATO DA UNA MOLE DI RAME (1 mole di rame = $6.02 \cdot 10^{23}$ atomi)

$$V = \frac{m}{\rho} = \frac{63.5\ g}{8.95\ g/cm^3} = 7.09\ cm^3$$

- OGNI ATOMO DI RAME FORNISCE UN ELETTRONE CHE PARTECIPA ALLA CONDUZIONE

$$n = \frac{6.02 \cdot 10^{23}\ \text{elettroni}}{7.09\ cm^3} = 8.48 \cdot 10^{22}\ \frac{\text{elettroni}}{cm^3} = 8.48 \cdot 10^{28}\ \frac{\text{elet.}}{m^3}$$

- $$I = n q v_d \cdot S \quad \Rightarrow \quad v_d = \frac{I}{nqS} =$$

$$= \frac{10.0\ C/s}{(8.48 \cdot 10^{28}\ m^{-3})(1.6 \cdot 10^{-19}\ C)(3.0 \cdot 10^{-6}\ m^2)} = 2.46 \cdot 10^{-4}\ m/s$$

- LA VELOCITA' DI DERIVA E' MOLTO MINORE DELLA VELOCITA' DEL SINGOLO ELETTRONE

N.B.

$$\underset{\text{corrente}}{I} = \overset{nqv}{J} \cdot \underset{\text{sezione}}{S} \quad \rightarrow \text{conservazione della carica}$$

$$\underset{\text{Portata}}{P} = \underset{\text{velocità}}{V} \cdot \underset{\text{sezione}}{S} \quad \rightarrow \text{conservazione della massa}$$

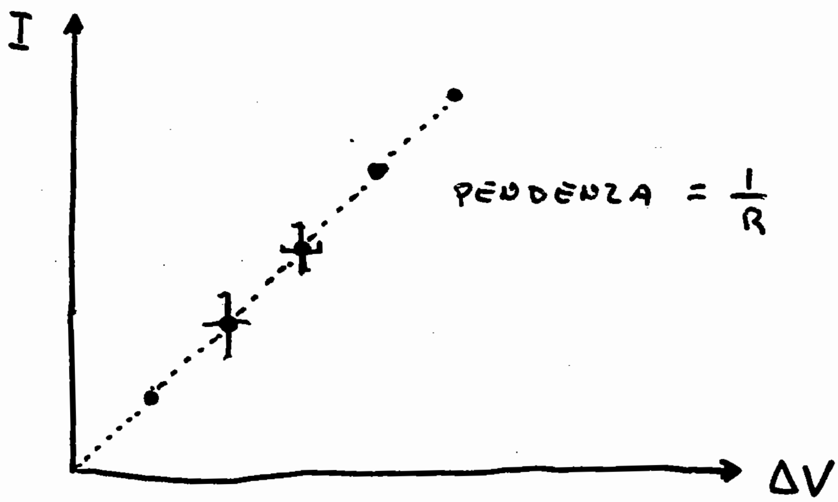
RESISTENZA ÈLETTRICA

- NORMALMENTE IN UN FILO DI RAME NON CIRCOLA CORRENTE
- AFFINCHE' VI SIA UN PASSAGGIO DI CORRENTE OCCORRE CHE TRA I PUNTI A E B VI SIA UNA DIFFERENZA DI POTENZIALE
- MISURANDO LA d.d.p. TRA DUE PUNTI A E B ΔV E LA CORRENTE CHE PASSA TRA QUESTI DUE PUNTI I SI DEFINISCE:

$$R = \frac{\Delta V}{I}$$

R È LA RESISTENZA TRA I DUE PUNTI A E B.
NEL S.I. SI MISURA IN OHM (Ω)

PER ALCUNI MATERIALI, IN UN INTERVALLO ΔV DEFINITO, SI TROVA SPERIMENTALMENTE LA SEGUENTE RELAZIONE



LA CORRENTE È DIRETTAMENTE PROPORZIONALE ALLA d.d.p.

LEGGE DI OHM

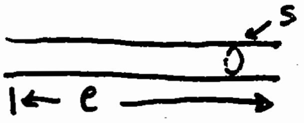
- G.S. OHM SCOPRI' CHE PER ALCUNI MATERIALI VALE LA RELAZIONE:

$$\Delta V = R \cdot I$$

- I MATERIALI CHE SODDISFANO QUESTA RELAZIONE SI DEFINISCONO OHMICI

- NEI CIRCUITI ELETTRICI SI INSERISCONO ELEMENTI AVENTI UNA RESISTENZA DEFINITA (RESISTORI): SIMBOLO = —WW—

- SECONDA LEGGE DI OHM



$$R = \rho \frac{\ell}{S}$$

- ρ = RESISTIVITA', E' UNA CARATTERISTICA DEL MATERIALE
- $\sigma = 1/\rho$ = CONDUTTIVITA' ELETTRICA

- $$\Delta V = E \cdot \ell = R \cdot I = \rho \frac{\ell}{S} I = \rho \frac{\ell}{S} \cdot J \cdot S$$

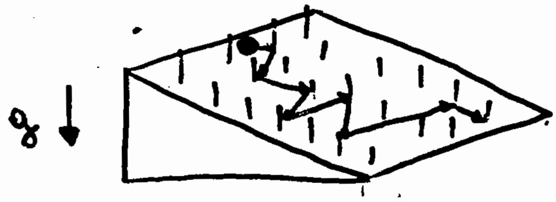
$$\boxed{\vec{E} = \rho \vec{J}}$$

- LA RESISTIVITA' E' UNA FUNZIONE DELLA TEMPERATURA

$$\rho = \rho_0 \left[1 + \alpha (T - T_0)\right]$$

$$\Rightarrow \quad R = R_0 \left[1 + \alpha (T - T_0)\right]$$

MODELLO DI CONDUZIONE



modellino meccanico

- SE UN CONDUTTORE È SOTTOPOSTO AD UNA d.d.p. ALL'INTERNO SARÀ PRESENTE UN CAMPO ELETTRICO $\vec{E}$ (N.B. NON SIAMO IN ELETTROSTATICA)

- UN ELETTRONE DI CARICA q E MASSA m SUBISCE L'ACCELERAZIONE

$$\vec{a} = \frac{q\vec{E}}{m}$$

- L'ACCELERAZIONE AVVIENE TRA DUE URTI CON I NUCLEI (PIOLI NELL'ESEMPIO MECCANICO)

$$\vec{v} = \vec{v_0} + \vec{a}\,t = \vec{v_0} + \frac{q\vec{E}}{m}\,t$$

- IL VALOR MEDIO DI $\vec{v_0}$ È NULLO (URTI CASUALI)

- τ = TEMPO MEDIO TRA DUE URTI (DIPENDE DA T)

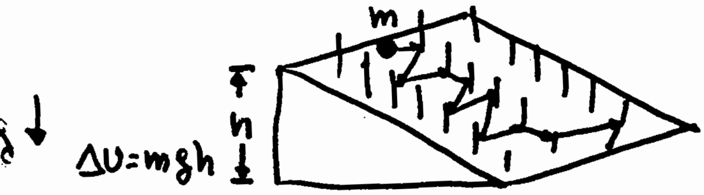
$$\vec{v_d} = \frac{q\vec{E}}{m}\tau \qquad \text{(velocità di deriva)}$$

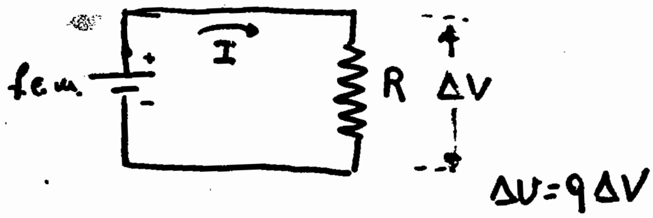
$$J = nqv_d = \frac{nq^2E}{m}\tau$$

DATO CHE $J = \sigma E \Rightarrow \sigma = \dfrac{nq^2\tau}{m}$; $\rho = \dfrac{1}{\sigma} = \dfrac{m}{nq^2\tau}$

N.B. LA VELOCITÀ DI DERIVA DIPENDE DALLA MASSA.
È IMPORTANTE NEI CASI IN CUI VI SIANO DIVERSI PORTATORI DI CARICA (SOLUZIONI ELETTROLITICHE)

ENERGIA NEI CIRCUITI ELETTRICI





- LA RESISTENZA IN UN CIRCUITO ELETTRICO "FRENA" IL PASSAGGIO DEGLI ELETTRONI

- UNA CARICA q CHE ATTRAVERSA UNA d.d.p. ΔV DIMINUISCE LA SUA ENERGIA POTENZIALE

$$\Delta U = q\,\Delta V$$

LA CARICA q CHE PASSA ATTRAVERSO UNA SEZIONE DEL CIRCUITO NEL TEMPO Δt VALE

$$q = I\,\Delta t$$

$$\Rightarrow \quad \Delta U = I\,\Delta t \cdot \Delta V$$

LA VARIAZIONE DI ENERGIA POTENZIALE PER UNITA' DI TEMPO:

$$P = \frac{\Delta U}{\Delta t} = \frac{I\,\Delta t \cdot \Delta V}{\Delta t} = I \cdot \Delta V$$

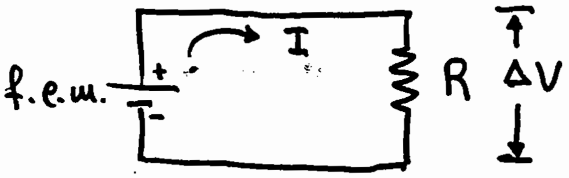
SE CONSIDERIAMO UN RESISTORE DOVE $\Delta V = R \cdot I$:

$$P = I\,\Delta V = I \cdot R I = R I^2 \quad ; \quad \Delta V \cdot \frac{\Delta V}{R} = \frac{(\Delta V)^2}{R}$$

QUESTA E' LA POTENZA DISSIPATA DAL RESISTORE (EFFETTO JOULE) E PROVOCA UN RISCALDAMENTO DEL RESISTORE (Ex: SCALDABAGNO)

- PER FAR CONTINUARE A CIRCOLARE LA CORRENTE, OCCORRE RIDARE ENERGIA POTENZIALE AGLI ELETTRONI

FORZA ELETTROMOTRICE (f.e.m.)



- LE CARICHE CHE ATTRAVERSANO LA RESISTENZA R DIMINUISCONO LA LORO ENERGIA POTENZIALE DELLA QUANTITA':

$$\Delta U = q\,\Delta V$$

- AFFINCHÈ CONTINUI A SCORRERE CORRENTE NEL CIRCUITO, LE CARICHE DEVONO TORNARE NEL PUNTO DI PARTENZA RIACQUISTANDO L'ENERGIA POTENZIALE PERDUTA.

- LA FORZA CHE RIPORTA LE CARICHE NELLA POSIZIONE ORIGINARIA NON PUÒ ESSERE LA FORZA ELETTROSTATICA (CHE FA MUOVERE LE CARICHE NEL VERSO OPPOSTO), COSÌ COME PER AUMENTARE LA QUOTA DI UN OGGETTO NON SI PUÒ RICORRERE ALLA FORZA GRAVITAZIONALE.

- IL DISPOSITIVO CHE RIFORNISCE LE CARICHE DI ENERGIA POTENZIALE ELETTROSTATICA SI CHIAMA GENERATORE DI FORZA ELETTROMOTRICE (f.e.m.)

SI DEFINISCE f.e.m. LA VARIAZIONE DI ENERGIA POTENZIALE (LAVORO) PER UNITA' DI CARICA

$$f.e.m. = \frac{\Delta U}{q} \quad [\text{la f.e.m. si misura in V}]$$

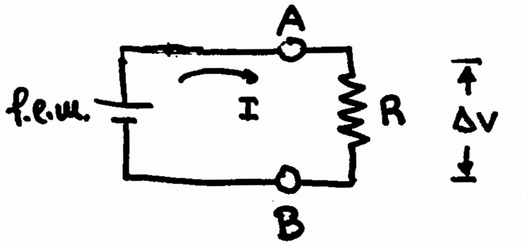
PILA : ENERGIA CHIMICA → ENERGIA ELETTRICA

ALTERNATORE : ENERGIA MECCANICA → " "

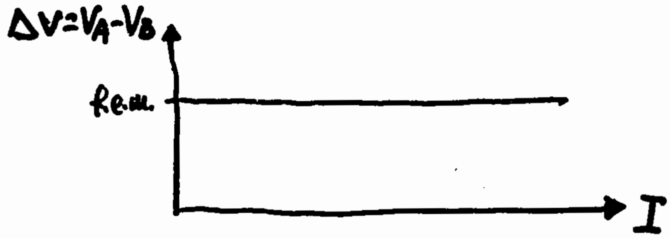
CELLA FOTOVOLTAICA : ENERGIA SOLARE → " "

GENERATORE REALE

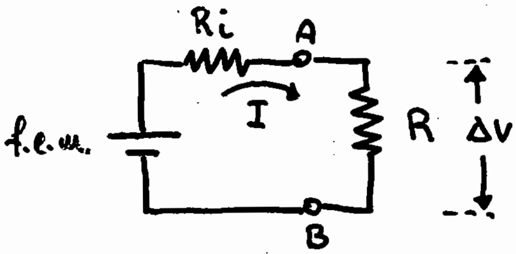
- UN GENERATORE IDEALE DI f.e.m. MANTIENE INALTERATA LA d.d.p. AI SUOI CAPI QUALUNQUE SIA LA CORRENTE CHE CIRCOLA ATTRAVERSO DI ESSO.



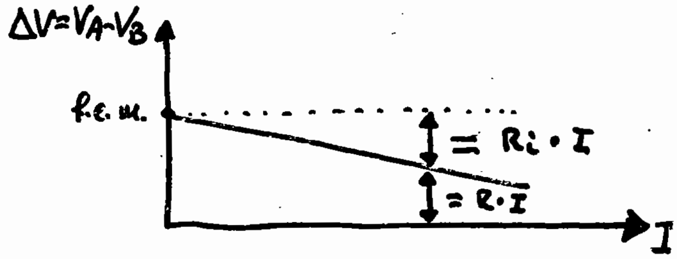
$I = \frac{\Delta V}{R}$



- IN REALTA', QUALUNQUE SIA IL MECCANISMO FISICO USATO PER GENERARE LA f.e.m., AD ESSO SONO SEMPRE ASSOCIATI DEI FENOMENI DISSIPATIVI DI ENERGIA, CHE SONO SCHEMATIZZATI IPOTIZZANDO UNA RESISTENZA INTERNA AL GENERATORE.



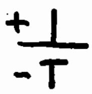
$I = \frac{\Delta V}{R}$



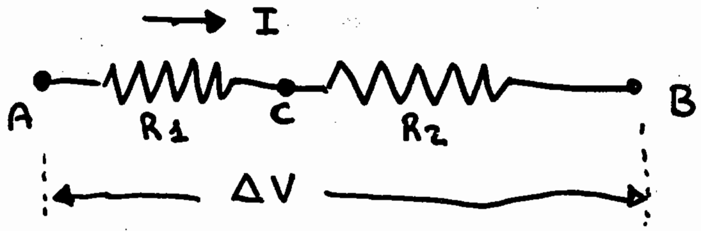
- LA RESISTENZA INTERNA FA SI CHE LA d.d.p. AI CAPI DEL GENERATORE (MORSETTI REALI) NON SIA PIU' UGUALE ALLA f.e.m., MA DIMINUISCE LINEARMENTE ALL'AUMENTARE DELLA CORRENTE EROGATA

$$\Delta V = V_A - V_B = f.e.m. - R_i \cdot I$$

- VI E' UNA CADUTA DI TENSIONE AI CAPI DELLA R_i

N.B.  LA LINEA PIU' LUNGA INDICA IL PUNTO A POTENZIALE MAGGIORE

RESISTENZE IN SERIE



- DUE RESISTENZE SI DICONO IN SERIE QUANDO SONO ATTRAVERSATE DALLA STESSA CORRENTE

- LA d.d.p. TRA I DUE PUNTI A E B VALE:

$$\Delta V = V_A - V_B = \underbrace{V_A - V_C}_{V_{R_1}} + \underbrace{V_C - V_B}_{V_{R_2}}$$

$$\Delta V = V_{R_1} + V_{R_2} = I \cdot R_1 + I \cdot R_2 = I \cdot (R_1 + R_2)$$

- SI PUÒ DEFINIRE UNA RESISTENZA EQUIVALENTE PARI A:

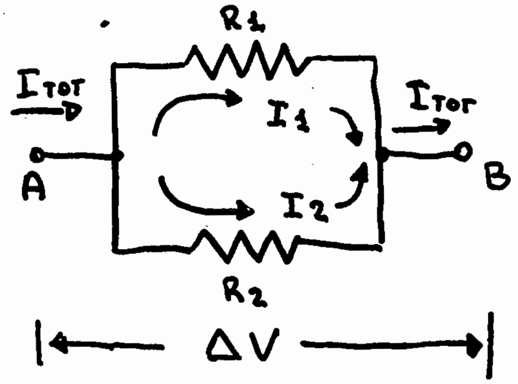
$$R_{eq} = \frac{\Delta V}{I} = \frac{I \cdot (R_1 + R_2)}{I} = R_1 + R_2$$

- LE RESISTENZE IN SERIE SI SOMMANO

- SE ABBIAMO n RESISTENZE IN SERIE SI HA:

$$R_{eq} = R_1 + R_2 + \dots + R_n = \sum_{i=1}^{n} R_i$$

RESISTENZE IN PARALLELO



- DUE RESISTENZE, CONNESSE TRA DI LORO, SI DICONO IN PARALLELO QUANDO SONO SOTTOPOSTE ALLA STESSA DIFFERENZA DI POTENZIALE

- LA CORRENTE I_{TOT} CHE ENTRA NEL SISTEMA DI DUE RESISTENZE SI DIVIDE IN DUE PARTI

$$I_{TOT} = I_1 + I_2 = \frac{\Delta V}{R_1} + \frac{\Delta V}{R_2} = \Delta V \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)$$

- DEFINIAMO ORA LA RESISTENZA EQUIVALENTE

$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{I_{TOT}}{\Delta V} = \frac{\Delta V}{\Delta V} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$

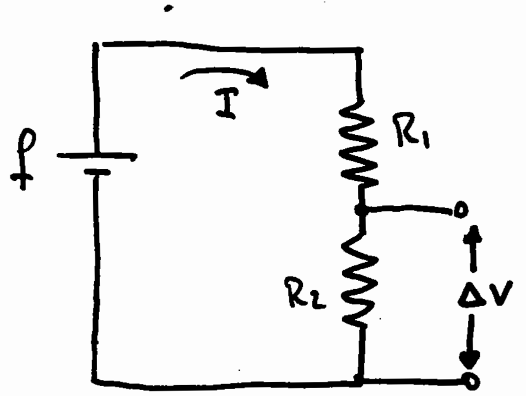
- L'INVERSO DELLA RESISTENZA EQUIVALENTE È UGUALE ALLA SOMMA DEGLI INVERSI

$$R_{eq} = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2} \qquad R_{eq} < R_1 \;; \; R_{eq} < R_2$$

- NEL CASO DI n RESISTENZE IN PARALLELO SI HA:

$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \dots + \frac{1}{R_n} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{R_i}$$

PARTITORE DI TENSIONE

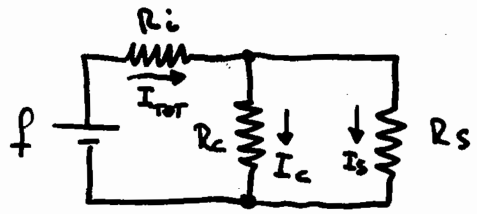


- DATO UN GENERATORE DI f.e.m. f, SI PUÒ RIDURRE IL VALORE DELLA TENSIONE CHE SI VUOLE UTILIZZARE TRAMITE DUE RESISTENZE IN SERIE

$$I = \frac{f}{R_1 + R_2}$$

$$\Delta V = R_2 \cdot I = \frac{R_2}{R_1 + R_2} f$$

RESISTENZA DI SHUNT



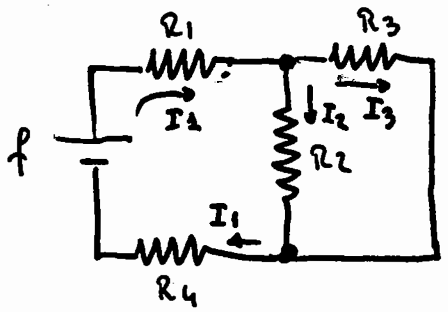
- SI PUÒ RIDURRE LA CORRENTE CHE PASSA ATTRAVERSO UNA RESISTENZA DI CARICO R_c, METTENDO IN PARALLELO UNA RESISTENZA DI SHUNT R_s

$$I_c \cdot R_c = I_s R_s \quad ; \quad I_c + I_s = I_{TOT} \quad \Rightarrow \quad I_s = I_{TOT} - I_c$$

$$I_c R_c = (I_{TOT} - I_c) R_s = I_{TOT} R_s - I_c R_s \; ;$$

$$I_c R_c + I_c R_s = I_{TOT} \cdot R_s \quad \Rightarrow \quad \boxed{I_c = \frac{R_s}{R_c + R_s} I_{TOT}}$$

PROBLEMA 28-3 (Halliday)

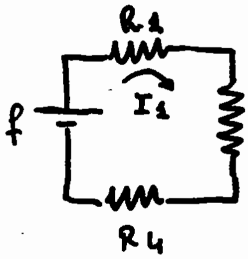


$f = 12\,V$; $R_1 = 20\,\Omega$

$R_2 = 20\,\Omega$; $R_3 = 30\,\Omega$; $R_4 = 8\,\Omega$

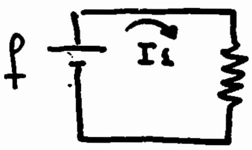
- TROVARE LA CORRENTE I_1 E LA CORRENTE I_2
- VI E' UN SOLO GENERATORE, IL PROBLEMA SI PUO' RISOLVERE USANDO SOLO LA LEGGE DI OHM

$R_2 // R_3 \Rightarrow$



$$R_5 = \frac{R_2 \cdot R_3}{R_2 + R_3} = \frac{20 \cdot 30}{20 + 30} = 12\,\Omega$$

- LE TRE RESISTENZE SONO IN SERIE



$$R_{eq} = R_1 + R_5 + R_4 = 20 + 12 + 8 = 40\,\Omega$$

- $I_1 = \frac{f}{R_{eq}} = \frac{12}{40} = 0.30\ A$

- TROVIAMO ORA LA CORRENTE I_2 CHE CIRCOLA IN R_2

$V_{R_2} = V_{R_5}$ (la d.d.p. sul parallelo $R_2 // R_3$)

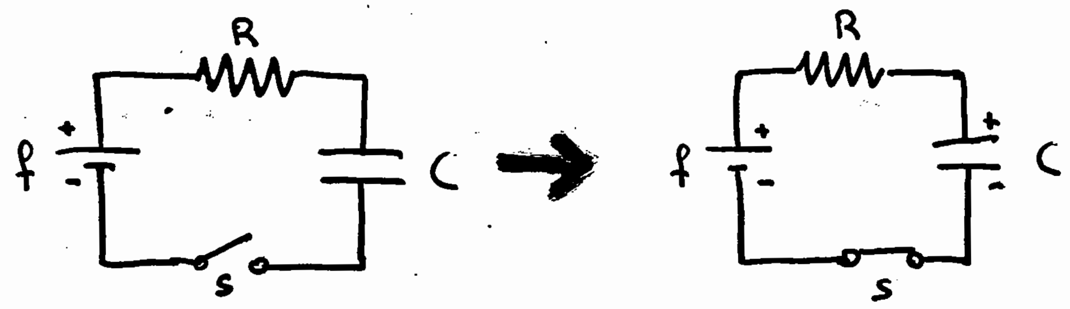
$$V_{R_5} = I_1 \cdot R_5 = 0.30 \cdot 12 = 3.6\ V$$

$$I_2 = \frac{V_{R_5}}{R_2} = \frac{3.6}{20} = 0.18\ A$$

N.B. $I_3 = \frac{V_{R_5}}{R_3} = \frac{3.6}{30} = 0.12\ A$

$\Rightarrow I_2 + I_3 = I_1 \qquad 0.18 + 0.12 = 0.30\ A$

CIRCUITO RC



- INIZIALMENTE IL CONDENSATORE È SCARICO
- CHIUDIAMO L'INTERRUTTORE S, COMINCIA A CIRCOLARE CORRENTE NEL CIRCUITO CHE "CARICA" IL CONDENSATORE
- QUANDO IL CONDENSATORE E' CARICO, CIOE' LA d.d.p. AI SUOI CAPI È PARI AD f, NON PASSA PIU' CORRENTE NEL CIRCUITO
- SCRIVIAMO L'EQUAZIONE DELLE MAGLIE.
IL CONDENSATORE PUO' ESSERE ASSIMILATO AD UN GENERATORE DI TENSIONE EQUIVALENTE A:

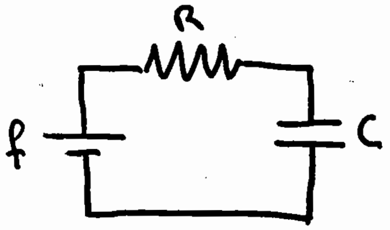
$$f_c = -\frac{q}{C} \qquad [\, q = \text{carica presente sul condensatore} \,]$$

- $$f - Ri - \frac{q}{C} = 0$$
- DATO CHE $i = \frac{dq}{dt}$, SI HA:

$$f - R\frac{dq}{dt} - \frac{q}{C} = 0 \qquad [\text{eq. differenziale di primo grado}]$$

- DOBBIAMO TROVARE LA FUNZIONE $q(t)$ CHE ESPRIME LA CARICA DEL CONDENSATORE IN FUNZIONE DEL TEMPO

Eq. DIFFERENZIALE DEL CIRCUITO RC



$$f - R\frac{dq}{dt} - \frac{q}{C} = 0$$

- RISCRIVIAMO L'EQUAZIONE COME:

$$\frac{dq}{dt} = \frac{f}{R} - \frac{q}{RC}$$

- LA SOLUZIONE DELL'EQUAZIONE È:

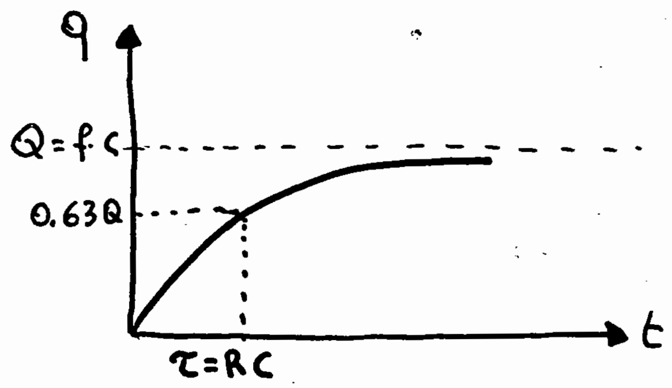
$$q(t) = C \cdot f\left[1 - e^{-t/RC}\right] = Q\left(1 - e^{-t/RC}\right)$$

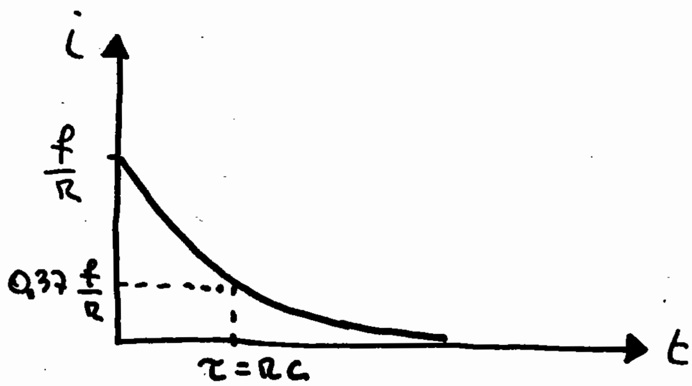
$\Rightarrow \quad q(t=0) = 0 \quad ; \quad q(t=\infty) = Q = f \cdot C \quad ; \quad q(t = 5 \cdot RC) \simeq Q$

- RICAVIAMO LA CORRENTE

$$i = \frac{dq}{dt} = +\frac{Cf}{RC} e^{-t/RC} = \frac{f}{R} e^{-t/RC}$$

$\Rightarrow \quad i(t=0) = \frac{f}{R} \quad ; \quad i(t=\infty) = 0 \quad ; \quad i(t = 5 \cdot RC) \simeq 0$





$\tau = RC$ È LA COSTANTE DI TEMPO DEL CIRCUITO

- $q(t=\tau) = Q\left(1 - e^{-1}\right) = 0.63\,Q \simeq \frac{2}{3} Q$
- $i(t=\tau) = \frac{f}{R} e^{-1} = 0.37 \frac{f}{R} \simeq \frac{1}{3} \frac{f}{R}$

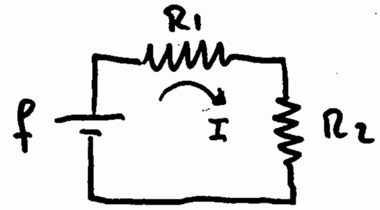
ESERCIZI CONSIGLIATI

Corrente elettrica e circuiti

- Serway (3° Edizione) – Cap. 21
  - 1 – 3 – 5 – 7 – 9 – 11 – 13 – 15 – 17 – 19 – 21 – 23 – 25 – 27 – 29 – 31 – 43 – 45 – 47 – 51 – 59
- Halliday (5° Edizione) – Cap. 27
  - 1E – 3P – 5E – 7P – 9P – 11E – 13E – 15E – 17P – 19P – 21P – 25E – 27E – 29E – 31P – 35P
- Halliday (5° Edizione) – Cap. 28
  - 1E – 3E – 5E – 7E – 13P – 35P

PROVA SCRITTA - 6 LUGLIO 1989

UNA RESISTENZA ELETTRICA DISSIPA UNA POTENZA $P = 100\,W$, ED È ALIMENTATA DA UN GENERATORE AVENTE UNA d.d.p. $V = 100\,V$. NEL CIRCUITO È PRESENTE ANCHE UNA SECONDA RESISTENZA, IN SERIE ALLA PRIMA. SE LA CORRENTE È $I = 2A$, QUAL È IL VALORE DELLE DUE RESISTENZE?



- LE DUE RESISTENZE SONO IN SERIE, QUINDI SONO ATTRAVERSATE DALLA STESSA CORRENTE I

$$I = \frac{f}{R_1 + R_2} \Rightarrow f = R_1 I + R_2 \cdot I$$

$$P_{R_2} = R_2 \cdot I^2$$

- QUINDI HO DUE EQUAZIONI E DUE INCOGNITE

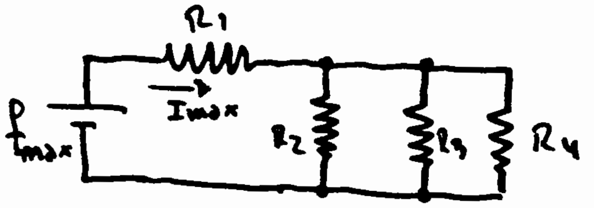
$$\begin{cases} P_{R_2} = R_2 \cdot I^2 & \longrightarrow \quad R_2 = \dfrac{P_{R_2}}{I^2} \\ f = R_1 I + R_2 I & \longrightarrow \quad R_1 = \dfrac{f}{I} - R_2 \end{cases}$$

$$R_2 = \frac{P_{R_2}}{I^2} = \frac{100}{2^2} = 25\,\Omega$$

$$R_1 = \frac{f}{I} - R_2 = \frac{100}{2} - 25 = 25\,\Omega$$

3. Un circuito è formato da una batteria di resistenza interna trascurabile, da una resistenza di 5Ω, posta in serie alla differenza di potenziale, e da tre resistenze, rispettivamente di 30Ω, 60 Ω e 60 Ω, poste in parallelo tra loro. Sapendo che la resistenza da 30 Ω può al massimo tollerare una dissipazione di calore di 120 W senza bruciarsi, calcolare la corrente massima tra i capi della batteria e il valore massimo della f.e.m. della batteria [NB le altre resistenze tollerano dissipazioni molto superiori a quelle in esame].

SCRITTO 9 LUGLIO 1999



$R_1 = 5\,\Omega$; $R_2 = 30\,\Omega$

$R_3 = 60\,\Omega$; $R_4 = 60\,\Omega$

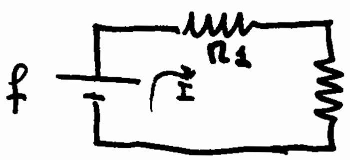
- TROVIAMO LA MASSIMA CORRENTE CHE PUÒ CIRCOLARE IN R_2

$$P_{max} = R_2 \cdot I_{2max}^2 \Rightarrow I_{2max} = \sqrt{\frac{P_{max}}{R_2}} = \sqrt{\frac{120}{30}} = 2\ A$$

- DA QUI RICAVIAMO LA d.d.p. MASSIMA AI CAPI DI R_2, CHE È ANCHE UGUALE ALLA d.d.p. AI CAPI DEL PARALLELO $R_2 // R_3 // R_4$

$$V_{2max} = I_{2max} \cdot R_2 = 2 \cdot 30 = 60\ V$$

$$\frac{1}{30} + \frac{1}{60} + \frac{1}{60} = \frac{4}{60}$$



$R_{eq} = R_2 // R_3 // R_4 = 15\,\Omega$

$\left[\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{30} + \frac{1}{60} + \frac{1}{60} = \frac{1}{15} \right]$ oppure $\left[30 // (60 // 60) = 30 // 30 = 15\,\Omega \right]$

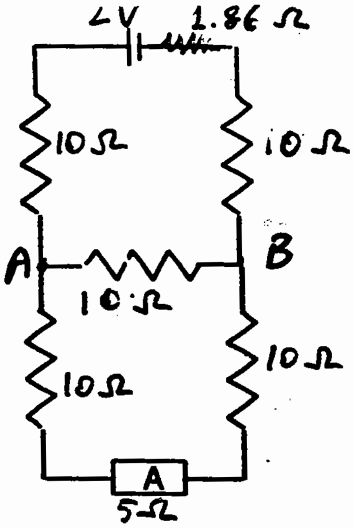
- CONOSCENDO LA d.d.p. MASSIMA AI CAPI DI R_{eq}, RICAVIAMO LA CORRENTE MASSIMA CIRCOLANTE NELLA MAGLIA

$$I_{max} = \frac{V_{2max}}{R_{eq}} = \frac{60}{15} = 4\ A$$

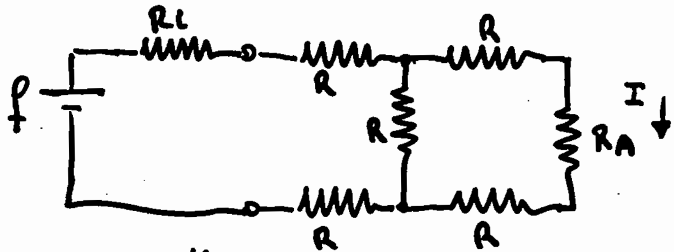
- DA QUI RICAVIAMO f_{max} [MASSIMO VALORE DELLA f.e.m.]

$$f_{max} = I_{max} \cdot (R_1 + R_{eq}) = 4 \cdot (5 + 15) = 80\ V$$

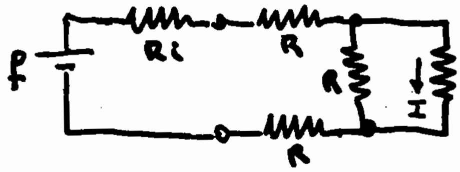
3. Cinque resistenze, ciascuna di 10Ω, sono connesse tra loro come mostrato in figura. Una pila da 2 V, di resistenza interna 1.86 Ω è posta nella parte superiore del circuito. Un amperometro, di resistenza interna 5Ω è posto nella parte inferiore, in modo che il circuito sia completamente chiuso. Quanta corrente passa nell'amperometro ?



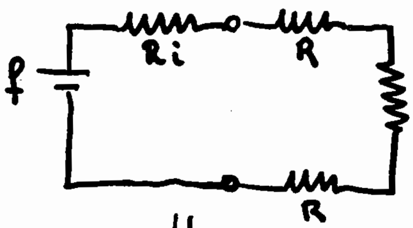
SCRITTO 24 APRILE 1997



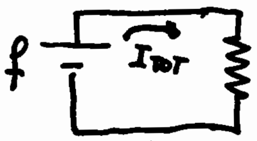
DOBBIAMO TROVARE IL VALORE DELLA CORRENTE I



$$R_{e1} = R + R_A + R = 10 + 5 + 10 = 25\,\Omega$$



$$R_{e2} = R \,//\, R_{e1} = \frac{R \cdot R_{e1}}{R + R_{e1}} = \frac{10 \cdot 25}{10 + 25} = 7.14\,\Omega$$



$$R_{e3} = R_i + R + R_{e2} + R = 1.86 + 10 + 7.14 + 10 = 29\,\Omega$$

$$I_{TOT} = \frac{f}{R_{e3}} = \frac{2}{29} = 69\ mA$$ [corrente erogata dal generatore]

TROVIAMO ORA LA d.d.p. AI CAPI DELLA RESISTENZA EQUIVALENTE R_{e2}

$$V_{Re2} = I \cdot R_{e2} = 69 \cdot 10^{-3} \cdot 7.14 = 0.49\ V$$

TROVIAMO ORA LA CORRENTE CHE CIRCOLA IN R_{e1}

$$I_{Re1} = \frac{V_{Re2}}{R_{e1}} = \frac{0.49}{25} = 19.6\ mA$$ → questa è la corrente che circola nell'amperometro

3. Un fornello elettrico riscalda 2 litri di acqua, che passano in 5 minuti da 20 °C alla temperatura di ebollizione. La differenza di potenziale tra i capi del fornello è di 200V, ed 1 KWh di potenza elettrica costa 80 £. Si calcoli :
- la potenza consumata, assumendo trascurabili le perdite di calore fuori delliquido;
- il costo del riscaldamento;
- la resistenza elettrica del fornello;
- la corrente che passa nella resistenza.
- ~~[illegible]~~ :

SCRITTO 21 FEBBRAIO 1997

- VALUTIAMO IL CALORE NECESSARIO PER RISCALDARE L'ACQUA

$$Q = m \cdot c \cdot \Delta T = (2\ \text{kg}) \cdot \left(4186 \frac{J}{\text{kg} \cdot °C}\right)(100-20) = 670\ \text{kJ}$$

- RICAVIAMO LA POTENZA DEL FORNELLO CHE HA FORNITO QUESTO CALORE IN 5 MINUTI (300 SECONDI)

$$P = \frac{Q}{\Delta t} = \frac{670 \cdot 10^3}{300} \simeq \underline{2.23\ \text{kW}}$$

- TRASFORMIAMO IL CALORE DA JOULE IN kWh

$$1\ \text{kWh} = (1000\ W)(3600\ s) = 3.6 \cdot 10^6\ J$$

$$\Rightarrow \quad 670\ \text{kJ} = \frac{670 \cdot 10^3}{3.6 \cdot 10^6} = 0.186\ \text{kWh}$$

- IL COSTO DI 0.186 kWh È:

$$0.186 \cdot 80 = 15 \text{ LIRE (ITALIANE)}$$

- TROVIAMO LA RESISTENZA DEL FORNELLO

$$P = \frac{V^2}{R} \Rightarrow R = \frac{V^2}{P} = \frac{200^2}{2.23 \cdot 10^3} = 18\ \Omega$$

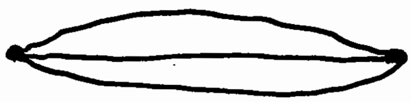
- ED INFINE LA CORRENTE CHE PASSA NELLA RESISTENZA

$$I = \frac{V}{R} = \frac{200}{18} = 11.1\ A \qquad \left[I = \frac{P}{V} = \frac{2230}{200} = 11.1\ A \right]$$

ESONERO 2 - ESERCIZIO 4

Esonero 2 - Esercizio 4 (6 punti)
Un cavo dell'impianto elettrico di un'automobile, lungo 3 m, è costituito da tre fili di 2.053 mm di diametro attorcigliati tra loro (si tenga presente però che soltanto gli estremi dei fili sono in contatto elettrico tra loro).
a) Quanto vale la resistenza di questo cavo?
b) Quando il cavo viene usato per avviare un'automobile, esso è percorso da una corrente di 90 A di intensità. Quanto vale la caduta di potenziale che si produce ai capi del cavo?
c) Quanto vale il calore che si sviluppa nel cavo per effetto Joule?
(Risultato: a) $5.14 \cdot 10^{-3}$ Ω; b) 0.462 V; c) 41.6 W)

$$\rho_{RAME} = 1.7 \cdot 10^{-8}\ \Omega \cdot m$$



I TRE FILI SONO COLLEGATI IN PARALLELO

- LA RESISTENZA DEL SINGOLO FILO SI RICAVA CON LA SECONDA LEGGE DI OHM

$$R_{FILO} = \rho \cdot \frac{\ell}{S} = 1.7 \cdot 10^{-8} \frac{3}{\pi \left(\frac{2.053}{2} \cdot 10^{-3}\right)^2} = 0.0154\ \Omega$$

- I TRE FILI HANNO RESISTENZA UGUALE, E DATO CHE SONO COLLEGATI IN PARALLELO, LA RESISTENZA EQUIVALENTE SARA' UN TERZO

$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R} + \frac{1}{R} + \frac{1}{R} = \frac{3}{R} \Rightarrow R_{eq} = \frac{R}{3} = \frac{0.0154}{3} = 5.14\ m\Omega$$

b) $\Delta V = R_{CAVO} \cdot I = 5.14 \cdot 10^{-3} \cdot 90 = 0.462\ V$

c) $P = R I^2 = 5.14 \cdot 10^{-3} \cdot 90^2 = 41.6\ W$

ESONERO 1 - ESERCIZIO 4

<u>Esonero 1 - Esercizio 4</u> **(6 punti)**

Le lampade fluorescenti compatte costano 25000 lire l'una ed hanno una durata attesa di 8000 ore. Queste lampade assorbono 20 W di potenza, ma producono un'illuminazione equivalente a quella delle lampade a incandescenza di 75 W. Le lampade ad incandescenza costano 2500 lire l'una ed hanno una durata attesa di 1200 ore.

a) Se la casa media ha accese continuamente, in media, 6 lampade a incandescenza di 75 W e se l'energia elettrica costa 140 lire al kilowattora, quanto denaro un utente risparmierebbe in un anno **installando lampade fluorescenti ad alto rendimento?**

b) A quale costo del kilowattora di energia elettrica, il costo totale dell'uso di ciascun tipo di lampada sarebbe lo stesso?

(Risultato: a) 350192 lire ; b) 19.0 lire/kwh)

8000 ORE DI FUNZIONAMENTO : LAMPADE COMPATTE

COSTO DI 6 LAMPADE COMPATTE $= 6 \cdot 25000 = 150'000$ LIRE

ENERGIA CONSUMATA $= 20\,W \cdot 6 \cdot 8000$ ORE $= 960$ kWh

COSTO ENERGIA ELETTRICA $= 960 \cdot 140 = 134'400$ LIRE

8000 ORE DI FUNZIONAMENTO : LAMPADE AD INCANDESCENZA

NUMERO DI LAMPADE USATE $= 6 \cdot \dfrac{8000}{1200} = 40$ LAMPADE

COSTO LAMPADE $= 40 \cdot 2500 = 100'000$ LIRE

ENERGIA CONSUMATA $= 75\,W \cdot 6 \cdot 8000$ ORE $= 3600$ kWh

COSTO ENERGIA ELETTRICA $= 3600 \cdot 140 = 504'000$ LIRE

RISPARMIO IN 8000 ORE

$$R = 504'000 + 100'000 - 134'400 - 150'000 = 319'600 \text{ LIRE}$$

RISPARMIO IN UN ANNO [1 ANNO $= 365 \cdot 24 = 8760$ ORE]

$$\text{RISPARMIO} = \frac{8760}{8000} \cdot 319'600 \simeq \underline{350'000 \text{ LIRE}}$$

NON SI AVREBBE RISPARMIO SE :

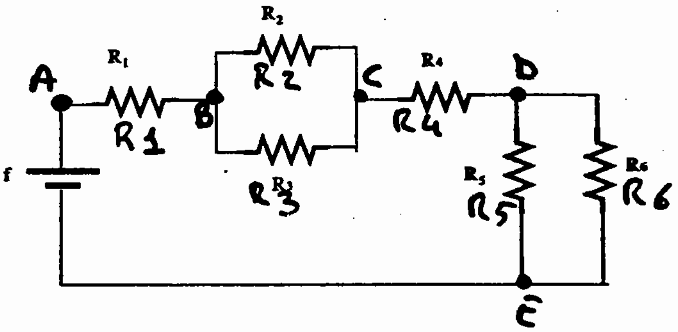
$$150'000 + 960 \cdot x = 100'000 + 3600 \cdot x \qquad [x = \text{costo del kWh}]$$

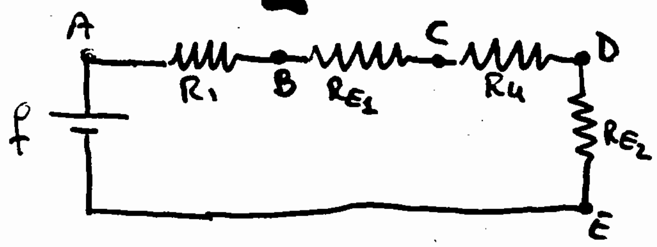
$$50'000 = (3600 - 960)\,x$$

$$x = \frac{50'000}{3600 - 960} = 19 \ \frac{\text{lire}}{\text{kWh}}$$

ESONERO 3 - ESERCIZIO 4

Esonero 3 - Esercizio 4 (7 punti)
Nel circuito di figura si ha: f=12 V, $R_1 = 50\Omega$, $R_2 = 80\Omega$, $R_3 = 150\Omega$, $R_4 = 30\Omega$, $R_5 = 200\Omega$, $R_6 = 300\Omega$. Si trovino:
a) la resistenza equivalente del circuito, b) l'intensità di corrente in ciascun resistore.
(Risultato: a) 252 Ω, b) $I_1 = I_4 = 47.6\ mA$, $I_2 = 31.0\ mA$, $I_3 = 16.6\ mA$, $I_5 = 28.6\ mA$, $I_6 = 19.0\ mA$)





$$R_{E_1} = R_2 // R_3 = \frac{80 \cdot 150}{80 + 150} = 52\ \Omega$$

$$R_{E_2} = R_5 // R_6 = \frac{200 \cdot 300}{200 + 300} = 120\ \Omega$$

- RESISTENZA TOTALE $R_{TOT} = R_1 + R_{E_1} + R_4 + R_{E_2} = 50 + 52 + 30 + 120 = 252\ \Omega$

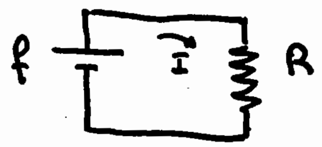
- $I_{TOT} = \frac{f}{R_{TOT}} = \frac{12}{252} = \underline{47.6\ mA} = \underline{I_{R_1}} = \underline{I_{R_4}}$

- $V_{BC} = I_{TOT} \cdot R_{E_1} = 47.6 \cdot 10^{-3} \cdot 52 = 2.48\ V$
  - $I_{R_2} = \frac{V_{BC}}{R_2} = \frac{2.48}{80} = \underline{31.0\ mA}$
  - $I_{R_3} = \frac{V_{BC}}{R_3} = \frac{2.48}{150} = \underline{16.5\ mA}$

- $V_{DE} = I_{TOT} \cdot R_{E_2} = 47.6 \cdot 10^{-3} \cdot 120 = 5.71\ V$
  - $I_{R_5} = \frac{V_{DE}}{R_5} = \frac{5.71}{200} = \underline{28.6\ mA}$
  - $I_{R_6} = \frac{V_{DE}}{R_6} = \frac{5.71}{300} = \underline{19.0\ mA}$

SCRITTO 12 APRILE 1988

UN FORNELLO ELETTRICO È ALIMENTATO DA UN GENERATORE DI CORRENTE CONTINUA, AVENTE UNA d.d.p. COSTANTE $f = 50\ V$.
LA RESISTENZA DEL FORNELLO È $R = 100\ \Omega$.
QUANTO TEMPO IMPIEGA IL FORNELLO A RISCALDARE 3 LITRI DI ACQUA DA 20 °C A 80 °C?



- CALCOLIAMO INNANZITUTTO QUANTO CALORE OCCORRE FORNIRE ALL'ACQUA.

$$Q = m \cdot c \cdot \Delta T = (3\ kg) \cdot \left(4186\ \frac{J}{kg \cdot K}\right)(80 - 20\ °C) =$$

$$= 753'480\ J = 753.5\ kJ$$

LA POTENZA P DISSIPATA DALLA RESISTENZA PER EFFETTO JOULE VALE:

$$P = \frac{f^2}{R} = \frac{50^2}{100} = 25\ W \quad ; \quad I = \frac{f}{R} = \frac{50}{100} = 0.5\ A$$

L'ENERGIA DISSIPATA VALE

$$L = P \cdot \Delta t = Q$$

DA CUI SI RICAVA Δt

$$\Delta t = \frac{Q}{P} = \frac{753'480}{25} = 30'139 \text{ secondi} = 502 \text{ minuti} = 8.4 \text{ ore}$$

B. L'ENERGIA SI PUÒ MISURARE ANCHE IN KWh (chilowattora)

$$1\ KWh = 1000\ W \cdot 3600\ s = 3.6 \cdot 10^6\ J$$

$$Q = 753480\ J = \frac{753480\ J}{3.6 \cdot 10^6\ \frac{J}{KWh}} = \underline{0.21\ KWh}$$

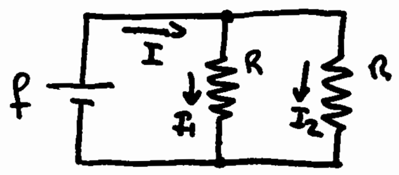
SCRITTO 12 APRILE 1988

LA BATTERIA DI UN'AUTOMOBILE ($f = 12\,V$) MANTIENE ACCESI DUE FARI (POTENZA 50 W CIASCUNO) PER UN'ORA.

CALCOLARE:

a) LA CORRENTE EROGATA DALLA BATTERIA

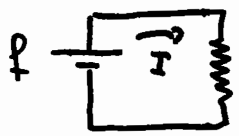
b) IL LAVORO TOTALE COMPIUTO DALLA BATTERIA



- CALCOLIAMO LA RESISTENZA DI UN FARO

$$P = \frac{V^2}{R} \Rightarrow R = \frac{V^2}{P} = \frac{f^2}{P} = \frac{12^2}{50} = 2.88\ \Omega$$

- IL CIRCUITO È EQUIVALENTE A:



$$R_{eq} = R /\!/ R = \frac{R \cdot R}{R + R} = \frac{R}{2} = \frac{2.88}{2} = 1.44\ \Omega$$

a) LA CORRENTE EROGATA VALE:

$$I = \frac{f}{R_{eq}} = \frac{12}{1.44} = 8.33\ A$$

b) LA POTENZA EROGATA VALE:

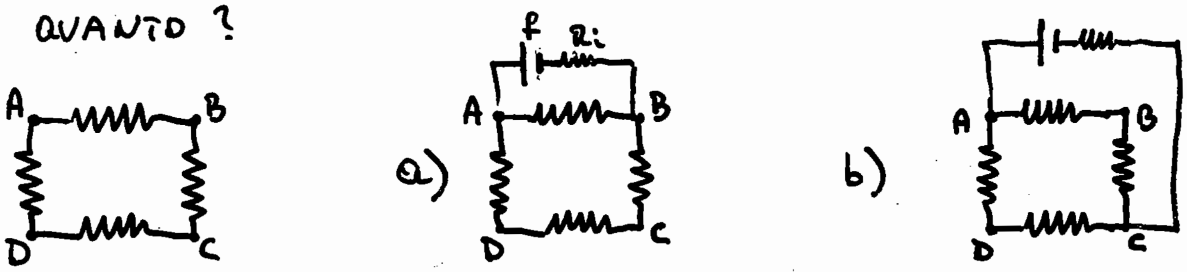
$$P = f \cdot I = 12 \cdot 8.33 = 99.96\ W \simeq 100\ W = 2 \cdot 50\ W$$

- IL LAVORO COMPIUTO DALLA BATTERIA VALE:

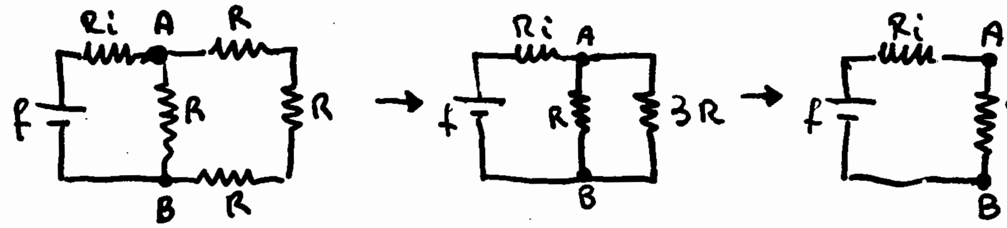
$$L = P \cdot \Delta t = (100\ W)(3600\ s) = 360\ KJ$$

SCRITTO 22 Novembre 1999

UN CIRCUITO ELETTRICO DI FORMA QUADRATA HA UNA RESISTENZA PARI A 2 Ω PER CIASCUN LATO. CHIAMIAMO A B C D I QUATTRO VERTICI DEL QUADRATO IN SENSO ORARIO. UNA PILA DI f.e.m. 12 V E RESISTENZA INTERNA DI 1 Ω, PUO' ESSERE CONNESSA AL CIRCUITO IN DUE MODI: a) IL POLO POSITIVO AL VERTICE A E IL NEGATIVO AL VERTICE B; b) IL POLO POSITIVO AL VERTICE A E IL NEGATIVO AL VERTICE C. IN QUALE DEI DUE CASI SI DISSIPA UNA POTENZA MAGGIORE DI QUANTO?



a)

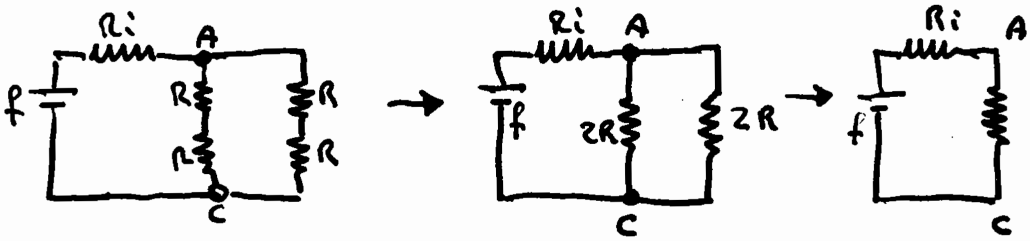


$$R_{eq} = \frac{R \cdot 3R}{(3+1)R} = \frac{3}{4} R$$

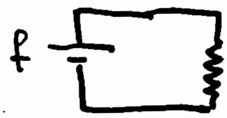
$$R_{eq} = R_i + \frac{3}{4} R = 1 + \frac{3}{4} \cdot 2 = 1 + 1.5 = 2.5\ \Omega$$

$$I = \frac{f}{R_{eq}} = \frac{12}{2.5} = 4.8\ A \quad ; \quad P = V \cdot I = 12 \cdot 4.8 = \underline{57.6\ W}$$

b)



$$R_{eq} = \frac{2R \cdot 2R}{(2+2)R} = R$$



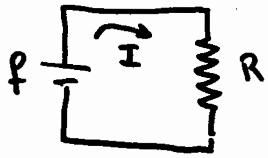
$$R_{eq} = R_i + R = 1 + 2 = 3\ \Omega$$

$$I = \frac{f}{R_{eq}} = \frac{12}{3} = 4\ A \quad ; \quad P = V \cdot I = 12 \cdot 4 = 48\ W$$

- LA POTENZA DISSIPATA È MAGGIORE NEL CASO a)
  $\Delta P = 57.6 - 48 = 9.6\ W$

PROVA SCRITTA - 22 NOVEMBRE 1996

UN FORNELLO, COSTITUITO DA UNA RESISTENZA ELETTRICA DI 20 Ω, E' ALIMENTATO DA UNA BATTERIA, CHE MANTIENE UNA d.d.p. CONTINUA DI 10 V AI CAPI DELLA RESISTENZA. UNA MASSA DI 100 g DI UN CERTO LIQUIDO VIENE PORTATA IN 8 MINUTI DA T = 30 °C A T = 50 °C AD OPERA DEL FORNELLO. SI CALCOLI QUANTO VALE IL CALORE SPECIFICO DEL LIQUIDO.



$$I = \frac{f}{R}$$ [LEGGE DI OHM]

- LA POTENZA DISSIPATA PER EFFETTO JOULE DALLA RESISTENZA VALE:

$$P = V \cdot I = R \cdot I^2 = \frac{V^2}{R}$$

- IN 8 MINUTI (8·60 = 480 SECONDI) L'ENERGIA DISSIPATA E':

$$E = P \cdot \Delta t = \frac{V^2}{R} \cdot \Delta t = \frac{10^2}{20} \cdot 480 = 2400 \text{ J}$$

- QUESTA ENERGIA RISCALDA IL LIQUIDO

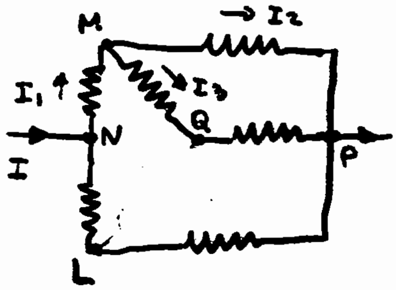
$$Q = m \cdot c \cdot \Delta T$$

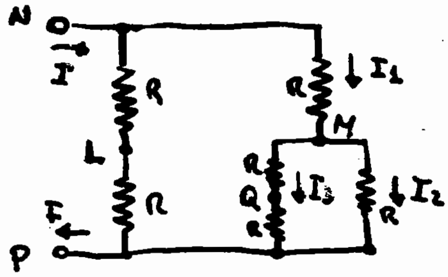
$$\Rightarrow \quad c = \frac{Q}{m \cdot \Delta T} = \frac{2400}{0.1 \cdot (50-30)} = 1200 \ \frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot \text{K}}$$

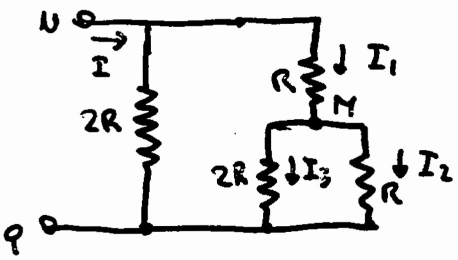
PROBLEMA

IL CIRCUITO MOSTRATO IN FIGURA RAPPRESENTA UNA RETE DI RESISTENZE R TUTTE UGUALI TRA LORO. UNA CORRENTE $I = 8\ A$ ENTRA NEL NODO N ED ESCE DAL NODO P. $R = 10\ \Omega$

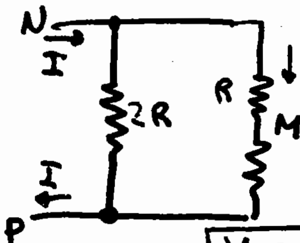
CALCOLARE L'INTENSITA' DI CORRENTE I_3 CHE PASSA NEL RAMO MQ.





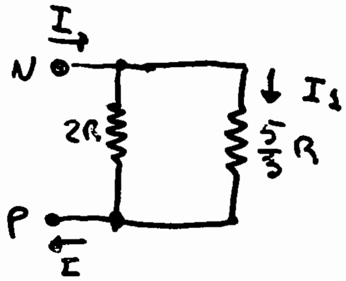


$$\boxed{V_{MP} = I_3 \cdot 2R \qquad I_3 = \frac{V_{MP}}{2R}}$$

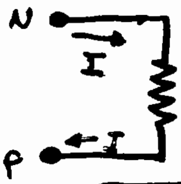


$$= \frac{2R \cdot R}{2R + R} = \frac{2}{3} R$$

$$\boxed{V_{MP} = I_1 \cdot \frac{2}{3} R}$$



$$\boxed{I_1 = \frac{V_{NP}}{\frac{5}{3} R}}$$



$$= \frac{2R \cdot \frac{5}{3} R}{2R + \frac{5}{3} R} = \frac{\frac{10}{3} R^2}{\frac{11}{3} R} = \frac{10}{11} R$$

$$\boxed{V_{NP} = I \cdot \frac{10}{11} R}$$

- $V_{NP} = I \cdot \frac{10}{11} R = 8 \cdot \frac{10}{11} \cdot 10 = 72.7273\ V$
- $I_1 = \frac{V_{NP}}{\frac{5}{3} R} = \frac{72.7273}{\frac{5}{3} \cdot 10} = 4.3636\ A$
- $V_{MP} = I_1 \cdot \frac{2}{3} R = 4.3636 \cdot \frac{2}{3} \cdot 10 = 29.0909\ V$
- $I_3 = \frac{V_{MP}}{2R} = \frac{29.0909}{2 \cdot 10} = \underline{1.45\ A}$

PROVA SCRITTA - 30 SETTEMBRE 199[illegible]

SI ABBIA UN FILO DI RAME, LUNGO 2.0 m, RICOPERTO DI GOMMA E DI DIAMETRO $d = 2.5$ mm. LA MASSIMA CORRENTE PERMESSA PER LIMITI DI SICUREZZA È $I = 25$ A. CON QUESTO VALORE DELLA CORRENTE DETERMINARE:

a) LA POTENZA SVILUPPATA PER EFFETTO JOULE

b) IL CAMPO $\vec{B}$ ORIGINATO DAL FILO AD UNA DISTANZA DI 8 cm.

DATI: RESISTIVITA' DEL RAME $= 1.7 \cdot 10^{-8}\ \Omega \cdot m$

o——o——o——o

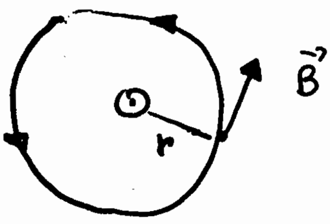
SECONDA LEGGE DI OHM

$$R = \rho \cdot \frac{\ell}{S} = 1.7 \cdot 10^{-8} \cdot \frac{2}{\pi\left(\frac{2.5 \cdot 10^{-3}}{2}\right)^2} = 6.9\ m\Omega$$

POTENZA DISSIPATA PER EFFETTO JOULE

$$P = R \cdot I^2 = 6.9 \cdot 10^{-3} \cdot 25^2 = 4.3\ W$$

IL CAMPO $\vec{B}$ SI CALCOLA CON LA LEGGE DI BIOT-SAVART



Il campo $\vec{B}$ è ortogonale al raggio

$$|\vec{B}| = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 25}{2\pi \cdot 0.08} = 6.25 \cdot 10^{-5}\ T$$

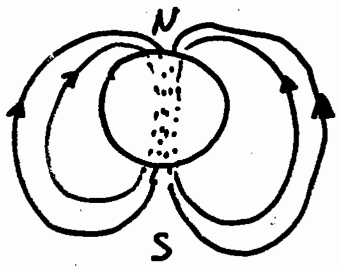
Magnetismo

- Campo magnetico
- Forza di Lorentz
- Carica in moto circolare
- Principio di equivalenza di Ampere
- Legge di Biot-Savart
- Campo B di un filo rettilineo infinito
- Forza magnetica tra due correnti
- Teorema di Gauss per il campo B
- Teorema di Ampere
- Solenoide e toroide
- Magnetismo nella materia
- Legge di Faraday – Neumann
- Legge di Lenz

MAGNETISMO

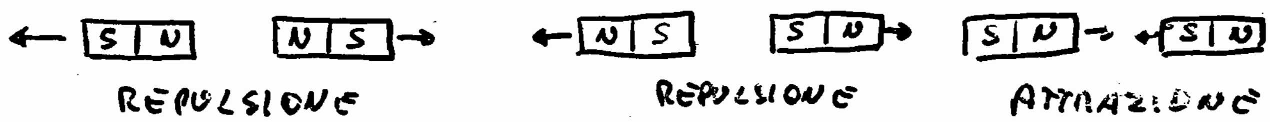
- 800 A.C. - IN GRECIA IL PASTORE MAGNES SCOPRE CHE UN PEZZO DI FERRO VIENE ATTRATTO DA UN CAMPO MAGNETICO
  - UNA PIETRA PROVENIENTE DA MAGNESIA (MAGNETITE) ATTRAE IL FERRO

- 1269 PIERRE de MARICOURT, USANDO UN MAGNETE NATURALE A FORMA DI SFERA ED UN AGO MAGNETICO, PRODUSSE UNA MAPPA DELLE LINEE DI FORZA DEL CAMPO.



INDIVIDUÒ COSÌ DUE POLI; UN POLO NORD ED UN POLO SUD

- DUE MAGNETI NATURALI SI ATTRAGGONO O RESPINGONO A SECONDO SE VI SONO DUE POLI OMONIMI CONTRAPPOSTI O MENO



- 1600 W. GILBERT CONTINUÒ QUESTI ESPERIMENTI. STUDIANDO LE ORIENTAZIONI DELL'AGO DI UNA BUSSOLA, SUGGERÌ CHE LA TERRA STESSA FOSSE UN GRANDE MAGNETE.

MAGNETISMO

1750 J. MICHELL USÒ UNA BILANCIA A TORSIONE PER STUDIARE QUANTITATIVAMENTE LE FORZE AGENTI TRA MAGNETI PERMANENTI

$$F_M = K \frac{q_m \cdot Q_m}{r^2}$$

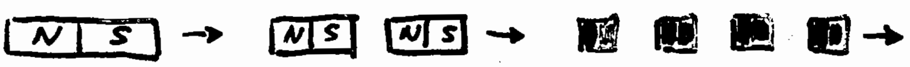
TROVÒ CHE LA FORZA, ATTRATTIVA O REPULSIVA, VARIA CON L'INVERSO DEL QUADRATO DELLA DISTANZA.

- IN ANALOGIA CON LA LEGGE DI COULOMB SI INTRODUSSE UNA CARICA ED UN CAMPO MAGNETICO H.

- TUTTAVIA L'ANALOGIA CON L'ELETTROSTATICA NON E' CORRETTA.

- IL CAMPO $\vec{H}$ NON E' IL CAMPO FONDAMENTALE DEL MAGNETISMO, MENTRE LO E' IL CAMPO $\vec{B}$

- INOLTRE NON SI POSSONO ISOLARE LE CARICHE MAGNETICHE; IN UN MAGNETE NON SI PUÒ SEPARARE IL POLO NORD DAL POLO SUD



e così via

- LE LINEE DEL CAMPO MAGNETICO $\vec{B}$ (induzione magnetica) SONO DELLE LINEE CHIUSE

- NON ESISTONO SORGENTI DEL CAMPO MAGNETICO (MONOPOLI MAGNETICI)

MAGNETISMO

1819 : H. OERSTED TROVA UNA RELAZIONE TRA MAGNETISMO E CORRENTE ELETTRICA
UN FILO PERCORSO DA CORRENTE FA DEFLETTERE UN AGO MAGNETICO POSTO NELLE VICINANZE.

1820 : A. AMPÈRE TROVA LE LEGGI QUANTITATIVE DELLA FORZA MAGNETICA CHE SI ESERCITA TRA CONDUTTORI IN CUI CIRCOLANO CORRENTI.
EGLI PROPOSE CHE ANCHE LE CORRENTI CHE PERCORRONO CIRCUITI DI DIMENSIONI MOLECOLARI SIANO RESPONSABILI DI TUTTI I FENOMENI MAGNETICI.

1825 : M. FARADAY E J. HENRY (INDIPENDENTEMENTE) DIMOSTRARONO CHE IN UN CIRCUITO SI PUO' FAR CIRCOLARE UNA CORRENTE ELETTRICA MUOVENDO UN MAGNETE NELLE SUE VICINANZE.

1860 : J.C. MAXWELL SINTETIZZO' TUTTI I LAVORI SPERIMENTALI E TEORICI SULL'ELETTRICITA' E SUL MAGNETISMO IN QUATTRO EQUAZIONI FONDAMENTALI.
PREDISSE L'ESISTENZA DELLE ONDE ELETTROMAGNETICHE.

1888 : H. HERTZ RIVELO' SPERIMENTALMENTE L'ESISTENZA DELLE ONDE ELETTROMAGNETICHE.

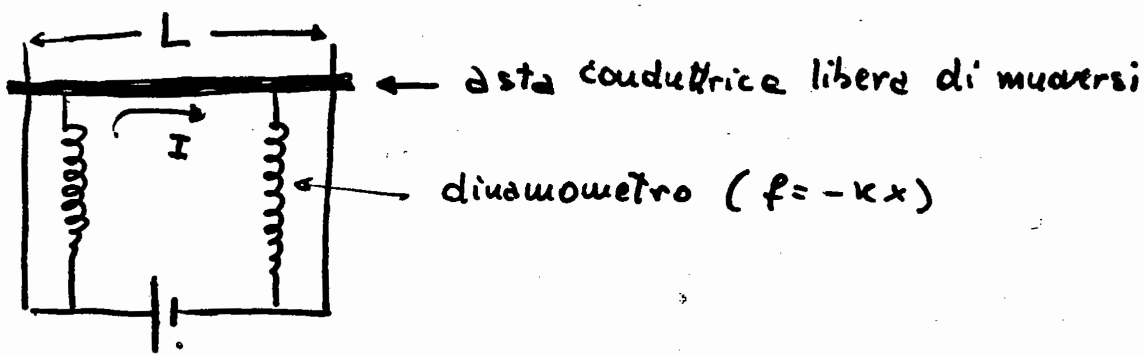
1900 : G. MARCONI INVENTO' IL TELEGRAFO SENZA FILI

CAMPO MAGNETICO $\vec{B}$

- LE FORZE TRA MAGNETI PERMANENTI SONO TROPPO COMPLESSE PER STUDIARE IL FENOMENO FONDAMENTALE.

- STUDIAMO LA FORZA CHE AGISCE SU UN FILO PERCORSO DA CORRENTE QUANDO E' IMMERSO IN UN CAMPO $\vec{B}$

- UTILIZZIAMO IL DISPOSITIVO SEGUENTE:



- IL DINAMOMETRO PERMETTE DI MISURARE LA FORZA CHE AGISCE SULL'ASTA CONDUTTRICE DI LUNGHEZZA L E PERCORSA DALLA CORRENTE I

- SI RISCONTRANO I SEGUENTI FATTI SPERIMENTALI:

a) $|\vec{F}| \propto I \cdot L$

b) $\vec{F}$ E' ORTOGONALE A $\vec{L}$ (vettore diretto come il filo L)

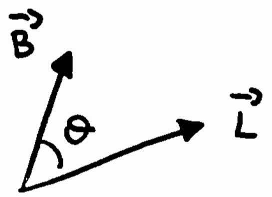
c) IN OGNI POSIZIONE LA FORZA DIPENDE DALL'ORIENTAZIONE DI L.
VI E' UNA DIREZIONE IN CUI LA FORZA E' NULLA, ED UNA ALTRA, ORTOGONALE AD ESSA, TALE CHE LA FORZA SIA MASSIMA.

CAMPO MAGNETICO $\vec{B}$

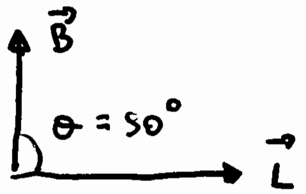
- I RISULTATI SPERIMENTALI POSSONO ESSERE RIASSUNTI DALLA SECONDA LEGGE DI LAPLACE

$$\vec{F} = I \vec{L} \times \vec{B}$$

- $\vec{B}$ È IL VETTORE CAMPO MAGNETICO NEL PUNTO DELLO SPAZIO IN CUI SI TROVA IL FILO L



$$|\vec{F}| = I L B \operatorname{sen}\theta$$



$$|\vec{F}| = I L B$$

$$\Rightarrow \quad B = \frac{F}{I L} \quad ; \quad [B] = \frac{[\text{FORZA}]}{[\text{CORRENTE}][\text{LUNGHEZZA}]}$$

- IL CAMPO $\vec{B}$ NEL S.I. SI MISURA IN TESLA

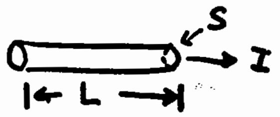
$$1\ T = 1\ \frac{N}{A \cdot m}$$

- IL CAMPO $\vec{B}$ SI MISURA ANCHE IN GAUSS (G)

$$1\ \text{TESLA} = 10^4\ \text{GAUSS}$$

FORZA DI LORENTZ

- $$\vec{F} = i\vec{L} \times \vec{B}$$



$$I\vec{L} = \vec{J}\cdot S\cdot L = \underbrace{n}_{\substack{\text{PORTATORI}\\ \text{PER UNITA'}\\ \text{DI VOLUME}}} q\,\vec{v}_d \underbrace{SL}_{\text{VOLUME DEL FILO}}$$

- $nSL = N$: numero di cariche nel volume SL

$$I\vec{L} = Nq\vec{v}_d$$

- $$\vec{F} = I\vec{L} \times \vec{B} = Nq\vec{v}_d \times \vec{B}$$

- CONSIDERIAMO ORA LA FORZA CHE AGISCE SULLA SINGOLA CARICA

$$\vec{F}_L = \frac{\vec{F}}{N} = q\vec{v} \times \vec{B} \qquad (\text{FORZA DI LORENTZ})$$

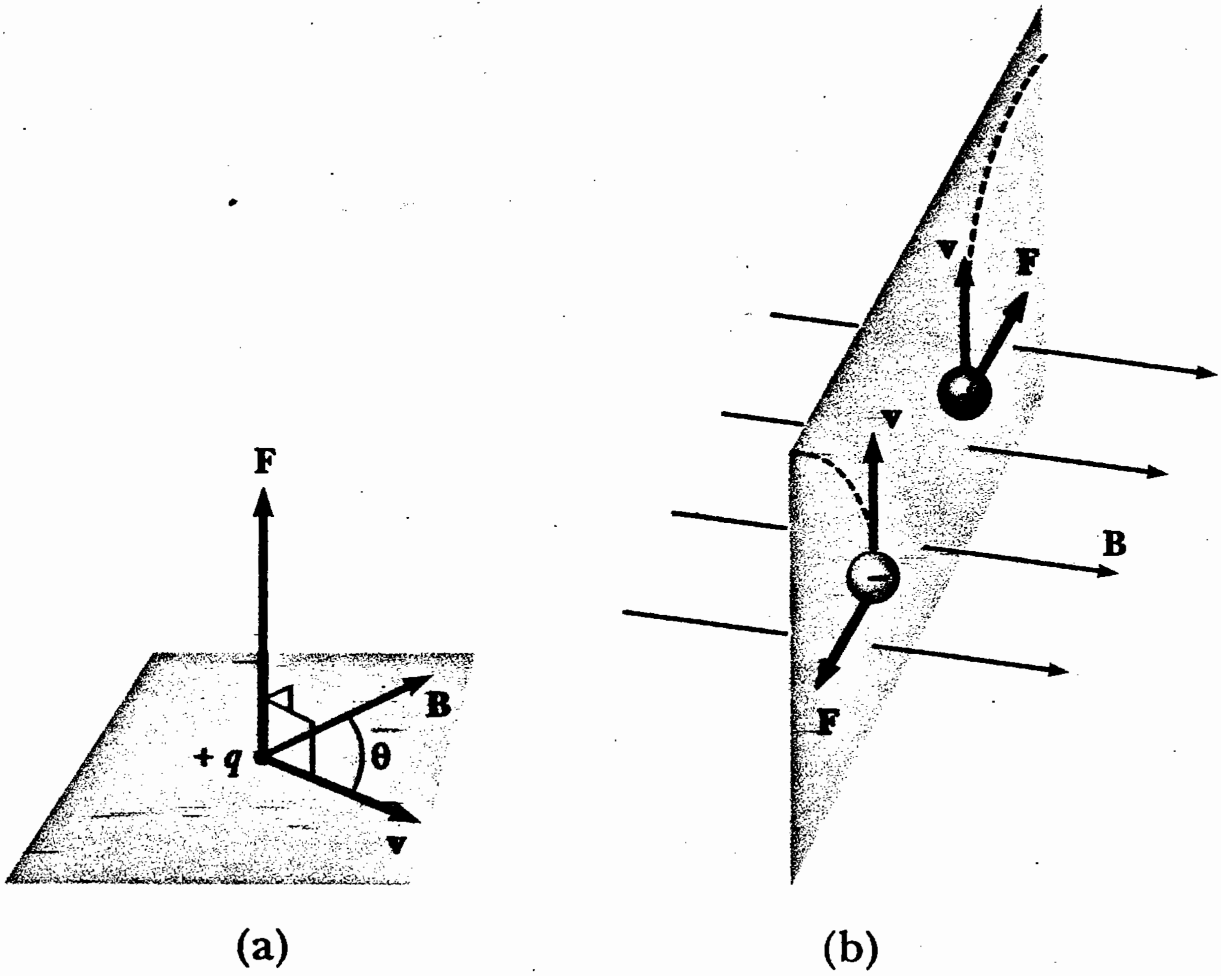
- DA NOTARE BENE:

  - LA FORZA DI LORENTZ È SEMPRE ORTOGONALE ALLA VELOCITÀ
  - LA FORZA DI LORENTZ NON COMPIE LAVORO, QUINDI NON FA VARIARE L'ENERGIA CINETICA DELLA CARICA

$$dL = \vec{F}\cdot d\vec{s} = (q\vec{v}\times\vec{B})\cdot d\vec{s} = (q\vec{v}\times\vec{B})\cdot\vec{v}\,dt = 0$$

  - LA FORZA È PROPORZIONALE ALLA VELOCITÀ, QUINDI UNA CARICA FERMA ($\vec{v}=0$) NON È SOGGETTA ALLA FORZA DI LORENTZ.
  - IN UNA REGIONE DI SPAZIO IN CUI È PRESENTE UN CAMPO ELETTRICO $\vec{E}$ ED UN CAMPO MAGNETICO $\vec{B}$ LA FORZA CHE AGISCE SU UNA PARTICELLA DI CARICA q E VELOCITÀ $\vec{v}$ È:

$$\vec{F} = q\vec{E} + q\vec{v} \times \vec{B}$$



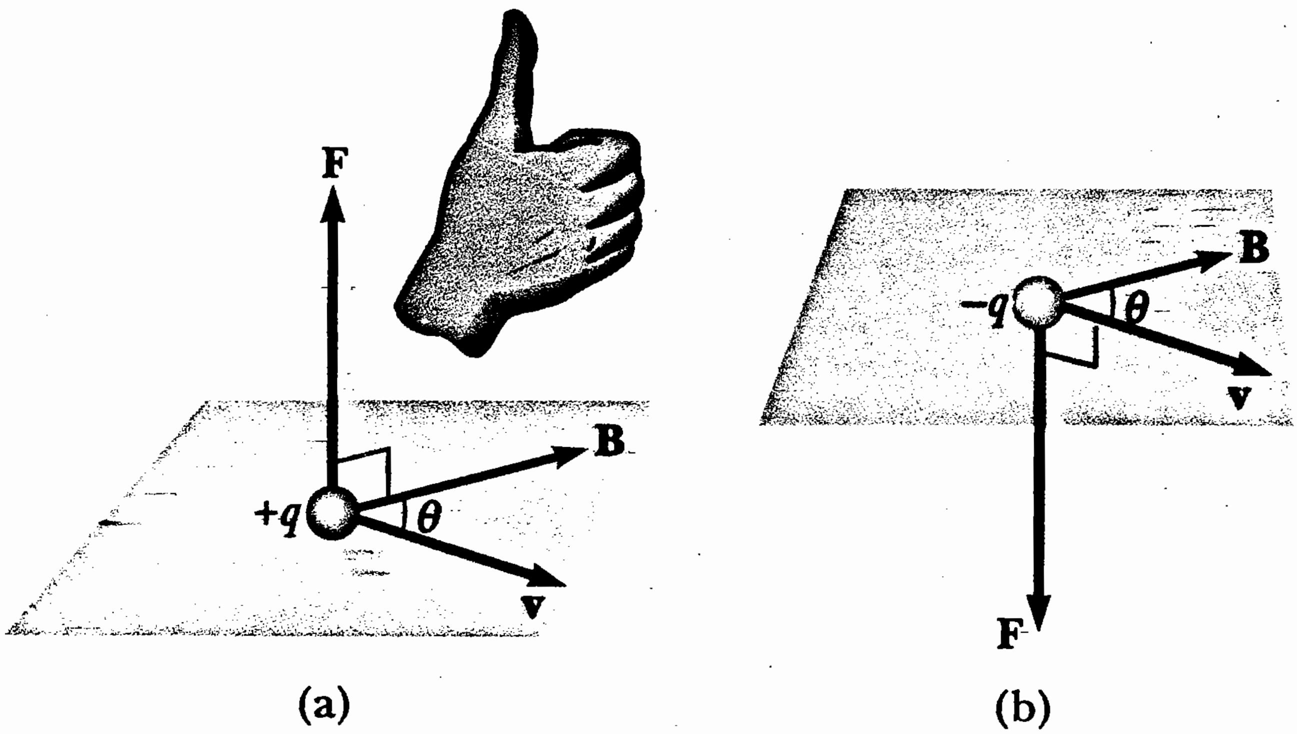


Figure 20.3 e 20.4 ☞ pag. 578

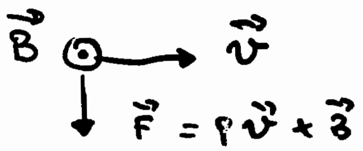
Serway, *Principi di Fisica*

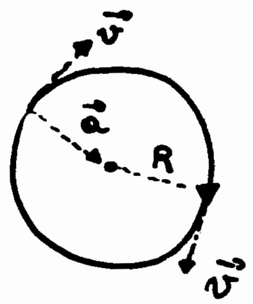
CARICA IN MOTO CIRCOLARE

- SUPPONIAMO DI AVERE UN CAMPO $\vec{B}$ IN DIREZIONE VERTICALE DIRETTO DAL BASSO VERSO L'ALTO

- UNA PARTICELLA DI CARICA q (POSITIVA) E MASSA m ENTRA NEL CAMPO CON VELOCITA' $\vec{v}$ IN DIREZIONE ORIZZONTALE DIRETTA DA SINISTRA A DESTRA.

- LA PARTICELLA SEGUIRA' UNA TRAIETTORIA CIRCOLARE PERCORSA IN SENSO ORARIO





- $\vec{v}$ E $\vec{B}$ SONO ORTOGONALI, ALLORA:

$$|\vec{F}| = qvB \quad ; \quad F = ma = m\frac{v^2}{R}$$ (accelerazione centripeta)

$$\Rightarrow \quad qvB = m\frac{v^2}{R}$$

- QUINDI: $\boxed{R = \frac{mv}{qB}}$ (raggio della circonferenza)

TROVIAMO IL PERIODO, CIOE' IL TEMPO CHE IMPIEGA LA PARTICELLA A PERCORRERE LA CIRCONFERENZA

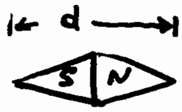
$$T = \frac{2\pi R}{v} = \frac{2\pi}{v}\frac{mv}{qB} = \frac{2\pi m}{qB}$$ (e' indipendente dalla velocita')

$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{qB}{2\pi m}$$ (frequenza di ciclotrone)

$$\omega = 2\pi\nu = \frac{qB}{m}$$ (pulsazione)

PRINCIPIO DI EQUIVALENZA DI AMPÈRE

- UN AGO MAGNETICO IMMERSO IN UN CAMPO MAGNETICO $\vec{B}$ SUBISCE DELLE AZIONI MECCANICHE: TRASLA E RUOTA

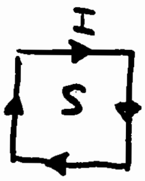


(AGO MAGNETICO)

- IN ANALOGIA CON IL DIPOLO ELETTRICO $-q$ $\quad \vec{p} = q\vec{d}$
SI DEFINÌ UN MOMENTO DI DIPOLO MAGNETICO μ PER QUANTIFICARE LE AZIONI MECCANICHE

$$\vec{\mu} = q_m \cdot \vec{d} \quad \text{(da cui si ricava la carica magnetica } q_m\text{)}$$

- PRENDIAMO ORA UNA SPIRA DI AREA S PERCORSA DALLA CORRENTE I



- SI PUÒ DEFINIRE UN MOMENTO DI DIPOLO MAGNETICO DELLA SPIRA PARI A:

$$\vec{\mu} = I S \hat{n} \quad (\hat{n} \text{ versore normale alla superficie})$$

- LA SPIRA IMMERSA IN UN CAMPO $\vec{B}$ SUBISCE LE STESSE SOLLECITAZIONI MECCANICHE DI UN AGO MAGNETICO DI MOMENTO μ PARI A $I \cdot S$

- QUINDI L'AGO E LA SPIRA SONO EQUIVALENTI

ESERCIZI CONSIGLIATI

Cariche in moto in un campo magnetico

- Serway (3° Edizione) – Cap. 22
  - 1 – 3 – 5 – 7 – 9 – 13 – 49 – 53
- Halliday (5° Edizione) – Cap. 29
  - 1E – 3E – 5P – 7E – 9P – 11P – 15E – 17E – 19E – 27P – 29E – 31P

ESONERO 3 - ESERCIZIO 5

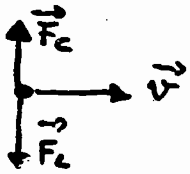
<u>Esonero 3 - Esercizio 5</u> (6 punti)
Un selettore di velocità ha il campo magnetico di modulo <u>0.2 T</u> perpendicolare ad un campo elettrico di modulo <u>0.4 MV/m</u>.
a) Quale deve essere la velocità della particella per poterlo attraversare senza deflessione?
Che energia devono avere (b) protoni e (c) elettroni per attraversarlo senza deflessioni?
(Risultato: a) $2 \cdot 10^6\ m/s$, b) 20.9 keV; c) 11.4 eV)

$\vec{F}_L = q\,\vec{v} \times \vec{B}$ Forza di Lorentz

$\vec{F}_c = q\,\vec{E}$ Forza di Coulomb

- VELOCITA' ORTOGONALE A $\vec{B}$ E ORTOGONALE A $\vec{E}$

AFFINCHE' LA PARTICELLA NON SIA DEFLESSA SI DEVE AVERE



$|\vec{F}_c| = |\vec{F}_L| \Rightarrow qE = qvB$

- $v = \frac{E}{B} = \frac{0.4 \cdot 10^6}{0.2} = \underline{2 \cdot 10^6}\ m/s$

- ENERGIA CINETICA DEL PROTONE

$m_p = 1.67 \cdot 10^{-27}\ Kg$

- $K = \frac{1}{2} m_p \cdot V^2 = \frac{1}{2} \cdot 1.67 \cdot 10^{-27} \cdot (2 \cdot 10^6)^2 = 3.34 \cdot 10^{-15}\ J$

- $\frac{3.34 \cdot 10^{-15}}{1.6 \cdot 10^{-19}} = \underline{20.9\ keV}$

- ENERGIA CINETICA DELL'ELETTRONE

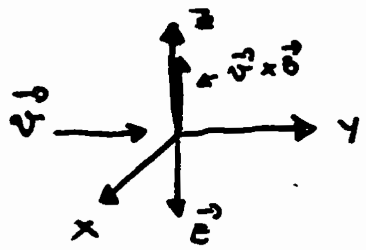
$m_e = 9.1 \cdot 10^{-31}\ Kg$

- $K = \frac{1}{2} m_e \cdot V^2 = \frac{1}{2} \cdot 9.1 \cdot 10^{-31} \cdot (2 \cdot 10^6)^2 = 1.82 \cdot 10^{-18}\ J$

- $\frac{1.82 \cdot 10^{-18}}{1.6 \cdot 10^{-19}} = \underline{11.4\ eV}$

PROBLEMA

UN ELETTRONE CON ENERGIA CINETICA DI 2.5 KeV SI MUOVE ORIZZONTALMENTE IN UNA REGIONE DELLO SPAZIO DOVE ESISTE UN CAMPO ELETTRICO RIVOLTO VERTICALMENTE VERSO IL BASSO DI 10 kV/m. QUAL'E' IL MODULO E LA DIREZIONE DEL CAMPO MAGNETICO CHE PERMETTEREBBE ALL'ELETTRONE DI CONTINUARE A MUOVERSI ORIZZONTALMENTE?



$$\vec{v} = v\hat{j}$$
$$\vec{E} = -E\hat{k}$$
$$\vec{v}\times\vec{B} = vB\hat{k} \qquad (\vec{B} \text{ ortogonale a } \vec{v})$$

DOBBIAMO TROVARE UN CAMPO $\vec{B}$ TALE CHE:

$$\vec{F} = q\vec{E} + q\vec{v}\times\vec{B} = q(\vec{E}+\vec{v}\times\vec{B}) = 0 \Rightarrow \vec{v}\times\vec{B} = -\vec{E}$$

$$\begin{cases} \hat{i}\times\hat{j} = \hat{k} \\ \hat{j}\times\hat{k} = \hat{i} \\ \hat{k}\times\hat{i} = \hat{j} \end{cases} ; \begin{cases} \hat{j}\times\hat{i} = -\hat{k} \\ \hat{k}\times\hat{j} = -\hat{i} \\ \hat{i}\times\hat{k} = -\hat{j} \end{cases} \Rightarrow \hat{j}\times(-\hat{i}) = \hat{k}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\vec{B} = -B\hat{i}}$$

TROVIAMO ORA IL MODULO DI $\vec{B}$

$$\vec{v}\times\vec{B} = -\vec{E} \Rightarrow |\vec{v}\times\vec{B}| = vB = |\vec{E}| \Rightarrow \boxed{B = \frac{E}{v}}$$

TROVIAMO LA VELOCITA' v DELLA PARTICELLA

$$K = 2.5 \text{ KeV} << mc^2 = 511 \text{ keV} \Rightarrow K = \frac{1}{2}mv^2 \text{ (meccanica classica)}$$

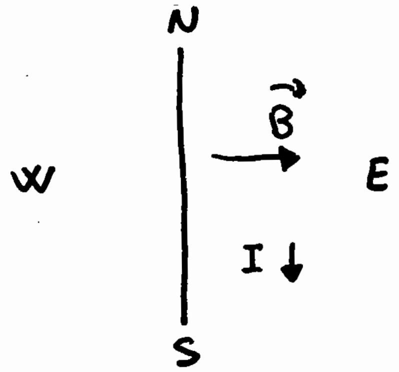
$$K = 2.5\cdot 10^3 \text{ eV} \cdot 1.6\cdot 10^{-19}\frac{J}{eV} = 4\cdot 10^{-16} \text{ J}$$

$$v = \sqrt{\frac{2K}{m}} = \sqrt{\frac{2\cdot 4\cdot 10^{-16}}{9.1\cdot 10^{-31}}} \doteq 2.96\cdot 10^{7} \frac{m}{s}$$

$$B = \frac{E}{v} = \frac{10^4}{2.96\cdot 10^7} = 3.4\cdot 10^{-4} \text{ T}$$

PROBLEMA

UN FILO CON UNA MASSA PER UNITA' DI LUNGHEZZA DI 0.500 g/cm PORTA UNA CORRENTE DI 2.0 A DIRETTA VERSO SUD. QUALI SONO LA DIREZIONE E IL MODULO DEL CAMPO MAGNETICO MINIMO NECESSARIO PER SOLLEVARE IL FILO?



- LA FORZA DI GRAVITA', VERSO IL BASSO, VALE:

$$\vec{F}_g = mg = \rho \cdot L \cdot g$$

- QUINDI E' NECESSARIA UNA FORZA DI LORENTZ, VERSO L'ALTO, DI INTENSITA' MAGGIORE

$$\vec{F}_L = I\,\vec{L} \times \vec{B} = ILB$$

- IN CONDIZIONI DI EQUILIBRIO LE DUE FORZE SONO UGUALI

$$ILB = \rho L g \quad \Rightarrow \quad B \geq \frac{\rho g}{I}$$

$$\rho = 0.500\ \frac{g}{cm} = 0.500\ \frac{10^{-3}\,kg}{10^{-2}\,m} = 0.5 \cdot 10^{-1} = 5.0 \cdot 10^{-2}\ \frac{kg}{m}$$

$$B \geq \frac{\rho g}{I} = \frac{5.0 \cdot 10^{-2} \cdot 9.8}{2} = 245\ mT$$

- AFFINCHE' LA FORZA DI LORENTZ SIA DIRETTA VERSO L'ALTO, IL CAMPO $\vec{B}$ DEVE ESSERE DIRETTO DA OVEST VERSO EST

PROBLEMA

UNA PARTICELLA α ($q = +2e$, $m = 4.0\,u$) SI MUOVE SU UN CAMMINO CIRCOLARE DI RAGGIO 4.50 cm IN UN CAMPO MAGNETICO DI INTENSITA' $B = 1.2\,T$. SI CALCOLI a) LA SUA VELOCITA', b) IL SUO PERIODO DI RIVOLUZIONE, c) LA SUA ENERGIA CINETICA IN eV, d) LA d.d.p. ALLA QUALE DOVREBBE ESSERE SOTTOPOSTA PER RAGGIUNGERE QUESTA ENERGIA.

N.B. u = UNITA' DI MASSA ATOMICA $= 1.661 \cdot 10^{-27}$ kg

a) $$R = \frac{mv}{qB} \Rightarrow v = \frac{RqB}{m} = \frac{0.045 \cdot 2 \cdot 1.6 \cdot 10^{-19} \cdot 1.2}{4 \cdot 1.661 \cdot 10^{-27}} = 2.6 \cdot 10^{6}\ \frac{m}{s}$$

b) $$T = 2\pi \frac{m}{qB} = 2\pi \frac{4 \cdot 1.661 \cdot 10^{-27}}{2 \cdot 1.6 \cdot 10^{-19} \cdot 1.2} = 1.1 \cdot 10^{-7}\,s$$

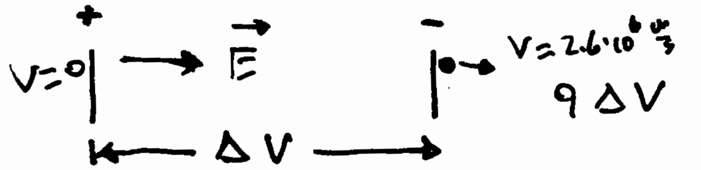
$$T = \frac{2\pi R}{v} = 2\pi \frac{0.045}{2.6 \cdot 10^{6}} = 1.1 \cdot 10^{-7}\,s$$

c) $$v = 2.6 \cdot 10^{6}\ \frac{m}{s} \ll c = 3 \cdot 10^{8}\ \frac{m}{s} \Rightarrow \text{meccanica classica}$$

$$K = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 1.661 \cdot 10^{-27} \cdot (2.6 \cdot 10^{6})^2 = 22.45 \cdot 10^{-15}\,J$$

$$= \frac{22.45 \cdot 10^{-15}}{1.6 \cdot 10^{-19}} = 1.40 \cdot 10^{5}\,eV$$

d) INIZIALMENTE L'ELETTRONE E' FERMO E POI VIENE ACCELERATO FINO A RAGGIUNGERE L'ENERGIA CINETICA $1.40 \cdot 10^{5}$ eV

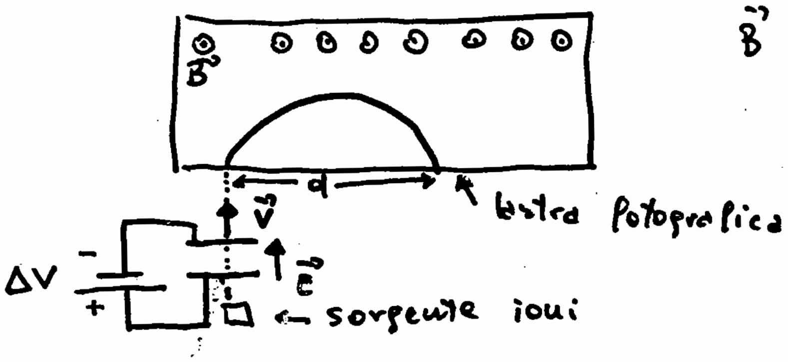


$$q\Delta V = \Delta K$$

$$\Delta V = \frac{\Delta K}{q} = \frac{1.40 \cdot 10^{5}\,eV}{2e} = 0.70 \cdot 10^{5}\,V = 70\,kV$$

PROBLEMA

IN UNO SPETTROMETRO DI MASSA UNO IONE DI CARICA +e VIENE ACCELERATO DA UNA d.d.p. DI 1 KV PRIMA DI ENTRARE IN UNA ZONA IN CUI È PRESENTE UN CAMPO $\vec{B}$ VERTICALE DI 80 mT. LO IONE COMPIE UNA TRAIETTORIA SEMICIRCOLARE DI DIAMETRO d = 1.625 m. TROVARE LA MASSA DELLO IONE IN UNITÀ DI MASSA ATOMICA.



$\vec{B}$ è uscente dal foglio

- TROVIAMO LA VELOCITÀ v CON LA QUALE LO IONE ENTRA NELLA REGIONE DOVE È PRESENTE IL CAMPO $\vec{B}$

$$K = \frac{1}{2} m v^2 = \Delta U = q \Delta V \Rightarrow v^2 = \frac{2q\Delta V}{m}$$

ALL'INTERNO DEL CAMPO MAGNETICO SI HA:

$$R = \frac{mv}{qB} \Rightarrow R^2 = \frac{m^2 v^2}{q^2 B^2} = \frac{m^2}{q^2 B^2} \frac{2q\Delta V}{m} = \frac{m\, 2\Delta V}{q B^2}$$

$$\Rightarrow m = \frac{R^2 q B^2}{2\Delta V} = \frac{(1.625/2)^2 \cdot (1.6 \cdot 10^{-19})(8 \cdot 10^{-2})^2}{2 \cdot 10^3} = 33.8 \cdot 10^{-19-4-3} =$$

$$= 338 \cdot 10^{-27}\ \text{Kg}$$

UNA UNITÀ DI MASSA ATOMICA u È PARI A $1.660 \cdot 10^{-27}$ Kg

$$\Rightarrow m = \frac{338 \cdot 10^{-27}}{1.660 \cdot 10^{-27}} = 203.6\ u$$

PROVA SCRITTA - 17 NOV. 1989

UN FASCIO, COMPOSTO DI IONI POSITIVI DI CLORO (DIFFERENTI ISOTOPI, MA TUTTI DI CARICA +e) VIENE INVIATO CON VELOCITA' INIZIALE $\vec{v}$ IN UNA REGIONE DELLO SPAZIO OVE ESISTE UN CAMPO MAGNETICO $\vec{B}$ ORTOGONALE A $\vec{v}$. DIFFERENTI ISOTOPI COMPIONO TRAIETTORIE DIFFERENTI: ALCUNI DI ESSI PERCORRONO UNA CIRCONFERENZA DI DIAMETRO D_1, ALTRI DI DIAMETRO D_2. DETERMINARE IL NUMERO DI NEUTRONI PRESENTI NEI DUE TIPI DI ISOTOPI.

DATI: $V = 2\cdot10^4$ m/s, $B = 0.1$ T, $e = 1.6\cdot10^{-19}$ C, $m(p) = m(n) = 1.66\cdot10^{-27}$ kg

$Z(Cl) = 17$, $D_1 = 14.54$ cm; $D_2 = 15.36$ cm

o——o——o——o

- LE PARTICELLE SONO SOTTOPOSTE ALLA FORZA DI LORENTZ

$$\vec{F} = q\,\vec{v}\times\vec{B}$$

- PERCORRONO UNA TRAIETTORIA CIRCOLARE DI RAGGIO

$$R = \frac{mv}{qB}$$

- IN QUESTO CASO L'INCOGNITA E' LA MASSA

$$m_1 = \frac{qB}{V}\frac{D_1}{2} = \frac{1.6\cdot10^{-19}\cdot0.1}{2\cdot10^4}\cdot\frac{0.1454}{2} = 5.8160\cdot10^{-26}\ \text{kg}$$

$$m_2 = \frac{qB}{V}\frac{D_2}{2} = \frac{1.6\cdot10^{-19}\cdot0.1}{2\cdot10^4}\cdot\frac{0.1536}{2} = 6.1440\cdot10^{-26}\ \text{kg}$$

- DETERMINIAMO IL NUMERO DI NUCLEONI DEI DUE IONI

$$N_1 = \frac{m_1}{m_p} = \frac{5.8160\cdot10^{-26}}{1.66\cdot10^{-27}} = 35 \quad \text{[neutroni più protoni]}$$

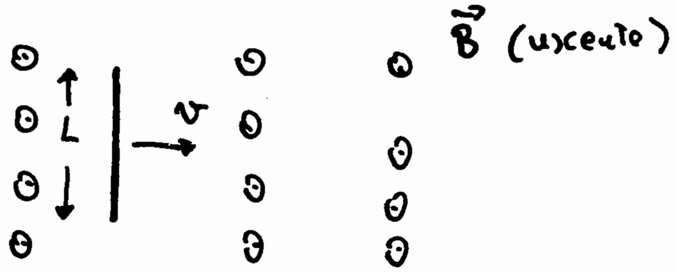
$$N_2 = \frac{m_2}{m_p} = \frac{6.1440\cdot10^{-26}}{1.66\cdot10^{-27}} = 37$$

- TROVIAMO IL NUMERO DI NEUTRONI

$N_{n1} = N_1 - Z = 35 - 17 = 18$; $N_{n2} = N_2 - Z = 37 - 17 = 20$ neutroni.

PROVA SCRITTA - 7 LUGLIO 1997

UN FILO DI LUNGHEZZA 1 m SI MUOVE ALLA VELOCITA' DI 2 m/s PERPENDICOLARMENTE AD UN CAMPO MAGNETICO DI 0.5 T. SI CALCOLI LA d.d.p. AI CAPI DEL FILO. SE GLI ESTREMI DEL FILO SONO CONNESSI IN MODO CHE SI POSSA FORMARE UN CIRCUITO DI RESISTENZA 6 Ω, QUANTA POTENZA OCCORRE FORNIRE AL FILO PER MANTENERLO A VELOCITA' COSTANTE? SI NOTI CHE LA PARTE RESTANTE DEL CIRCUITO E' POSTA ALL'ESTERNO DEL CAMPO $\vec{B}$.



$$\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$$

- SUGLI ELETTRONI DEL FILO AGISCE LA FORZA DI LORENTZ
$$|\vec{F}| = qvB \quad (\vec{v} \text{ e } \vec{B} \text{ sono ortogonali})$$

- QUESTA CORRISPONDE AD UN CAMPO ELETTRICO PARI A:
$$|\vec{E}| = \frac{|\vec{F}|}{q} = vB$$

- LA d.d.p. AI CAPI DEL FILO VALE:
$$d.d.p. = \int_0^L \vec{E}\cdot d\vec{l} = \int_0^L E\,dl = E\int_0^L dl = EL = vBL$$
$$d.d.p. = vBL = 2 \cdot 0.5 \cdot 1 = \underline{1\,V = f}$$

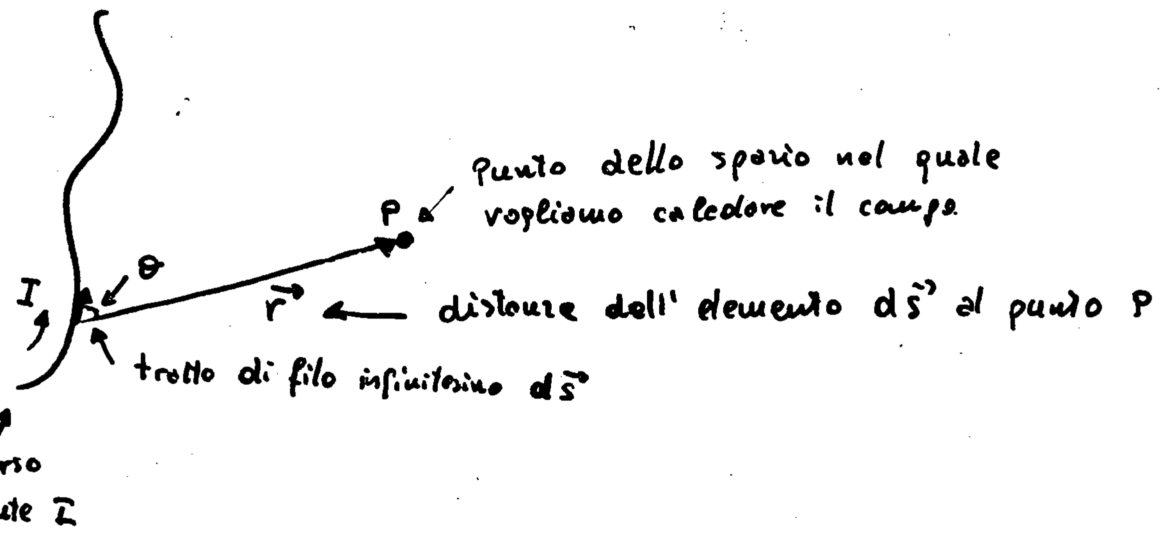
NEL CIRCUITO DI RESISTENZA R VIENE DISSIPATA LA POTENZA
$$P = \frac{f^2}{R} = \frac{1^2}{6} = 0.167\ W$$

TALE POTENZA DEVE ESSERE FORNITA DALL'ESTERNO DAL DISPOSITIVO CHE MANTIENE IN MOTO IL FILO CON VELOCITA' COSTANTE

CALCOLO DEL CAMPO MAGNETICO

- NON ESISTE LA CARICA MAGNETICA CHE POSSA GENERARE IL CAMPO MAGNETICO $\vec{B}$

- IL CAMPO MAGNETOSTATICO, CIOÈ CHE NON VARIA CON IL TEMPO, È ORIGINATO DA UNA CORRENTE ELETTRICA



- DATO CHE IL CIRCUITO IN CUI PASSA LA CORRENTE PUÒ AVERE FORMA QUALSIASI, DOBBIAMO CONSIDERARE I CONTRIBUTI DEI SINGOLI PEZZETTINI DI FILO INFINITESIMI

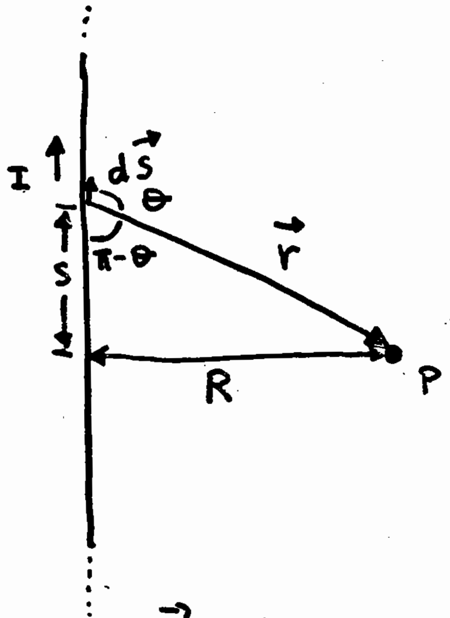
$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I\, d\vec{s} \times \vec{r}}{|\vec{r}|^3}$$ (legge di Biot-Savart oppure prima legge di Laplace)

$$\vec{B}(\vec{P}) = \oint d\vec{B}$$ (l'integrale è esteso al circuito della corrente I)

- μ_0 = PERMEABILITÀ MAGNETICA DEL VUOTO

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}\ T \cdot \frac{m}{A}$$

CAMPO $\vec{B}$ DI UN FILO RETTILINEO ∞



$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{d\vec{s} \times \vec{r}}{r^3}$$

$$|\vec{r}| = \sqrt{s^2+R^2}$$

$$\sin\theta = \sin(\pi-\theta) = \frac{R}{\sqrt{s^2+R^2}} = \frac{R}{r}$$

- IL VETTORE $d\vec{B}$ È ORTOGONALE SIA A $d\vec{s}$ CHE A $\vec{r}$
- DATO IL VERSO DELLA CORRENTE SCELTO, $d\vec{B}$ ENTRA NEL FOGLIO
- $$|d\vec{B}| = \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{ds\, r \sin\theta}{r^3} = \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{ds \sin\theta}{r^2} =$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi} I\, ds\, \frac{R}{r} \cdot \frac{1}{r^2} = \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{R}{(s^2+R^2)^{3/2}} ds$$

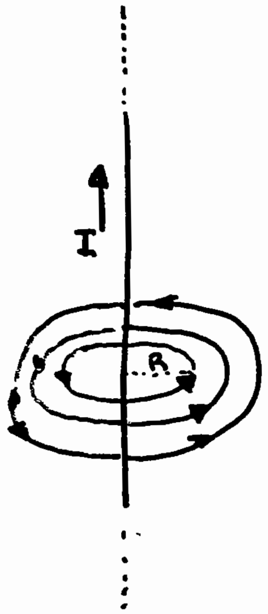
- PER TROVARE IL CAMPO $\vec{B}$ DOBBIAMO SOMMARE SU TUTTI GLI ELEMENTI INFINITESIMI $d\vec{s}$

$$B = \int_{-\infty}^{+\infty} dB = 2\int_0^{\infty} dB = 2\frac{\mu_0}{4\pi} I R \int_0^{\infty} \frac{ds}{(s^2+R^2)^{3/2}} =$$

$$= \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I}{R} \left[\frac{s}{(s^2+R^2)^{1/2}}\right]_0^{\infty} = \frac{\mu_0}{2\pi R} I$$

$$B = \frac{\mu_0}{2\pi R} I$$

CAMPO $\vec{B}$ DI UN FILO RETTILINEO ∞



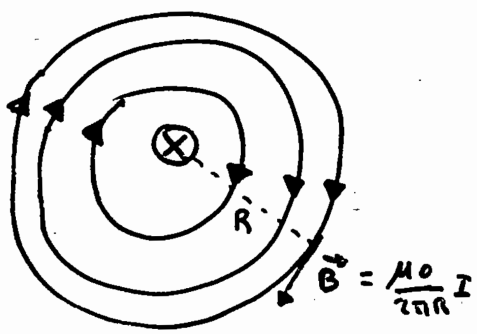
$$B = \frac{\mu_0}{2\pi R} I$$

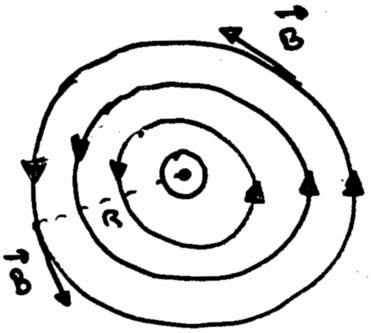
R = distanza del punto dal filo

- LE LINEE DEL CAMPO $\vec{B}$ SONO DELLE CIRCONFERENZE CONCENTRICHE CON IL FILO

- IL VERSO DEL CAMPO È TALE CHE SE METTETE IL POLLICE DELLA MANO DESTRA NEL VERSO DELLA CORRENTE E CHIUDETE IL PALMO, OTTENETE IL VERSO DI $\vec{B}$

- SE CAMBIATE IL VERSO DELLA CORRENTE CAMBIA ANCHE IL VERSO DI $\vec{B}$

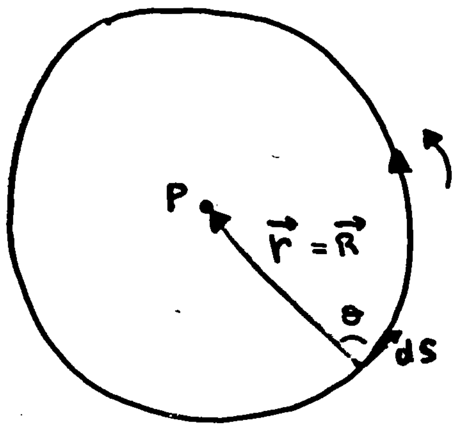




⊗ corrente entrante nella pagina

⊙ CORRENTE USCENTE DALLA PAGINA

CAMPO $\vec{B}$ AL CENTRO DI UNA SPIRA CIRCOLARE



$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{d\vec{s} \times \vec{r}}{r^3}$$

- SE I CIRCOLA IN VERSO ANTIORARIO ALLORA $\vec{B}$ È USCENTE DAL FOGLIO
- LA SPIRA HA RAGGIO R

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{ds\, R}{R^3} = \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{ds}{R^2}$$

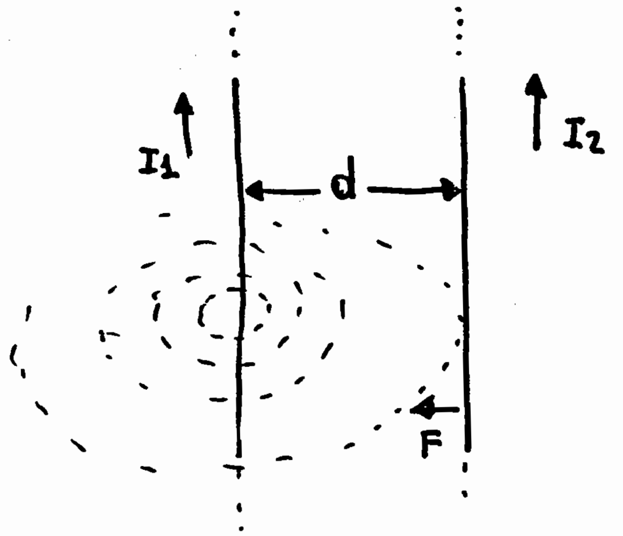
- SOMMIAMO ORA SU TUTTA LA CIRCONFERENZA

$$B = \oint dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I}{R^2} \oint ds = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I}{R^2} 2\pi R = \frac{\mu_0 I}{2R}$$

- QUINDI NEL CENTRO DELLA SPIRA SI HA:

$$B = \frac{\mu_0}{2R} I$$

FORZA MAGNETICA TRA DUE CONDUTTORI INFINITI PARALLELI



- CORRENTI CONCORDI = ATTRAZIONE
- CORRENTI DISCORDI = REPULSIONE

- LA CORRENTE I_1 CHE SCORRE NEL PRIMO FILO CREA NELLA POSIZIONE OCCUPATA DAL SECONDO FILO UN CAMPO $\vec{B}$ ORTOGONALE AL FILO STESSO (in questo caso entrante nel foglio)

$$B = \frac{\mu_0}{2\pi d} I_1$$

SUL FILO 2 AGISCE LA FORZA $\vec{F} = I_2 \vec{L} \times \vec{B}$ DIRETTA VERSO L'ALTRO FILO

$$F = I_2 L B = I_2 L \frac{\mu_0}{2\pi d} I_1 = I_1 \cdot I_2 \frac{\mu_0}{2\pi d} \cdot L$$

LA FORZA PER UNITA' DI LUNGHEZZA VALE:

$$\frac{F}{L} = \frac{\mu_0}{2\pi d} I_1 \cdot I_2$$

[Scambiando il ruolo dei due fili si ottiene lo stesso risultato]

DEFINIZIONE DELL'AMPERE:

TRA DUE FILI INFINITI A DISTANZA DI 1 m PERCORSI DA UNA CORRENTE DI 1 A, VI E' UNA FORZA PER UNITA' DI LUNGHEZZA PARI A:

$$\frac{F}{L} = \frac{\mu_0}{2\pi \cdot 1} \cdot 1 \cdot 1 = \frac{\mu_0}{2\pi} = \frac{4\pi \cdot 10^{-7}}{2\pi} = 2 \cdot 10^{-7} \frac{N}{m}$$

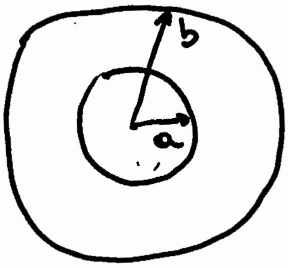
ESERCIZI CONSIGLIATI

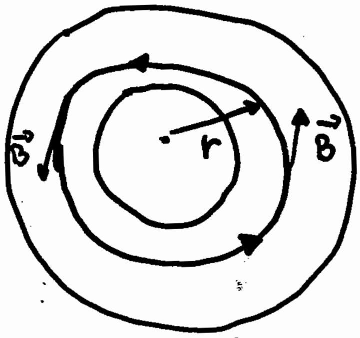
Calcolo del campo magnetico

- Serway (3° Edizione) – Cap. 22
    - 21 – 23 – 27 – 31
- Halliday (5° Edizione) – Cap. 30
    - 1E – 3E – 19E – 21E – 23P – 25P – 27P

PROBLEMA SVOLTO 30-4 (Halliday)

LA FIGURA MOSTRA LA SEZIONE TRASVERSALE DI UN LUNGO CONDUTTORE CILINDRICO CON RAGGIO INTERNO $a = 2.0$ cm E RAGGIO ESTERNO $b = 4.0$ cm. NEL CILINDRO FLUISCE UNA CORRENTE USCENTE DAL PIANO DEL LIBRO E LA DENSITA' DI CORRENTE SULLA SEZIONE E' DATA DA $J = cr^2$, CON $c = 3.0 \cdot 10^6\ A/m^4$ ED r IN METRI. TROVARE IL CAMPO $\vec{B}$ IN UN PUNTO DISTANTE 3.0 cm DALL'ASSE DEL CILINDRO.





- PER RAGIONI DI SIMMETRIA LE LINEE DEL CAMPO $\vec{B}$ NON POSSONO CHE ESSERE DELLE CIRCONFERENZE CONCENTRICHE CON L'ASSE DEL CILINDRO.
- DATO CHE LA CORRENTE ESCE IL CAMPO $\vec{B}$ E' ANTIORARIO
- PER TROVARE IL MODULO DI $\vec{B}$ USIAMO IL TEOREMA DI AMPERE

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 I_{INTERNA} \quad ; \quad \oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = B \oint ds = B 2\pi r$$

$$I_{INTERNA} = \int_S J\,dA = \int_a^r c r^2 (2\pi r\,dr) = 2\pi c \int_a^r r^3 dr = 2\pi c \left[\frac{r^4}{4}\right]_a^r = \frac{\pi c (r^4 - a^4)}{2}$$

$$B 2\pi r = \mu_0 \frac{\pi c (r^4 - a^4)}{2} \Rightarrow B = \frac{\mu_0 c}{4r}(r^4 - a^4)$$

PER $r = 3$ cm SI HA:

$$B = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 3.0 \cdot 10^6}{4 \cdot 0.03}\left(0.03^4 - 0.02^4\right) = 2.0 \cdot 10^{-5}\ T$$

ESONERO 1 - ESERCIZIO 5

<u>Esonero 1 - Esercizio 5</u> (6 punti)

Un filo conduttore rettilineo molto lungo è percorso da una corrente di intensità 20.0 A. Un elettrone, che dista 1.0 cm dal centro del filo, si muove alla velocità di $5.0 \cdot 10^6$ m/s. Si trovi la forza agente sull'elettrone (in modulo, direzione e verso) quando esso:

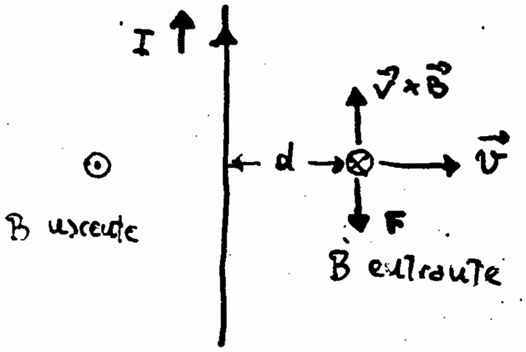
a) si allontana dal filo secondo una direzione perpendicolare ad esso,

b) si muove parallelamente al filo nel verso della corrente,

c) si muove in una direzione perpendicolare al filo e tangente a una circonferenza con il centro sul filo.

(Risultato: a) $3.2 \cdot 10^{-16}$ N, nella direzione orientata opposta a quella della corrente; b) $3.2 \cdot 10^{-16}$ N, nella direzione perpendicolare al filo e orientata nel verso opposto ad esso; c) 0)

a)



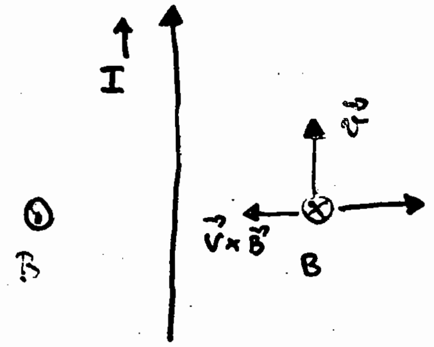
$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 20}{2\pi \cdot 10^{-2}} = \underline{4 \cdot 10^{-4}\ T}$$

$$\vec{F} = q\, \vec{v} \times \vec{B}$$

$$F = e v B = 1.6 \cdot 10^{-19} \cdot 5 \cdot 10^{6} \cdot 4 \cdot 10^{-4} = 3.2 \cdot 10^{-16}\ N$$

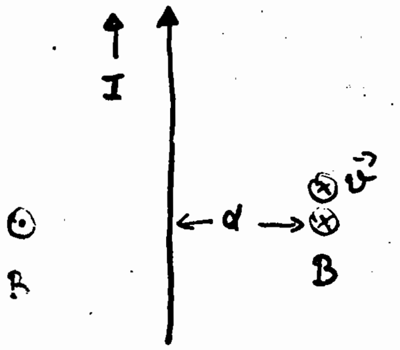
[N.B. la carica dell'elettrone è negativa, quindi la forza è diretta in verso opposto a $\vec{v} \times \vec{B}$

b)



$F = evB = 3.2 \cdot 10^{-16}$ N

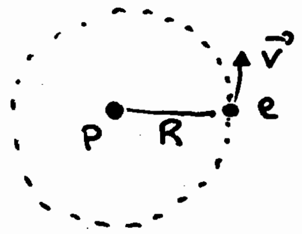
c)



IN QUESTO CASO LA VELOCITA' E' PARALLELA AL CAMPO B, PER CUI $\underline{F = 0}$

PROBLEMA

NEL MODELLO DEL 1913 DELL'ATOMO DI IDROGENO DI N. BOHR UN ELETTRONE RUOTA ATTORNO AD UN PROTONE AD UNA DISTANZA DI $5.29 \cdot 10^{-11}$ m CON UNA VELOCITA' DI $2.19 \cdot 10^{6} \frac{m}{s}$. CALCOLARE IL CAMPO MAGNETICO PRODOTTO DAL MOTO DELL'ELETTRONE NELLA POSIZIONE DEL PROTONE.



- L'ELETTRONE IN MOTO CIRCOLARE UNIFORME EQUIVALE AD UNA CORRENTE. DOBBIAMO TROVARE QUANTE VOLTE IN UN SECONDO PASSA ATTRAVERSO UNA DATA SEZIONE DELL'ORBITA.

$$T = \frac{2\pi R}{v} \quad ; \quad \nu = \frac{1}{T} = \frac{v}{2\pi R}$$

- IN UN SECONDO UNA CARICA $-e$ PASSA ν VOLTE ATTRAVERSO UNA SEZIONE.

$$I = \frac{q}{\Delta t} = q \cdot \nu = e\frac{v}{2\pi R} = 1.6 \cdot 10^{-19} \frac{2.19 \cdot 10^{6}}{2\pi \cdot 5.29 \cdot 10^{-11}} =$$

$$= 0.1054 \cdot 10^{-19+6+11} = 1.1 \text{ mA}$$

- $$B = \frac{\mu_0}{4\pi}\oint i\frac{d\vec{s} \times \vec{r}}{r^3} = \frac{\mu_0}{4\pi} i \frac{1}{R^2}\oint ds = \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{2\pi R}{R^2} = \frac{\mu_0}{2R} I$$

$$B = \frac{\mu_0}{2R} I = \frac{4\pi \cdot 10^{-7}}{2 \cdot 5.29 \cdot 10^{-11}} \cdot 1.1 \cdot 10^{-3} = 1.31 \cdot 10^{11-7-3} = 13.1 \text{ T}$$

- I CAMPI MAGNETICI NELLA MATERIA, PUNTO PER PUNTO, SONO MOLTO FORTI, PERO' SI ANNULLANO TRA DI LORO E L'EFFETTO MEDIO E' ZERO

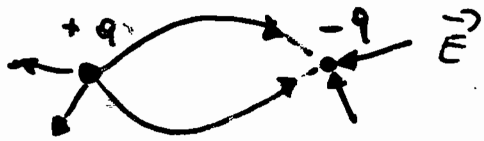
TEOREMA DI GAUSS PER IL CAMPO $\vec{B}$

- RICORDIAMO IL TEOREMA DI GAUSS PER IL CAMPO ELETTROSTATICO

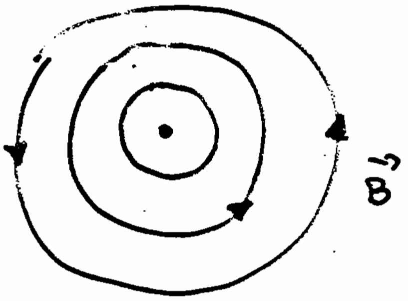
$$\Phi_{S_{CHIUSA}}(\vec{E}) = \frac{Q_i}{\varepsilon_0}$$

Q_i = carica racchiusa dalla superficie S CHIUSA

- LE LINEE DEL CAMPO $\vec{E}$ HANNO ORIGINE DALLE CARICHE q



- NEL CASO DEL CAMPO MAGNETICO NON ESISTONO CARICHE MAGNETICHE, QUINDI LE LINEE DEL CAMPO SI CHIUDONO SU LORO STESSE

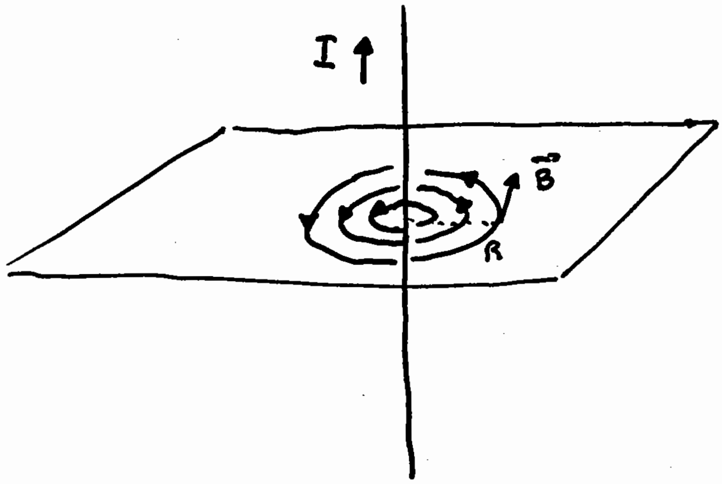


- SE CALCOLIAMO IL FLUSSO DEL CAMPO $\vec{B}$ ATTRAVERSO UNA SUPERFICIE S CHIUSA QUALSIASI, SI OTTIENE <u>SEMPRE</u>:

$$\Phi_{S_{CHIUSA}}(\vec{B}) = 0$$

TEOREMA DI AMPERE

- PRENDIAMO IN ESAME IL CAMPO $\vec{B}$ GENERATO DA UN FILO RETTILINEO INFINITO PERCORSO DALLA CORRENTE I
- LE LINEE DEL CAMPO $\vec{B}$ SONO DELLE CIRCONFERENZE CONCENTRICHE CON IL FILO E GIACENTI SU UN PIANO ORTOGONALE AL FILO STESSO



$$B = \frac{\mu_0}{2\pi R} I$$

- CALCOLIAMO LA CIRCUITAZIONE DI $\vec{B}$ LUNGO UNA CIRCONFERENZA

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \oint \frac{\mu_0}{2\pi R} I \, ds = \frac{\mu_0}{2\pi R} I \oint ds = \frac{\mu_0}{2\pi R} I \cdot 2\pi R = \mu_0 I$$

QUINDI

$$\boxed{\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 I}$$ TEOREMA DI AMPERE

N.B. I È LA CORRENTE CONCATENATA CON LA LINEA CHIUSA SCELTA PER CALCOLARE L'INTEGRALE

I VA PRESA CON UN SEGNO ALGEBRICO

TEOREMA DI AMPERE

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 I$$

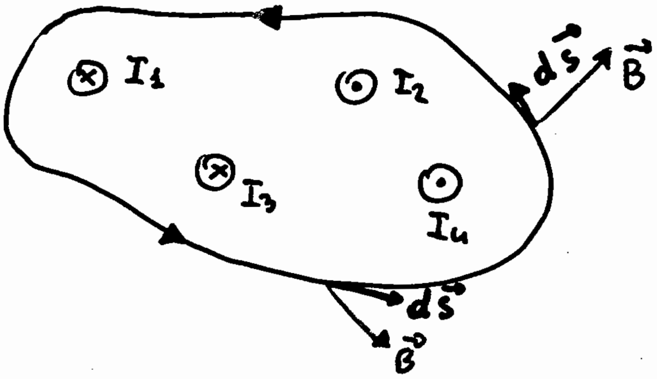
- NELLA SUA FORMA PIÙ GENERALE SI HA:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 \sum_{i=1}^{n} I_i$$

- LE I_i SONO LE CORRENTI CONCATENATE CON LA LINEA SCELTA PER FARE L'INTEGRAZIONE.

- LE CORRENTI USCENTI DALLA SUPERFICIE INDIVIDUATA DALLA LINEA, PERCORSA IN VERSO ANTIORARIO, SONO POSITIVE E QUELLE ENTRANTI NEGATIVE.

ESEMPIO:

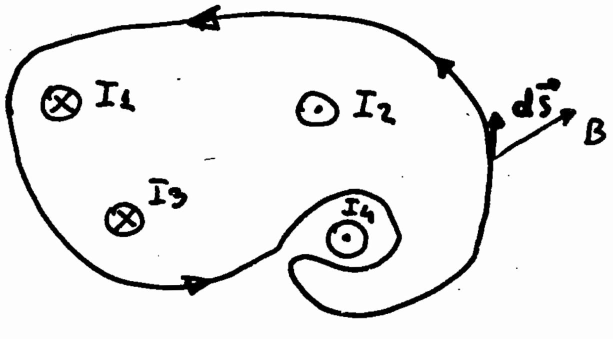


$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 \left(-I_1 + I_2 - I_3 + I_4\right)$$

⊗ ENTRANTE

⊙ USCENTE

ESEMPIO:

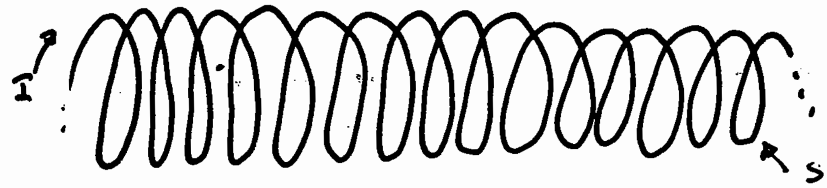


$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 \left(-I_1 + I_2 - I_3\right)$$

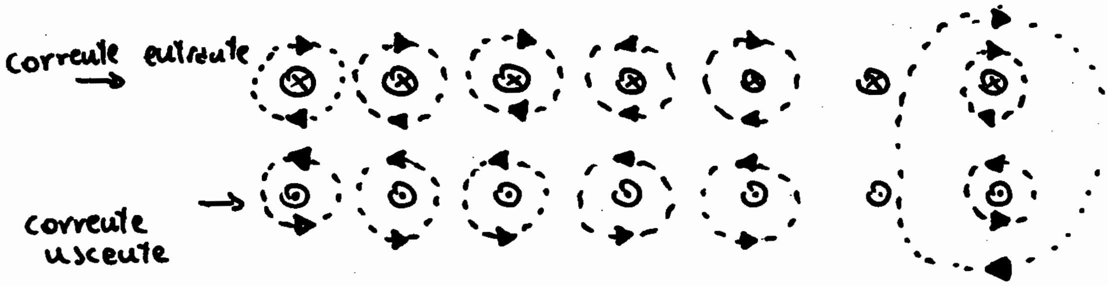
N.B. I_4 non è concatenata con la linea

N.B. SE SI PERCORRE LA LINEA IN SENSO OPPOSTO, I SEGNI DELLE CORRENTI SI INVERTONO

CAMPO MAGNETICO DI UN SOLENOIDE



- CONSIDERIAMO UN SOLENOIDE (BOBINA) DI LUNGHEZZA INFINITA



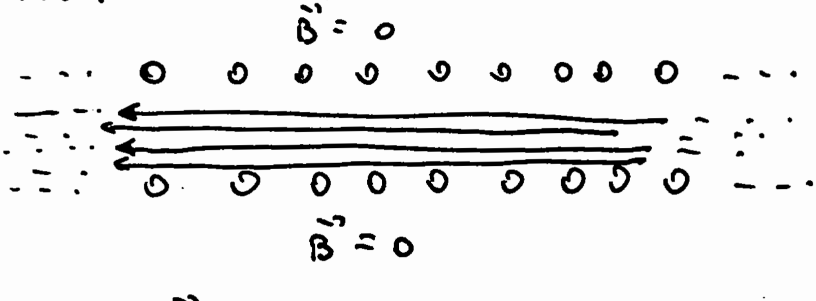
(viste di taglio del solenoide

- CONSIDERIAMO QUELLO CHE ACCADE IN UN PIANO CHE PASSA PER L'ASSE DEL SOLENOIDE

- LA PARTE DI SPIRA NELLA QUALE LA CORRENTE ENTRA NEL PIANO GENERA UN CAMPO $\vec{B}$ CIRCOLARE DIRETTO IN SENSO ORARIO MENTRE NELLE SPIRE NELLE QUALI LA CORRENTE ESCE È DIRETTO IN SENSO ANTIORARIO

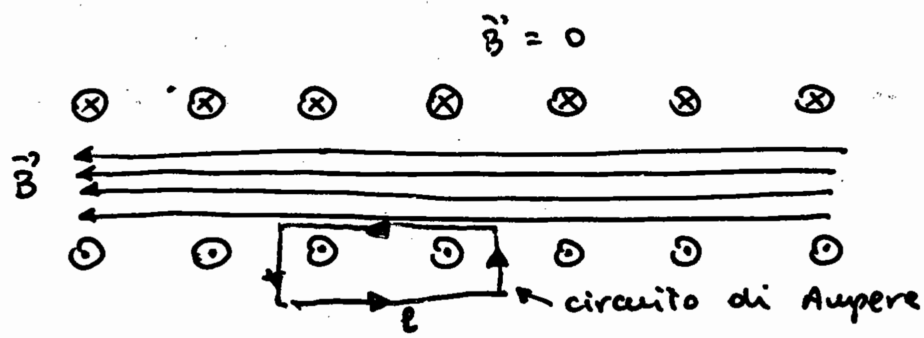
NELLA PARTE DI SPAZIO TRA LE SPIRE I CAMPI SONO DIRETTI NELLO STESSO VERSO, QUINDI SI SOMMANO, MENTRE AL DI FUORI DELLE SPIRE SONO DIRETTI IN VERSO OPPOSTO, QUINDI SI SOTTRAGGONO

RISULTATO:



IL CAMPO $\vec{B}$ È NULLO AL DI FUORI DEL SOLENOIDE ED È PARALLELO ALL'ASSE ALL'INTERNO, ED È UNIFORME.

CAMPO $\vec{B}$ DI UN SOLENOIDE



- CONSIDERIAMO UN SOLENOIDE INFINITO (OPPURE UN SOLENOIDE LA CUI LUNGHEZZA È MOLTO MAGGIORE DELLA DIMENSIONE TRASVERSALE)

- INDICHIAMO CON n IL NUMERO DI SPIRE PER UNITÀ DI LUNGHEZZA

$$n = \frac{N}{L} = \frac{\text{numero di spire del solenoide}}{\text{lunghezza del solenoide}}$$

- PER TROVARE IL VALORE DEL CAMPO UTILIZZIAMO IL TEOREMA DI AMPERE

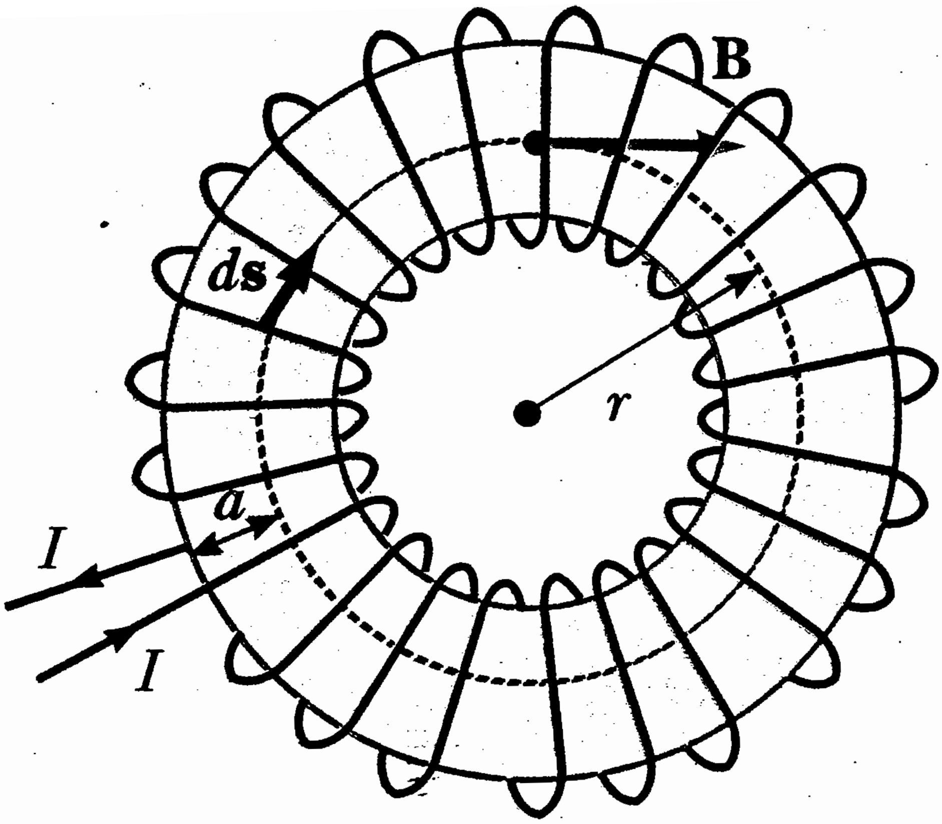
- SCEGLIAMO UN PERCORSO RETTANGOLARE CON UN LATO DENTRO IL SOLENOIDE

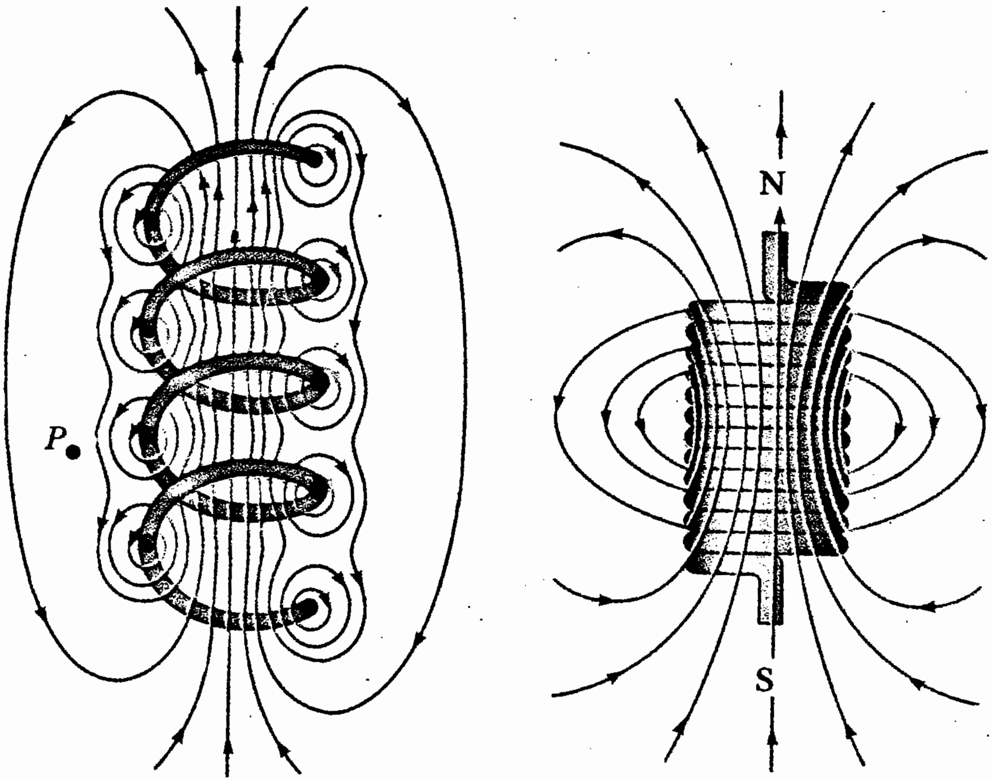
- IL LATO DENTRO IL SOLENOIDE È LUNGO ℓ ED È L'UNICO CHE CONTRIBUISCE ALL'INTEGRALE

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 I_{INTERNA}$$

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = B \cdot \ell = \mu_0 n \cdot \ell \cdot I$$

$$\boxed{B = \mu_0 n I}$$



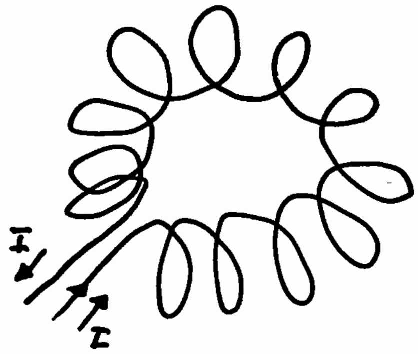


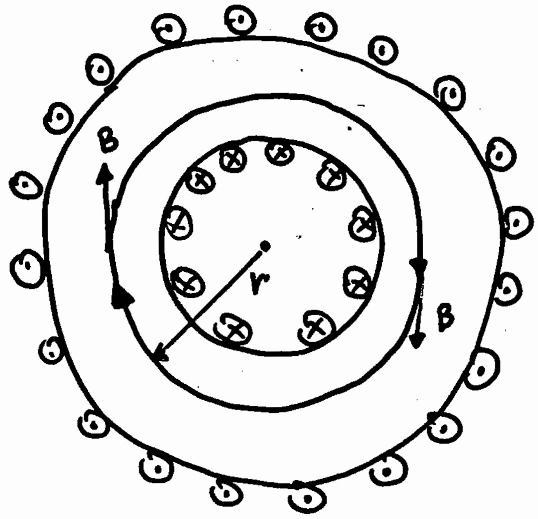
(a) (b)

'igure 20.21 e 20.23 ☞ pagg. 591 e 593

Serway, *Principi di Fisica*

CAMPO $\vec{B}$ DI UN TOROIDE





- PER RAGIONI DI SIMMETRIA LE LINEE DEL CAMPO $\vec{B}$ SONO DELLE CIRCONFERENZE
- SIA N IL NUMERO TOTALE DI SPIRE ED I LA CORRENTE CHE CIRCOLA NELLE SPIRE
- PER CALCOLARE B USIAMO IL TEOREMA DI AMPERE

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 I_{INTERNA}$$

- SCEGLIAMO COME LINEA UNA CIRCONFERENZA DI RAGGIO r

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = B \oint ds = B\, 2\pi r$$ (il verso di integrazione e' antiorario)

$$I_{INTERNA} = -NI$$

ALLORA:

$$B\, 2\pi r = -\mu_0 NI$$

$$\Rightarrow \quad B = -\frac{\mu_0 NI}{2\pi r}$$

N.B. IL SEGNO MENO VUOL DIRE CHE IL CAMPO $\vec{B}$ RUOTA IN SENSO ORARIO

MAGNETISMO NELLA MATERIA

- VI SONO TRE TIPI DI SOSTANZE MAGNETICHE

- DIAMAGNETICHE (NaCl, rame, piombo, zolfo, carbonio, argento, ...)

  $\chi_m < 0 \Rightarrow \mu_r < 1 \qquad [\chi_m \simeq -10^{-4}]$

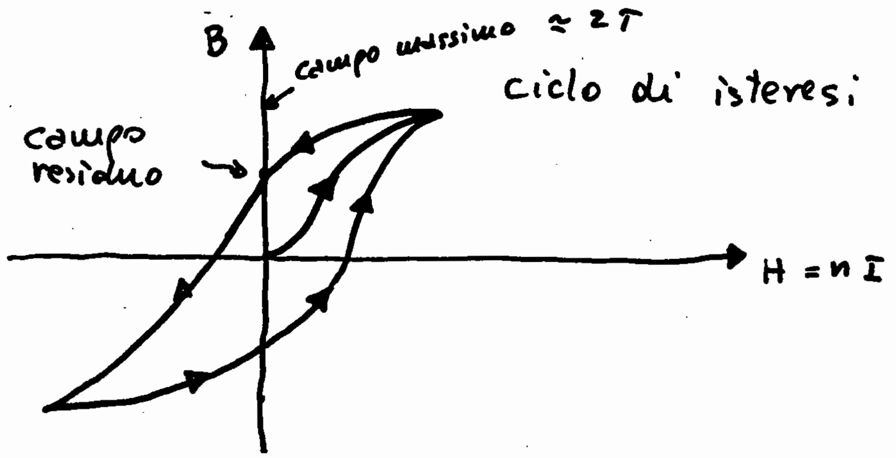
  $B < B_0$ (campo $\vec{B}$ nel vuoto)

- PARAMAGNETICHE (Alluminio, platino, cromo)

  $\chi_m > 0 \Rightarrow \mu_r > 1 \qquad [\chi_m \simeq +10^{-3}]$

  $B > B_0$ (campo $\vec{B}$ nel vuoto)

- FERROMAGNETICHE (ferro, cobalto, nichel)



- NELLE SOSTANZE FERROMAGNETICHE NON VI È UNA RELAZIONE BIUNIVOCA TRA $\vec{B}$ E $\vec{H}$

- PER MATERIALI CON UN CICLO DI ISTERESI STRETTO SI PUO' APPROSSIMARE IL CICLO CON UNA RETTA E SI HA:

$$B = \mu_r \mu_0 \vec{H} = \mu_r B_0$$

DOVE $\mu_r \simeq 10^3$

MAGNETISMO NELLA MATERIA

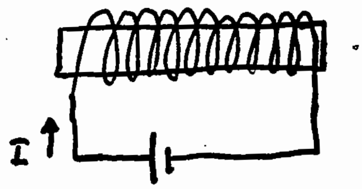
- PRENDIAMO UN SOLENOIDE LE CUI SPIRE SONO AVVOLTE NEL VUOTO (ARIA)

$$B = \mu_0 n I$$

- INTRODUCIAMO IL CAMPO $\underline{H = nI}$, ABBIAMO:

$$B = \mu_0 H$$

- METTIAMO ORA UN MATERIALE DENTRO IL SOLENOIDE



- IL CAMPO MAGNETICO $\vec{H}$ PRESENTE DENTRO IL MATERIALE ORIENTA I "MAGNETINI ELEMENTARI", I QUALI DANNO UN CONTRIBUTO ADDIZIONALE AL CAMPO $\vec{B}$

QUESTO CONTRIBUTO È RIASSUNTO DAL VETTORE POLARIZZAZIONE MAGNETICA $\vec{M}$, IL QUALE È PROPORZIONALE AL CAMPO $\vec{H}$

$$\vec{M} = \chi_m \vec{H} \qquad (\chi_m = \text{suscettività magnetica})$$

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H} + \mu_0 \vec{M} = \mu_0 (1 + \chi_m) \vec{H} = \mu_0 \mu_r \vec{H}$$

$$\mu_r = 1 + \chi_m \quad = \text{permeabilità magnetica relativa}$$

[μ_0 = PERMEABILITÀ MAGNETICA DEL VUOTO]

ESERCIZI CONSIGLIATI

Teorema di Ampere e solenoidi

- Serway (3° Edizione) – Cap. 22
  - 33 – 35 – 37 – 41
- Halliday (5° Edizione) – Cap. 30
  - 29E – 33P – 39E – 41E – 43P

PROBLEMA

UN SOLENOIDE SUPERCONDUTTORE È COSTRUITO PER GENERARE UN CAMPO MAGNETICO DI 10.0 T. a) SE L'AVVOLGIMENTO DEL SOLENOIDE È COSTITUITO DA 2000 spire/m, QUAL'È LA CORRENTE RICHIESTA? b) QUALE FORZA PER UNITA' DI LUNGHEZZA È ESERCITATA DA QUESTO CAMPO MAGNETICO SULLE SPIRE DEL SOLENOIDE?

o—o—o

IL CAMPO DI UN SOLENOIDE VALE:

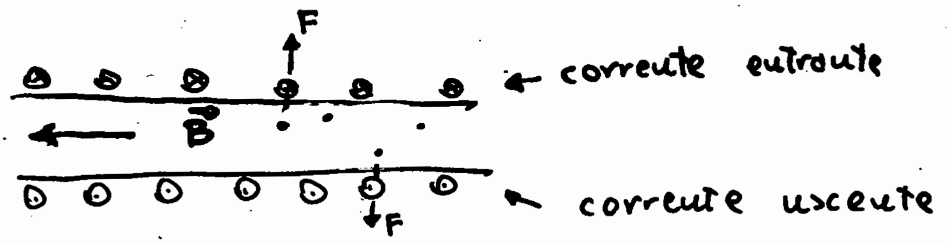
$$B = \mu_0 n I \quad \Rightarrow \quad I = \frac{B}{\mu_0 n}$$

$$I = \frac{10}{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 2 \cdot 10^{3}} = \frac{1}{8\pi} \cdot 10^{5} = 3.98 \cdot 10^{3}\ A$$

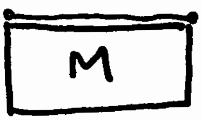
- VALUTIAMO ORA LA FORZA, TENENDO PRESENTE CHE IL CAMPO $\vec{B}$ E LE SPIRE SONO ORTOGONALI

$$\vec{F} = I \vec{L} \times \vec{B} \quad \rightarrow \quad |\vec{F}| = ILB$$

$$\frac{|\vec{F}|}{L} = I \cdot B = 3.98 \cdot 10^{3} \cdot 10 = 3.98 \cdot 10^{4}\ N$$

- 

- LA FORZA È DIRETTA VERSO L'ESTERNO DEL SOLENOIDE



- È COME SE UN METRO DI FILO DOVESSE SOSTENERE UNA MASSA DI $m = \frac{F}{g} = \frac{3.98 \cdot 10^{4}}{9.8} =$ 4.1 TONNELLATE

PROBLEMA

UN LUNGO SOLENOIDE HA 100 SPIRE OGNI CENTIMETRO ED E' PERCORSO DA UNA CORRENTE I. UN ELETTRONE SI MUOVE ALL'INTERNO DEL SOLENOIDE SU UNA CIRCONFERENZA DI 2.30 cm DI RAGGIO, PERPENDICOLARE ALL'ASSE DEL SOLENOIDE. LA VELOCITA' DELL'ELETTRONE E' 0.0460 C. TROVARE LA CORRENTE I NEL SOLENOIDE.

- IPOTESI: LA CIRCONFERENZA E' ORTOGONALE ALL'ASSE DEL SOLENOIDE, QUINDI ORTOGONALE AL CAMPO $\vec{B}$

- $$R = \frac{mv}{qB} \Rightarrow B = \frac{mv}{qR}$$

$$B = \frac{(9.1\cdot10^{-31})\cdot(0.046\cdot3\cdot10^{8})}{(1.6\cdot10^{-19})(2.3\cdot10^{-2})} = \frac{9.1\cdot0.046\cdot3}{1.6\cdot2.3}\cdot10^{-31+8+19+2} =$$

$$= 0.341\cdot10^{-2} = \underline{3.4\cdot10^{-3}\ T}$$

- $$n = \frac{100}{0.01} = 10^{4}\ \frac{\text{spire}}{\text{metro}}$$

- CAMPO DI UN SOLENOIDE

$$B = \mu_0 n I$$

$$\Rightarrow \quad I = \frac{B}{\mu_0 n} = \frac{3.4\cdot10^{-3}}{4\pi\cdot10^{-7}\cdot10^{4}} = \frac{3.4}{4\pi}\cdot10^{-3+7-4} = 0.271\ A = 271\ mA$$

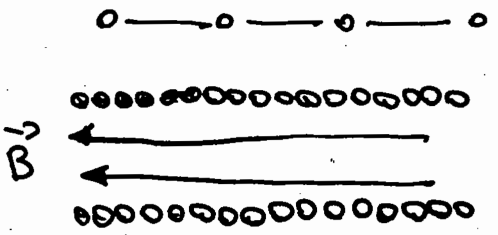
PROVA SCRITTA - 24 NOVEMBRE 1997

IN UN SOLENOIDE, DI LUNGHEZZA $d = 40$ cm, COMPOSTO DA 160 SPIRE, CIRCOLA UNA CORRENTE DI 5A. SI CALCOLI IL VALORE DELLA FORZA ESERCITATA DAL CAMPO MAGNETICO SU UN ELETTRONE, DI CARICA ELETTRICA $e = 1.6 \cdot 10^{-19}$ C, VIAGGIANTE ALLA VELOCITA' $v = 3 \cdot 10^8$ m/s, NEI DUE CASI:

a) L'ELETTRONE SI MUOVE IN DIREZIONE PARALLELA ALL'ASSE DEL SOLENOIDE

b) L'ELETTRONE SI MUOVE IN DIREZIONE ORTOGONALE ALL'ASSE.

INOLTRE SI INDICHI LA TRAIETTORIA DELL'ELETTRONE NEI DUE CASI



$$|\vec{B}| = \mu_0 n I = 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot \frac{160}{0.4} \cdot 5 = 2.5 \cdot 10^{-3}$$

$$\vec{F} = q \vec{v} \times \vec{B}$$

a) $\vec{v}$ PARALLELA ALL'ASSE E QUINDI A $\vec{B}$ $[\theta = 0°]$

$$\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B} = q v B \sin\theta = q v B \sin 0° = 0$$

LA FORZA E' ZERO, QUINDI LA VELOCITA' NON CAMBIA E L'ELETTRONE SI MUOVE IN LINEA RETTA

b) $\vec{v}$ PERPENDICOLARE ALL'ASSE E QUINDI A $\vec{B}$ $[\theta = 90°]$

$$|\vec{F}| = q v B = 1.6 \cdot 10^{-19} \cdot 3 \cdot 10^8 \cdot 2.5 \cdot 10^{-4} = 1.2 \cdot 10^{-14}\ N$$

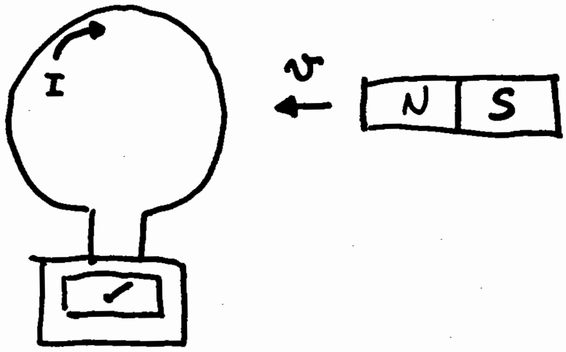
LA TRAIETTORIA E' UNA CIRCONFERENZA DI RAGGIO

$$R = \frac{mv}{qB} = \frac{9.1 \cdot 10^{-31} \cdot 3 \cdot 10^8}{1.6 \cdot 10^{-19} \cdot 2.5 \cdot 10^{-4}} = 6.825\ m$$

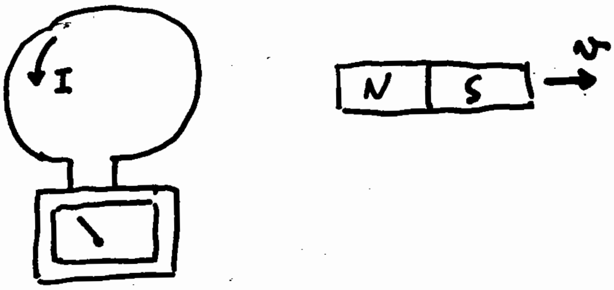
N.B. IL RAGGIO DEL SOLENOIDE E' DI 20 cm, QUINDI L'ELETTRONE ESCE DAL SOLENOIDE E PROSEGUE IN LINEA RETTA

LEGGE DI FARADAY

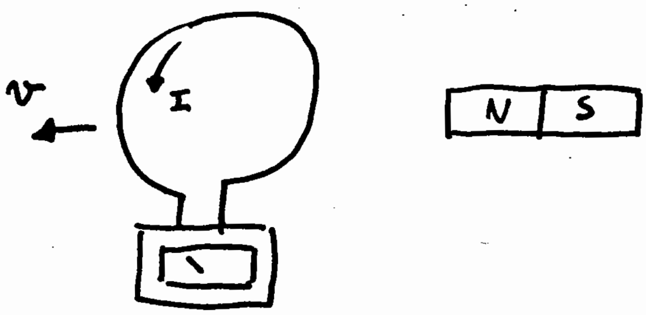
- PRENDIAMO UNA SPIRA, COLLEGHIAMOLA AD UN GALVANOMETRO (STRUMENTO CAPACE DI MISURARE CORRENTI DI $\sim 10^{-9}$ A)



MUOVENDO LA CALAMITA VERSO LA SPIRA, NEL CIRCUITO PASSA LA CORRENTE I

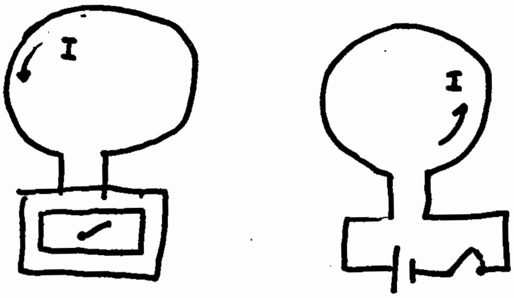


ALLONTANANDO IL MAGNETE LA CORRENTE CIRCOLA NEL VERSO OPPOSTO



TENENDO FERMA LA CALAMITA E SPOSTANDO IL CIRCUITO, PASSA ANCORA UNA CORRENTE NELLA SPIRA.

E' IMPORTANTE IL MOVIMENTO RELATIVO TRA SPIRA E MAGNETE

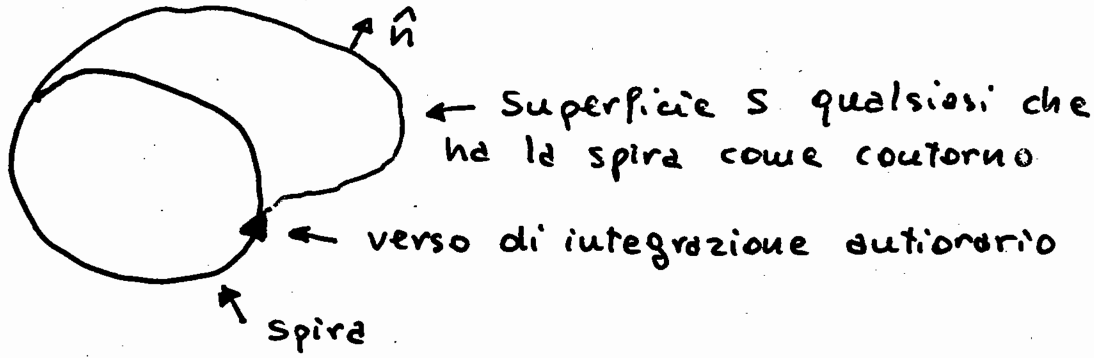


SOSTITUENDO IL MAGNETE CON UN ALTRO CIRCUITO, NEL MOMENTO IN CUI SI CHIUDE L'INTERRUTTORE E PASSA LA CORRENTE, ANCHE NELL'ALTRO CIRCUITO PASSA UNA CORRENTE, PER UN ISTANTE

LEGGE DI FARADAY

- NELLA SPIRA SI HA UN PASSAGGIO DI CORRENTE OGNI QUALVOLTA IL NUMERO DELLE LINEE DI FORZA DEL CAMPO MAGNETICO CHE ATTRAVERSANO LA SPIRA CAMBIA

- IN TERMINI PIU` RIGOROSI, SI HA PASSAGGIO DI CORRENTE QUANDO VARIA IL FLUSSO DEL CAMPO MAGNETICO CONCATENATO CON LA SPIRA



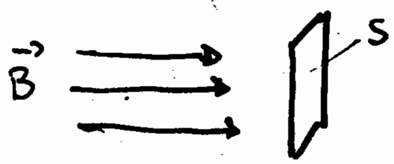
- S E' UNA SUPERFICIE QUALSIASI CHE HA LA SPIRA COME CONTORNO.

$$\Phi_S(\vec{B}) = \int_S \vec{B} \cdot \hat{n}\, dS$$

FLUSSO DEL CAMPO $\vec{B}$ CONCATENATO CON LA SPIRA

- IL FLUSSO DI $\vec{B}$ SI MISURA IN Weber (Wb)

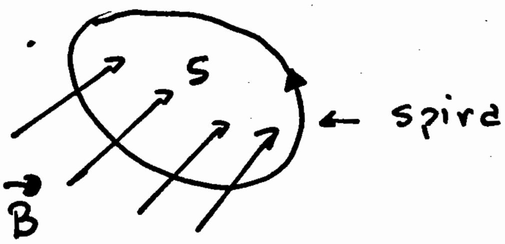
ESEMPIO: SPIRA RETTANGOLARE ORTOGONALE AD UN CAMPO $\vec{B}$ UNIFORME



$$(B) \int_S \vec{B} \cdot \hat{n}\, dS = B \int_S dS = B \cdot S$$

$$\Phi_S(B) = B \cdot S \quad \Rightarrow \quad B = \frac{\Phi(B)}{S} \quad ; \quad 1\,T = \frac{1\,Wb}{1\,m^2}$$

LEGGE DI FARADAY



$$\Phi_S(\vec{B}) = \int_S \vec{B}\cdot\hat{n}\, ds$$

- AFFINCHE' NELLA SPIRA VI SIA UN MOVIMENTO DI CARICHE, CIOE' UNA CORRENTE, DEVE ESSERE PRESENTE NEL CIRCUITO UNA FORZA ELETTROMOTRICE INDOTTA DAL CAMPO MAGNETICO (f. e.m. indotta)

LA LEGGE DI FARADAY-NEUMANN DICE CHE LA f.e.m. INDOTTA VALE:

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi_S(\vec{B})}{dt}$$

[IL SEGNO MENO VIENE SPIEGATO DALLA LEGGE DI LENZ]

N.B.

$$\Phi_S(\vec{B}) = \int_S \vec{B}\cdot\hat{n}\, ds$$

IL FLUSSO PUO' VARIARE PERCHE':

- CAMBIA LA SUPERFICIE S DELLA SPIRA
- CAMBIA IN FUNZIONE DEL TEMPO IL CAMPO $\vec{B}$
- VARIA IN FUNZIONE DEL TEMPO L'ANGOLO TRA IL CAMPO $\vec{B}$ E LA NORMALE ALLA SUPERFICIE $\hat{n}$

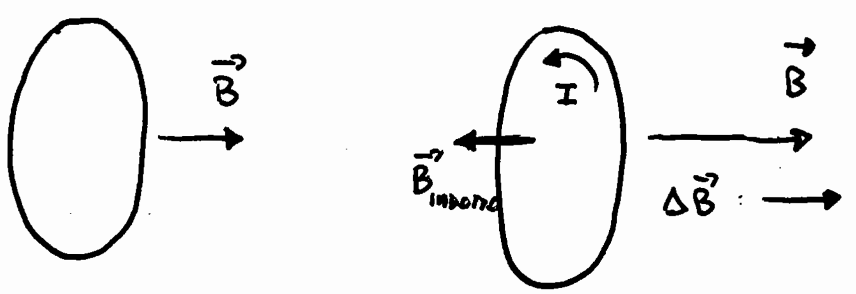
LEGGE DI LENZ

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi(\vec{B})}{dt}$$

- LA f.e.m. INDOTTA IN UN CIRCUITO PROVOCA UN PASSAGGIO DI CORRENTE (SE IL CIRCUITO E' CHIUSO)
- QUESTA CORRENTE A SUA VOLTA CREA UN CAMPO $\vec{B}$
- SI PUO' CALCOLARE IL FLUSSO DI QUESTO CAMPO $\vec{B}$ CONCATENATO CON LA SPIRA STESSA.
- LA LEGGE DI LENZ DICE:

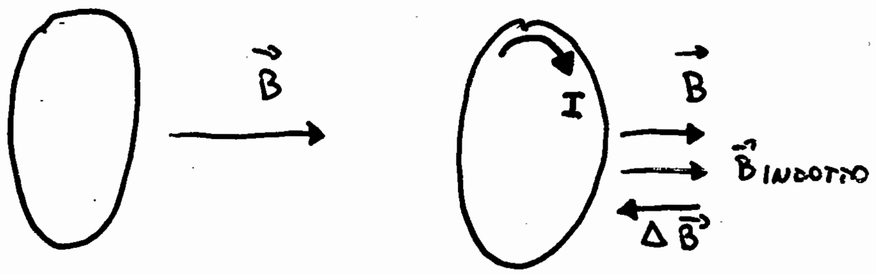
LA CORRENTE INDOTTA IN UNA SPIRA HA UN VERSO TALE CHE IL CAMPO MAGNETICO GENERATTO DALLA CORRENTE SI OPPONE ALLA VARIAZIONE DI CAMPO MAGNETICO CHE L'HA INDOTTA

PRIMA DOPO



$\vec{B}$ AUMENTA, QUINDI IL $\vec{B}$ INDOTTO DEVE DIMINUIRE IL FLUSSO CONCATENATO

PRIMA DOPO



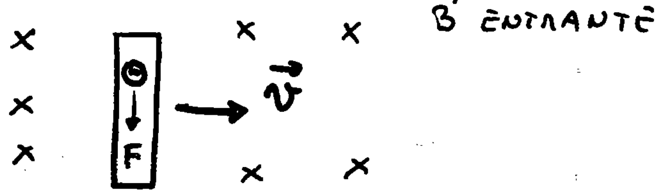
$\vec{B}$ DIMINUISCE, QUINDI IL CAMPO $\vec{B}$ INDOTTO DEVE COMPENSARE LA DIMINUZIONE

LA LEGGE DI LENZ E' UNA CONSEGUENZA DELLA LEGGE DI CONSERVAZIONE DELL'ENERGIA. SE NON CI FOSSE IL SEGNO MEN[O] SI POTREBBE REALIZZARE UN MOTO PERPETUO.

f. e. m. DINAMICA

- IN ALCUNI CASI LA f. e. m. INDOTTA SI PUÒ FAR RISALIRE ALLA FORZA DI LORENTZ

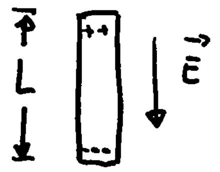
- CONSIDERIAMO UNA SBARRETTA CONDUTTRICE LUNGA L IN MOTO CON VELOCITÀ $\vec{v}$ COSTANTE IN UN CAMPO $\vec{B}$ ORTOGONALE A $\vec{v}$ E ALLA SBARRETTA



$$\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$$

- SUGLI ELETTRONI DEL CONDUTTORE AGISCE UNA FORZA, DIRETTA VERSO IL BASSO, PARI A:

$$F = qvB$$



- VI SARÀ UN ACCUMULO DI ELETTRONI IN BASSO, CHE TENDERANNO A RESPINGERE ALTRI ELETTRONI

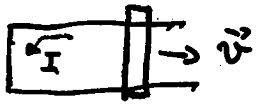
- SI RAGGIUNGE L'EQUILIBRIO QUANDO LA FORZA ELETTROSTATICA UGUAGLIA LA FORZA DI LORENTZ

$$qE = qvB \quad \text{OVVERO} \quad E = vB$$

- LA d.d.p. AI CAPI DELLA SBARRETTA VALE:

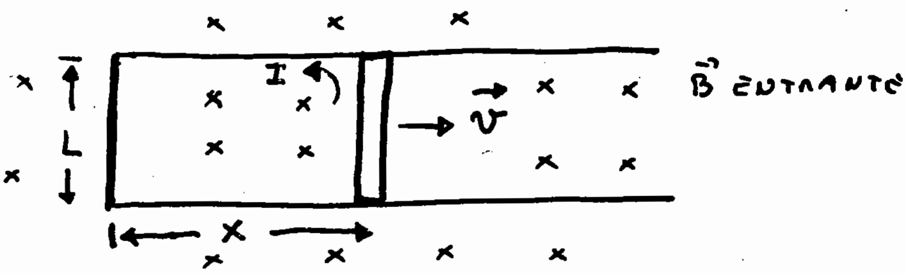
$$\Delta V = E \cdot L = vBL$$

- SE LA BARRETTA È COLLEGATA AD UN CIRCUITO IMMOBILE, SI HA UN PASSAGGIO DI CORRENTE



f. e. m. DINAMICA

CONSIDERIAMO UNA SBARRETTA CONDUTTRICE CHE SCIVOLA SU DEI BINARI CONDUTTORI CON VELOCITA' $\vec{v}$, IMMERSA IN UN CAMPO $\vec{B}$ ORTOGONALE



$x = vt$

- IL FLUSSO DEL CAMPO $\vec{B}$ CONCATENATO CON IL CIRCUITO VALE:

$$\Phi_S(\vec{B}) = B \cdot S = B \cdot (L \cdot x) = B(L \cdot vt) = BLvt$$

- LA f. e. m. INDOTTA NEL CIRCUITO VALE:

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi(\vec{B})}{dt} = -\frac{d(BLvt)}{dt} = -BLv$$

CHE E' LO STESSO RISULTATO TROVATO IN PRECEDENZA

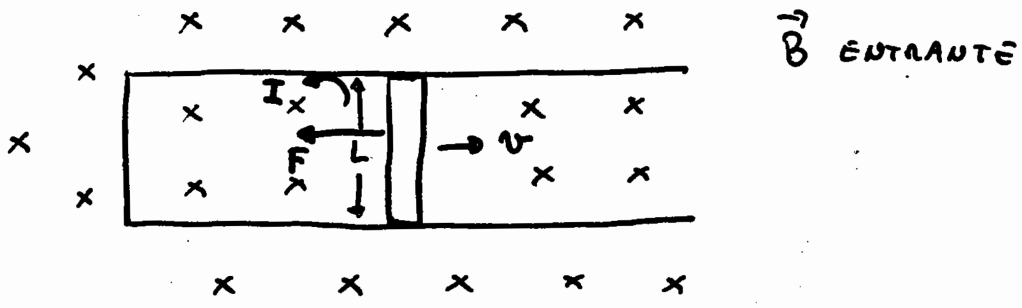
- VERSO DI I

B UNIFORME; LA SUPERFICIE AUMENTA $\Rightarrow \Phi = B \cdot S$ AUMENTA

QUINDI IL $\vec{B}$ CREATO DALLA CORRENTE INDOTTA NELLA SPIRA DEVE DIMINUIRE IL FLUSSO, QUINDI $\vec{B}$ DEVE USCIRE DAL FOGLIO

$\Rightarrow$ LA CORRENTE GIRA IN VERSO ANTIORARIO

f.e.m. DINAMICA:
CONSIDERAZIONI ENERGETICHE



SULLA SBARRETTA LUNGA L PERCORSA DALLA CORRENTE I AGISCE LA FORZA DI LORENTZ:

$$\vec{F} = I\,\vec{L} \times \vec{B} \qquad |\vec{F}| = ILB$$

- LA FORZA È DIRETTA IN VERSO OPPOSTO ALLA VELOCITÀ, QUINDI TENDE A FRENARE LA SBARRETTA.
PER MANTENERLA IN MOTO A VELOCITÀ COSTANTE OCCORRE APPLICARE UNA FORZA DALL'ESTERNO.

- LA f.e.m. INDOTTA VALE $\mathcal{E} = -BLv$
SE IL CIRCUITO PRESENTA UNA RESISTENZA R, LA CORRENTE I VALE:

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R} = \frac{BLv}{R}$$

LA POTENZA APPLICATA DALLA FORZA ESTERNA VALE:

$$P = \vec{F}\cdot\vec{v} = (ILB)\,v = \frac{BLv}{R}\cdot LB\cdot v = \frac{(BLv)^2}{R}$$

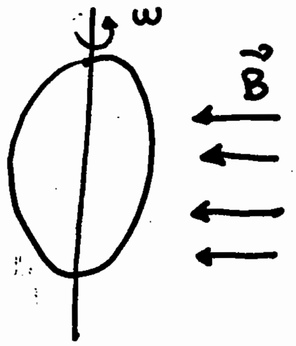
RICORDANDO CHE $\mathcal{E} = -BLv$ SI HA:

$$P = \frac{(BLv)^2}{R} = \frac{\mathcal{E}^2}{R} \qquad \left(\frac{\Delta V^2}{R}\right)$$

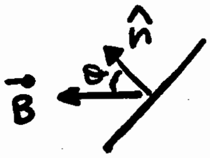
CHE È LA POTENZA DISSIPATA NEL CIRCUITO PER EFFETTO JOULE

GENERATORE DI CORRENTE ALTERNATA

- PRENDIAMO UNA SPIRA DI SUPERFICIE S CHE RUOTA INTORNO AD UN ASSE PERPENDICOLARE AND UN CAMPO $\vec{B}$ UNIFORME



vista dall'alto



- CALCOLIAMO IL FLUSSO DI $\vec{B}$ CONCATENATO CON LA SPIRA

$$\Phi(\vec{B}) = \vec{B}\cdot\hat{n}\,S = BS\cos\theta = BS\cos(\omega t)$$

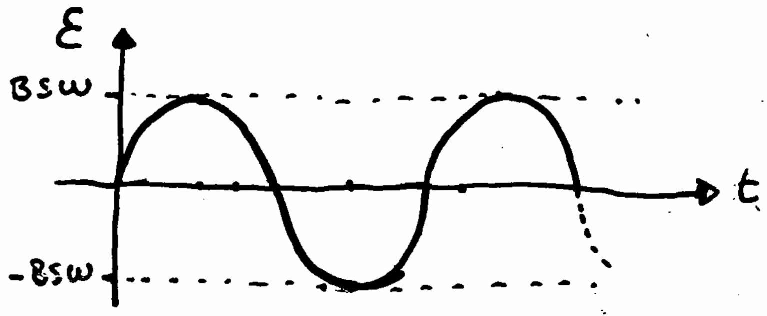
- LA SPIRA RUOTA, QUINDI L'ANGOLO TRA LA NORMALE ALLA SUPERFICIE ED IL CAMPO $\vec{B}$ VARIA, PERTANTO VARIA ANCHE IL FLUSSO CONCATENATO CON LA SPIRA

IPOTESI: LA SPIRA RUOTA CON VELOCITA' ANGOLARE COSTANTE

$$\theta = \omega t$$

CALCOLIAMO LA f.e.m. INDOTTA:

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi(\vec{B})}{dt} = -\frac{d\,[BS\cos\omega t]}{dt} = BS\omega\sin\omega t$$



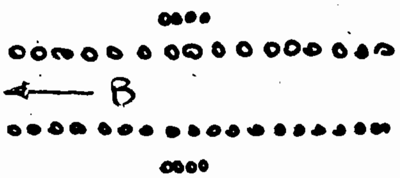
ESERCIZI CONSIGLIATI

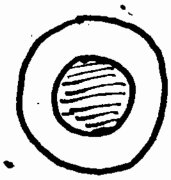
Legge di Faraday-Neumann

- Serway (3° Edizione) – Cap. 23
  - 1 – 3 – 5 – 7 – 9 – 11 – 13 – 17 – 19 – 45 – 47 – 53
- Halliday (5° Edizione) – Cap. 31
  - 1E – 3E – 5E – 7P

ESONERO 2 - ESERCIZIO 5

Esonero 2 - Esercizio 5 (7 punti)
Una corrente $I = I_0 \cdot cos(\omega t)$ passa in un solenoide di area 10 cm^2, con 10^5 spire per metro. La frequenza è di 60 Hz ed $I_0 = 10$ A. Una piccola bobina (bobina-sonda) viene utilizzata per misurare le variazione di flusso. Essa ha un'area di 20 cm^2, contiene 10 spire, e viene avvolta intorno al solenoide in modo che i due avvolgimenti risultino concentrici.
a) Qual'è la forza elettromotrice indotta nella sonda?
b) Se la sua resistenza è di 5 Ω, quanto vale la corrente indotta?
(Risultato: a) 4.7 sen(ωt) V; b) 0.95 sen(ωt) A)





- CAMPO $\vec{B}$ DEL SOLENOIDE:

$$B = \mu_0 n I = 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 10^5 \cdot 10 \cos\omega t = 1.257 \cos\omega t \quad T$$

- N.B. IL CAMPO $\vec{B}$ È PRESENTE SOLO NELLA SEZIONE DEL SOLENOIDE E NON IN TUTTA LA SEZIONE DELLA SPIRA SONDA.

$$\Phi(B) = N \cdot B \cdot S = 10 \cdot 1.257 \cdot 10 \cdot 10^{-4} \cos\omega t = 12.58 \cdot 10^{-3} \cos\omega t \quad Wb$$

- $\omega = 2\pi f = 2 \cdot \pi \cdot 60 = 377$ rad/s

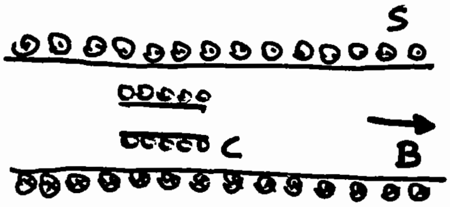
- $$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt} = 12.57 \cdot 10^{-3} \cdot \omega \ \text{sen}\,\omega t = 12.57 \cdot 10^{-3} \cdot 377 \cdot \text{sen}\,\omega t = 4.73 \ \text{sen}\,\omega t \ V$$

- LA CORRENTE VALE:

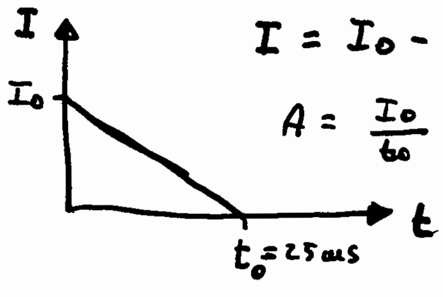
$$I = \frac{\mathcal{E}}{R} = \frac{4.73 \ \text{sen}\,\omega t}{5} = 0.95 \ \text{sen}\,\omega t \ A$$

PROBLEMA SVOLTO 31-1 (Halliday)

IL LUNGO SOLENOIDE S DELLA FIGURA È PERCORSO DA UNA CORRENTE $I = 1.5\,A$; IL SUO DIAMETRO D È 3.2 cm. NEL SUO CENTRO PONIAMO UNA BOBINA C DI DIAMETRO $d = 2.1$ cm COSTITUITA DA 130 SPIRE STRETTAMENTE AVVOLTE. LA CORRENTE NEL SOLENOIDE VIENE RIDOTTA A ZERO A RITMO COSTANTE IN UN INTERVALLO DI TEMPO DI 25 mS. TROVARE LA f.e.m. INDOTTA NELLA BOBINA INTERNA MENTRE LA CORRENTE NEL SOLENOIDE STA VARIANDO.



$n = 220\ \frac{\text{spire}}{\text{cm}}$



$I = I_0 - At$

$A = \frac{I_0}{t_0} = \frac{1.5}{0.025} = 60\ \frac{A}{s}$

- IL CAMPO $\vec{B}$ ALL'INTERNO DEL SOLENOIDE VALE:

$$B(t) = \mu_0 n I = \mu_0 n (I_0 - At)$$

UNA SPIRA DELLA BOBINA INTERNA HA UNA SUPERFICIE PARI A:

$$S = \pi r^2 = \pi \left(\frac{d}{2}\right)^2 = \pi \left(\frac{2.1 \cdot 10^{-2}}{2}\right)^2 = 3.5 \cdot 10^{-4}\ m^2$$

LA SPIRA È ORTOGONALE AL CAMPO B.

IL FLUSSO DEL CAMPO B ATTRAVERSO UNA SPIRA VALE:

$$\Phi_s(\vec{B}) = B \cdot S$$

DATO CHE LA BOBINA È COSTITUITA DA $N = 130$ SPIRE, IL FLUSSO CONCATENATO CON TUTTA LA BOBINA VALE:

$$\Phi_c(\vec{B}) = N \Phi_s(\vec{B}) = NBS = NS\mu_0 n (I_0 - At)$$

LA f.e.m. VALE $\mathcal{E} = -\frac{d\Phi(B)}{dt} = + NS\mu_0 n A =$

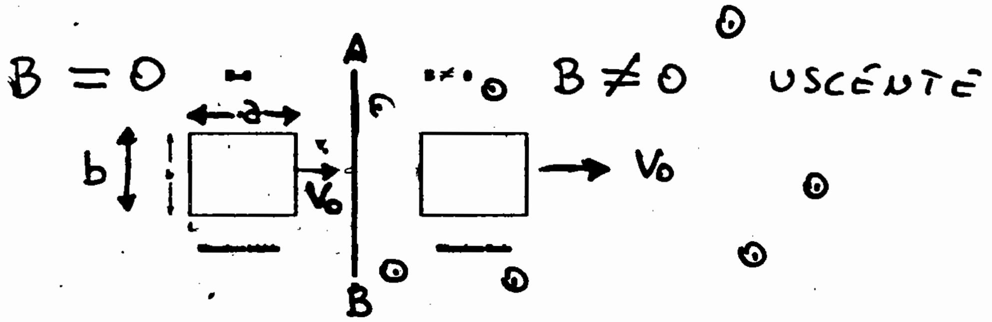
$$= (130)(3.5 \cdot 10^{-4})(4\pi \cdot 10^{-7})(2.2 \cdot 10^{4})(60) = 75.5\ mV$$

ESERCIZIO 1

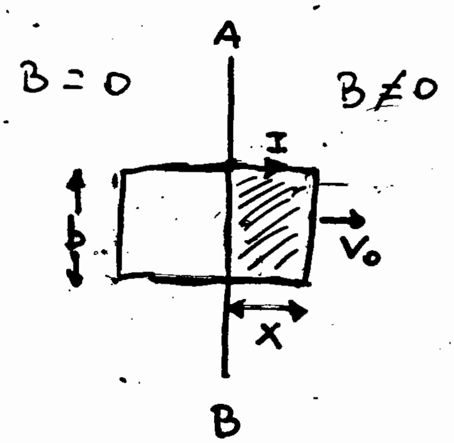
Esercizio 1

Si abbia un circuito rigido di resistenza complessiva R e di induttanza trascurabile, formato da una spira rettangolare di lati a e b. Tale circuito si trova inizialmente disposto come in figura, dove la retta AB delimita una zona di spazio dove agisce un campo magnetico costante e uniforme B, diretto ortogonalmente al foglio verso chi legge. Un opportuno congegno mantiene il circuito in moto con velocità costante V_0 diretta come in figura, cosicché esso penetra nella zona dove c'e' il campo magnetico e alla fine è completamente immerso nel campo. In queste condizioni calcolare: a) la corrente che passa nel circuito durante il passaggio, b) la carica totale che fluisce attraverso il circuito, c) il lavoro totale compiuto dal congegno che mantiene la velocità uniforme.

Dati: a=1 m; b=20 cm; R=100 Ω; B=1 T; V_0 = 10 m/s



- CALCOLIAMO IL FLUSSO DEL CAMPO MAGNETICO $\vec{B}$ CONCATENATO CON LA SPIRA



chiamiamo x la parte di spira immersa nel campo

- VI È FLUSSO CONCATENATO SOLO NELLA PARTE DI CIRCUITO CHE È IMMERSA NEL CAMPO

$$\Phi_S(B) = \int_S \vec{B}\cdot\hat{n}\,dS = B\int_S dS = B\cdot S = Bbx$$

- PER LA LEGGE DI FARADAY-NEUMANN SI HA:

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi(\vec{B})}{dt} = -\frac{d(Bbx)}{dt} = -Bb\frac{dx}{dt} = -Bbv = -BbV_0$$

ESERCIZIO 1 : (SEGUE)

- LA CORRENTE CHE CIRCOLA NELLA SPIRA VALE:

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R} = -\frac{BbV_0}{R} = -\frac{1\cdot 0.2\cdot 10}{100} = 20\,mA$$ (considero solo il modulo)

- LA CARICA TOTALE SI TROVA DALLA RELAZIONE:

$$Q = \int_0^{t_1} i\,dt$$; t_1 è il tempo durante il quale passa la corrente

- DA NOTARE CHE UNA VOLTA CHE LA SPIRA È COMPLETAMENTE IMMERSA NEL CAMPO NON C'È PIÙ VARIAZIONE DI FLUSSO ($\vec{B}$ UNIFORME) E QUINDI NON C'È PIÙ PASSAGGIO DI CORRENTE

$$t_1 = \frac{a}{V_0}$$

$$Q = \int_0^{t_1} \frac{BbV_0}{R}\,dt = \frac{BbV_0}{R}\cdot t_1 = \frac{BbV_0}{R}\frac{a}{V_0} = \frac{B\cdot(ab)}{R}$$ [indipendente da V_0]

$$Q = B\frac{ab}{R} = 1\cdot\frac{1\cdot 0.2}{100} = 2\,mC$$

- IL LAVORO FATTO DALLA FORZA CHE TRASCINA LA SPIRA CON VELOCITÀ V_0 PUÒ ESSERE RICAVATO SIA DIRETTAMENTE (RICAVANDO LA FORZA) E SIA CALCOLANDO L'ENERGIA DISSIPATA PER EFFETTO JOULE DAL CIRCUITO.

$$P = RI^2 = R\left(\frac{BbV_0}{R}\right)^2 = \frac{B^2b^2V_0^2}{R}$$

$$\text{Energia} = P\cdot t_1 = \frac{B^2b^2V_0^2}{R}\frac{a}{V_0} = \frac{B^2b^2V_0a}{R} = \frac{1\cdot(0.2)^2\cdot 10\cdot 1}{100} = 4\,mJ$$

N.B. [$\vec{F} = I\vec{L}\times\vec{B} \Rightarrow F = IbB$ -

$$L = \vec{F}\cdot\vec{s} = F\cdot a \Rightarrow \frac{BbV_0}{R}\cdot b\cdot B\cdot a = \frac{B^2b^2V_0a}{R}$$ (ritroviamo la stessa formula)

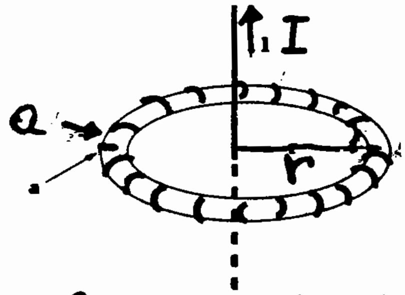
ESERCIZIO 2

Esercizio 2

Un toroide di N=400 spire, avente resistenza totale R=10 Ω, è avvolto sopra un anello di sezione circolare di raggio a=0.5 cm. Il raggio medio dell'anello è r=10 cm. Un filo rettilineo indefinito giace sull'asse dell'anello. All'istante t=0 s viene fatta passare nel filo una corrente continua I=10 A. Nell'approssimazione a << r calcolare:

a) il flusso magnetico totale concatenato con il toroide,

b) la carica elettrica che passa nel solenoide all'atto della chiusura dell'interruttore.



$$B = \underbrace{\frac{\mu_0}{2\pi r}} I \quad \text{[Biot-Savart]}$$

- DATO CHE $a \ll r$ POSSIAMO ASSUMERE CHE IL CAMPO SIA UNIFORME ALL'INTERNO DEL SOLENOIDE

- IL FLUSSO CONCATENATO CON UNA SPIRA VALE $\Phi(B) = \pi a^2 \cdot B$
- IL FLUSSO CONCATENATO CON IL TOROIDE VALE:

$$\Phi(\vec{B}) = N \cdot \pi a^2 \cdot B = N \cdot \pi a^2 \cdot \mu_0 \frac{I}{2\pi r} =$$

$$= 400 \cdot \pi \cdot (0.5 \cdot 10^{-2})^2 \cdot 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{10}{2\pi \cdot 0.1} = 6.28 \cdot 10^{-7} \ Wb$$

CALCOLIAMO ORA LA CARICA CHE PASSA NEL TOROIDE

$$q = \int_0^\infty i\, dt = \int_0^\infty -\frac{1}{R} \frac{d\Phi(\vec{B})}{dt} \cdot dt = -\int_0^\infty \frac{1}{R} d\Phi(\vec{B}) = \frac{1}{R}\left[\Phi(\vec{B})_{iniziale} - \Phi(\vec{B})_{FINALE}\right]$$

QUINDI SI HA, IN GENERALE, CHE:

$$q = \frac{1}{R}\left[\Phi(\vec{B})_{INIZIALE} - \Phi(\vec{B})_{FINALE}\right] = \frac{\Delta \phi(\vec{B})}{R} = \frac{1}{R}\left[0 - \Phi(\vec{B})_{FINALE}\right]$$

NEL NOSTRO CASO $|\Delta \Phi(\vec{B})| = 6.28 \cdot 10^{-7} \ Wb$

$$q = \frac{|\Delta \Phi(\vec{B})|}{R} = \frac{6.28 \cdot 10^{-7}}{10} = 6.28 \cdot 10^{-8} \ C \simeq 63 \ nC$$

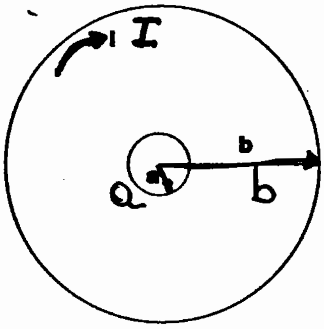
ESERCIZIO 3

Esercizio 3

Due spire circolari coplanari e concentriche hanno raggio rispettivamente di a=1cm e b=50 cm. Nella spira più esterna circola una corrente sinusoidale del tipo $I(t)=I_0 \mathrm{sen}(\omega t)$ di periodo T=10 ms. Tenendo in considerazione che a<<b, calcolare la f.e.m. indotta nella spira piccola al centro. Sapendo che la spira interna presenta una resistenza complessiva di 124 $m\Omega$, calcolare la corrente circolante nella spira. $I_0 = 0.5$ A

$$B = \frac{\mu_0}{2R} I$$

[campo al centro della spira]



- DATO CHE $a \ll b$ POSSIAMO ASSUMERE CHE IL CAMPO $\vec{B}$ PRESENTE NELLA SUPERFICIE CIRCOLARE INTERNA SIA UNIFORME E PARI AL CAMPO PRESENTE AL CENTRO

- QUINDI $\Phi_S(\vec{B}) = B \cdot S = B \cdot \pi a^2 = \frac{\mu_0}{2b} \cdot I \cdot \pi a^2 = \frac{\mu_0 \pi a^2}{2b} I_0 \mathrm{sen}\, \omega t$

- LA f.e.m. INDOTTA SI TROVA CON LA LEGGE DI FARADAY-NEUMANN

RICORDATE CHE $\frac{d(\mathrm{sen}\,\omega t)}{dt} = \omega \cos \omega t$

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi(\vec{B})}{dt} = -\frac{d}{dt}\left(\frac{\mu_0 \pi a^2}{2b} I_0 \mathrm{sen}\,\omega t\right) = -\frac{\mu_0 \pi a^2}{2b} \omega I_0 \cos \omega t =$$
$$= 124\ nV \cos \omega t$$

LA f.e.m. INDOTTA È SINUSOIDALE $\left[\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{0.01} = 628\ \frac{rad}{s}\right]$

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R} = -\frac{\mu_0 \pi a^2}{2bR} \omega I_0 \cos \omega t$$

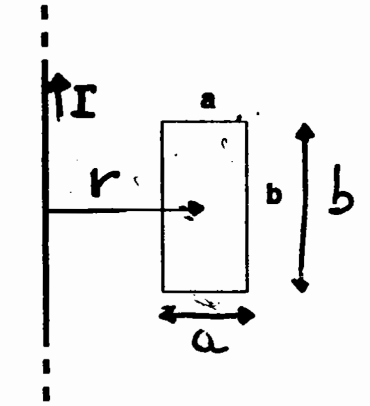
- IL VALORE MASSIMO DELLA CORRENTE VALE:

$$I_{MAX} = \frac{\mu_0 \pi a^2}{2bR} \omega I_0 = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot \pi \cdot (10^{-2})^2}{2 \cdot 0.5 \cdot 0.124} \cdot 628 \cdot 0.5 = 1\ \mu A$$

ESERCIZIO 4

Esercizio 4

Un filo rettilineo infinito è percorso da una corrente di 0.4 A diretta nel verso indicato in figura. Una spira rettangolare di lati a=5 cm e b = 10 cm è disposta come in figura, il centro della spira dista dal filo r=80 cm. Ad un certo istante la corrente nel filo viene ridotta a zero con legge esponenziale, $I(t) = I_0 \cdot e^{-t/\tau}$, con $\tau = 10\ \mu s$. Trovare il valore della f.e.m. indotta nella spira dopo 5 μs dall'inizio della riduzione della corrente nel filo rettilineo. Si tenga presente che $a << r$. Dire inoltre se la corrente indotta nella spira circola in senso orario o antiorario.



$$B = \frac{\mu_0}{2\pi r} I \quad [\text{Biot-Savart}]$$

$$I_0 = 0.4\ A$$

- DATO CHE $a << r$ ASSUMIAMO UNIFORME IL CAMPO B ALL'INTERNO DELLA SPIRA E PARI AL SUO VALORE NEL CENTRO

$$\Phi_S(\vec{B}) = B \cdot S = B(ab) = \frac{\mu_0}{2\pi r} I \cdot (ab) = \frac{\mu_0 ab}{2\pi r} I_0 e^{-t/\tau}$$

LA f.e.m. INDOTTA SI TROVA CON LA LEGGE DI FARADAY-NEUMANN TENENDO PRESENTE CHE:

$$\frac{d(e^{-t/\tau})}{dt} = -\frac{1}{\tau} e^{-t/\tau} \qquad \left[\frac{d}{dt} e^{at} = a e^{at} \right]$$

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi(\vec{B})}{dt} = -\frac{d}{dt}\left(\frac{\mu_0 ab}{2\pi r} I_0 e^{-t/\tau}\right) = \frac{\mu_0 ab}{2\pi r} \frac{I_0}{\tau} e^{-t/\tau}$$

$$\mathcal{E}(t = 5\mu s) = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 0.05 \cdot 0.1}{2\pi \cdot 0.8} \cdot \frac{0.4}{10 \cdot 10^{-6}} e^{-\frac{1}{2}} = 30\ \mu V$$

- DATO CHE I DIMINUISCE, ALLORA DIMINUISCE ANCHE B E QUINDI ANCHE IL FLUSSO CONCATENATO, QUINDI IL CAMPO $\vec{B}'$ GENERATO DALLA CORRENTE INDOTTA DOVRÀ AUMENTARE QUESTO FLUSSO. IL CAMPO $\vec{B}$ PRODOTTO DAL FILO È ENTRANTE, QUINDI LA CORRENTE DOVRÀ CIRCOLARE IN SENSO ORARIO PER PRODURRE UN CAMPO ENTRANTE

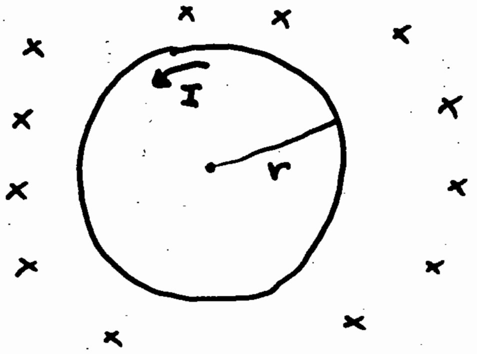
N. B.

SI INCLUDONO LE PAGINE SEGUENTI PER COMPLETARE LA TRATTAZIONE DEI CAMPI MAGNETICI ED ARRIVARE ALLA FORMULAZIONE DELL'ELETTRO-MAGNETISMO TRAMITE LE EQUAZIONI DI MAXWELL.

QUESTI ARGOMENTI NON FANNO PARTE DEL PROGRAMMA DEL CORSO 2003/04

CAMPI ELETTRICI INDOTTI

- PRENDIAMO UNA SPIRA CIRCOLARE DI RAGGIO r IMMERSA IN UN CAMPO $\vec{B}$ ORTOGONALE AL PIANO DELLA SPIRA



$\vec{B}$ ENTRANTE

- SUPPONIAMO CHE $\vec{B}$ VARI IN FUNZIONE DEL TEMPO COME:

$$B(t) = B_0 t$$

E CHE LA SPIRA ABBIA RESISTENZA R

- IL FLUSSO CONCATENATO CON LA SPIRA VALE:

$$\Phi_S(\vec{B}) = \int_S \vec{B}\cdot\hat{n}\, dS = -BS = -\pi r^2 B_0 t \qquad \left[\begin{array}{l} \hat{n} \text{ uscente} \\ \vec{B} \text{ entrante} \end{array} \right]$$

- LA f.e.m. INDOTTA VALE

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi(\vec{B})}{dt} = \frac{d(\pi r^2 B_0 t)}{dt} = \pi r^2 B_0$$

- LA CORRENTE CHE CIRCOLA NELLA SPIRA VALE:

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R} = \frac{\pi r^2 B_0}{R} \Rightarrow \text{LA CORRENTE È COSTANTE NEL TEMPO}$$

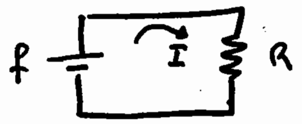
- AFFINCHÈ VI SIA UNA CORRENTE COSTANTE NELLA SPIRA, DEVE ESSERE PRESENTE UN CAMPO ELETTRICO CHE AGISCE SULLE CARICHE LIBERE DEL CONDUTTORE FACENDOLE MUOVERE, ANCH'ESSO COSTANTE

CAMPO ELETTRICO INDOTTO

- IL CAMPO ELETTROSTATICO, GENERATO CIOÈ DA UNA DISTRIBUZIONE DI CARICHE, È CONSERVATIVO

$$\oint \vec{E}_s \cdot d\vec{s} = 0$$

- IN UN CIRCUITO ELETTRICO, PER MANTENERE IN MOTO DELLE CARICHE (CORRENTE) OCCORRE INSERIRE UNA FORZA NON CONSERVATIVA (GENERATORE)



- IL CAMPO ELETTRICO INDOTTO DALLA VARIAZIONE DEL CAMPO MAGNETICO NON È CONSERVATIVO, QUINDI NON SI PUÒ PIÙ PARLARE DI POTENZIALE ELETTRICO

CALCOLIAMO LA CIRCUITAZIONE DEL CAMPO $\vec{E}$ CHE, PUNTO PER PUNTO, È TANGENTE ALLA SPIRA CIRCOLARE

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = E \oint ds = E\, 2\pi r = \mathcal{E} = \pi r^2 B_0$$

$$\Rightarrow \boxed{E = \frac{B_0}{2} r}$$

- QUESTO CAMPO ELETTRICO ESISTE NELLO SPAZIO ANCHE IN ASSENZA DI UNA SPIRA CONDUTTRICE IN GRADO DI RIVELARLO

SI HA SEMPRE:

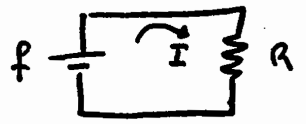
$$\boxed{\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = -\frac{d\Phi(\vec{B})}{dt}}$$ legge di Faraday

CAMPO ELETTRICO INDOTTO

- IL CAMPO ELETTROSTATICO, GENERATO CIOÈ DA UNA DISTRIBUZIONE DI CARICHE, È CONSERVATIVO

$$\oint \vec{E}_s \cdot d\vec{s} = 0$$

- IN UN CIRCUITO ELETTRICO, PER MANTENERE IN MOTO DELLE CARICHE (CORRENTE) OCCORRE INSERIRE UNA FORZA NON CONSERVATIVA (GENERATORE)



- IL CAMPO ELETTRICO INDOTTO DALLA VARIAZIONE DEL CAMPO MAGNETICO NON È CONSERVATIVO, QUINDI NON SI PUÒ PIÙ PARLARE DI POTENZIALE ELETTRICO

CALCOLIAMO LA CIRCUITAZIONE DEL CAMPO $\vec{E}$ CHE, PUNTO PER PUNTO, È TANGENTE ALLA SPIRA CIRCOLARE

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = E \oint ds = E\, 2\pi r = \mathcal{E} = \pi r^2 B_0$$

$$\Rightarrow \boxed{E = \frac{B_0}{2} r}$$

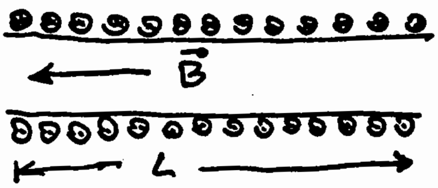
- QUESTO CAMPO ELETTRICO ESISTE NELLO SPAZIO ANCHE IN ASSENZA DI UNA SPIRA CONDUTTRICE IN GRADO DI RIVELARLO

SI HA SEMPRE:

$$\boxed{\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = -\frac{d\,\Phi(\vec{B})}{dt}}$$ legge di Faraday

INDUTTANZA

- CONSIDERIAMO COME ESEMPIO UN SOLENOIDE PERCORSO DALLA CORRENTE I, LUNGO L, AVENTE N SPIRE, UNA SPIRA HA SUPERFICIE S



- IL CAMPO $\vec{B}$ ALL'INTERNO DEL SOLENOIDE VALE:

$$B = \mu_0 \, n \cdot I = \mu_0 \frac{N}{L} I$$

CONSIDERIAMO IL FLUSSO CONCATENATO CON IL SOLENOIDE

$$\Phi(B) = N B \cdot S = N \mu_0 \frac{N}{L} I \cdot S = \mu_0 \frac{N^2}{L} S \cdot I$$

IL FLUSSO CONCATENATO E' PROPORZIONALE ALLA CORRENTE I

DEFINIAMO INDUTTANZA DI UN CIRCUITO IL RAPPORTO TRA IL FLUSSO DEL CAMPO MAGNETICO CONCATENATO E LA CORRENTE CHE CIRCOLA NEL CIRCUITO E CHE HA GENERATO IL CAMPO $\vec{B}$

$$L = \frac{\Phi(B)}{I} = \mu_0 \frac{N^2}{L} S$$ [nel caso di un solenoide]

L'INDUTTANZA NON DIPENDE DALLA CORRENTE I
MA SOLO DALLA GEOMETRIA DEL CIRCUITO
(E DAL MATERIALE INTORNO AL QUALE SONO AVVOLTE LE SPIRE)

L'INDUTTANZA SI MISURA IN HENRY

$$1 \; H = 1 \frac{Wb}{A} = 1 \frac{T \cdot m^2}{A}$$

AUTOINDUZIONE

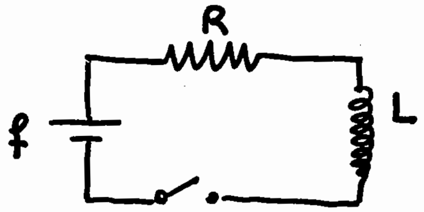
- FACCIAMO CIRCOLARE CORRENTE IN UNA INDUTTANZA (AD ESEMPIO UN SOLENOIDE). LA CORRENTE GENERERA' UN CAMPO $\vec{B}$ TALE CHE:

$$\Phi(B) = L \cdot I \qquad \text{(flusso concatenato con l'induttanza)}$$

- SE LA CORRENTE CHE CIRCOLA NELL'INDUTTANZA VARIA, SI HA f.e.m. INDOTTA NELL'INDUTTANZA STESSA (AUTOINDUZIONE)

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi(B)}{dt} = -\frac{d(LI)}{dt} = -L\frac{dI}{dt}$$

SE ABBIAMO UN CIRCUITO DEL TIPO:



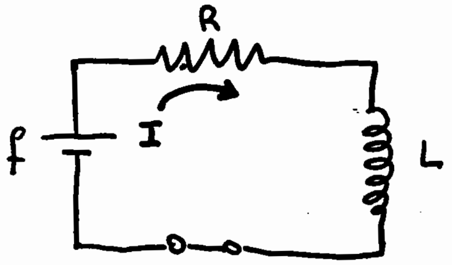
[ induttore]

NEL MOMENTO IN CUI SI CHIUDE L'INTERRUTTORE, NEL CIRCUITO COMINCIA A PASSARE CORRENTE E SI HA UNA VARIAZIONE DI FLUSSO NELL'INDUTTANZA L.

LA f.e.m. INDOTTA E' TALE DA OPPORSI AL PASSAGGIO DI CORRENTE.

N.B. L'INDUTTANZA VUOLE MANTENERE LO "STATUS QUO", NIENTE CORRENTE PRIMA E NIENTE CORRENTE DOPO

CIRCUITO RL



• APPLICHIAMO LA LEGGE DI KIRCHOFF AL CIRCUITO RL

$$f - RI - L\frac{dI}{dt} = 0$$

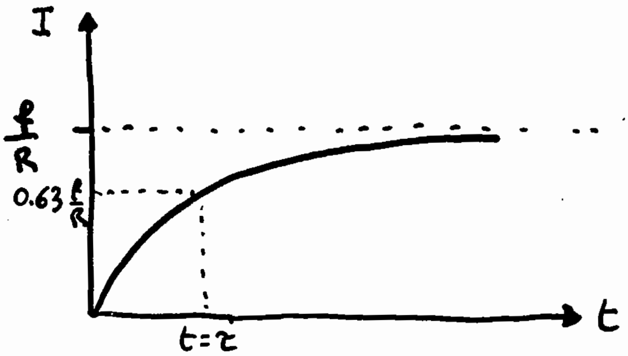
OTTENIAMO LA STESSA EQUAZIONE DEL CIRCUITO RC

$$f - R\frac{dq}{dt} - \frac{q}{C} = 0$$

• QUINDI LA SOLUZIONE DELL' EQUAZIONE DIFFERENZIALE E' LA STESSA

$$I(t) = \frac{f}{R}\left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right) = \frac{f}{R}\left(1 - e^{-t/\tau}\right) \quad ; \quad \tau = \frac{L}{R}$$

$$I(t=0) = 0 \quad ; \quad I(t=\infty) = \frac{f}{R} \quad ; \quad I(t=5\tau) = 0.993\,\frac{f}{R} \simeq \frac{f}{R}$$



CHIUSURA DELL' INTERRUTTORE

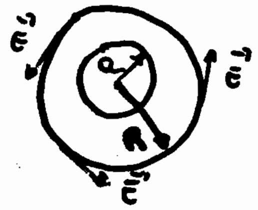
NELL' INDUTTANZA VIENE IMMAGAZZINATA L'ENERGIA

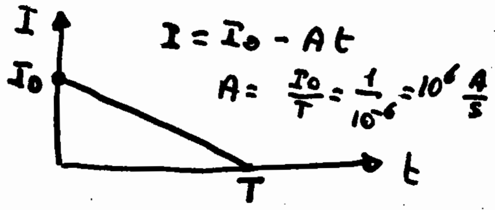
$$U_B = \frac{1}{2}LI^2 \qquad \left[\text{Nel condensatore } U_E = \tfrac{1}{2}CV^2\right]$$

QUESTA ENERGIA VIENE RESTITUITA QUANDO SI FA "SCARICARE" L'INDUTTANZA

PROBLEMA

UN SOLENOIDE RETTILINEO INDEFINITO, NEL VUOTO, AVENTE $n = 10^3$ SPIRE PER UNITA' DI LUNGHEZZA E SEZIONE CIRCOLARE DI RAGGIO $a = 1$ cm, E' PERCORSO DA UNA CORRENTE LA CUI INTENSITA' DECRESCE LINEARMENTE DAL VALORE $I_0 = 1$ A AL VALORE ZERO, IN UN TEMPO $T = 10^{-6}$ s. CALCOLARE IL CAMPO ELETTRICO ESISTENTE [NELL' INTERVALLO $(0,T)$] IN UN PUNTO ESTERNO AL SOLENOIDE A DISTANZA $R = 2$ cm DALL' ASSE.





IMMAGINIAMO CHE INTORNO AL SOLENOIDE VI SIA UNA SPIRA CIRCOLARE DI RAGGIO $R = 2$ cm.

CALCOLIAMO IL FLUSSO CONCATENATO CON LA SPIRA. IL CAMPO $\vec{B}$ E' PRESENTE SOLO DENTRO AL SOLENOIDE

$$\Phi(\vec{B}) = \int_S \vec{B} \cdot \hat{n}\, ds = B \pi a^2 = (\mu_0 n I)(\pi a^2) = \mu_0 n \pi a^2 (I_0 - At)$$

LA f.e.m. INDOTTA NELLA SPIRA VALE:

$$\mathcal{E} = -\frac{d\phi(B)}{dt} = -\frac{d}{dt}\left[\mu_0 n \pi a^2 (I_0 - At)\right] = +\mu_0 n \pi a^2 A \quad \text{[la f.e.m. è costante]}$$

CALCOLIAMO LA CIRCUITAZIONE DI $\vec{E}$ INTORNO ALLA SPIRA CIRCOLARE. PER RAGIONI DI SIMMETRIA IL CAMPO E' LO STESSO IN TUTTI I PUNTI DELLA SPIRA ED E' TANGENTE ALLA CIRCONFERENZA.

$$\mathcal{E} = \oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = E \oint dl = E\, 2\pi R$$

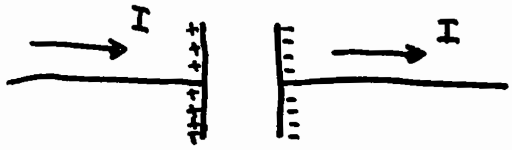
$$\Rightarrow E = \frac{\mathcal{E}}{2\pi R} = \frac{\mu_0 n \pi a^2 A}{2\pi R} = \frac{\mu_0 n a^2}{2R} A =$$

$$= \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \times 10^3 \times (10^{-2})^2}{2 \cdot 2 \cdot 10^{-2}} \cdot 10^6 = \pi \simeq 3.14 \frac{V}{m}$$

UN CAMPO MAGNETICO VARIABILE DA LUOGO NELLO SPAZIO AD UN CAMPO ELETTRICO

CORRENTE DI SPOSTAMENTO

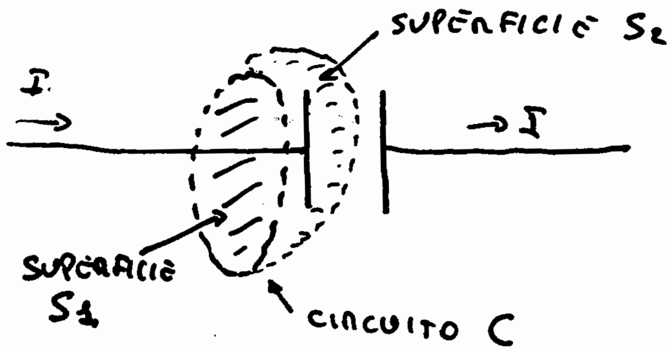
CONSIDERIAMO UN CONDENSATORE CHE SI STA CARICANDO



$$I(t) = I_0 e^{-t/\tau}$$

- FLUISCE UNA CORRENTE I NEL FILO (CORRENTE DI CONDUZIONE)
- SI HA UN ACCUMULO DI CARICHE SULLE ARMATURE DEL CONDENSATORE
- TRA LE ARMATURE SI STABILISCE UN CAMPO ELETTRICO
- <u>NON</u> C'E' PASSAGGIO DI CORRENTE (DI CONDUZIONE) TRA LE ARMATURE.
- LA CORRENTE CHE PASSA NEL FILO GENERA NELLO SPAZIO UN CAMPO MAGNETICO $\vec{B}$

APPLICHIAMO IL TEOREMA DI AMPERE:

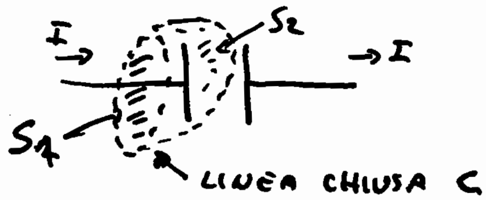


CONSIDERIAMO UNA LINEA CHIUSA C SULLA QUALE CALCOLARE $\oint \vec{B} \cdot d\vec{\ell}$

PRENDIAMO DUE SUPERFICI, S_1 e S_2, CHE HANNO ENTRAMBE LA LINEA CHIUSA C COME CONTORNO.

CORRENTE DI SPOSTAMENTO

- LA SUPERFICIE S_1 INTERSECA IL FILO ATTRAVERSO CUI PASSA LA CORRENTE I
- LA SUPERFICIE S_2 PASSA ATTRAVERSO IL CONDENSATORE, QUINDI NON INTERCETTA NESSUNA CORRENTE



APPLICHIAMO IL TEOREMA DI AMPERE $\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I$

- SUPERFICIE $S_1 \Rightarrow \oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I$
- SUPERFICIE $S_2 \Rightarrow \oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = 0$ [non c'è nessuna corrente]

VI È UNA CONTRADDIZIONE, DATO CHE IL PRIMO TERMINE È LO STESSO, DEVE ESSERE LO STESSO ANCHE IL SECONDO.

MAXWELL IPOTIZZÒ CHE TRA LE ARMATURE DEL CONDENSATORE SCORRESSE UNA CORRENTE CHE LUI CHIAMÒ DI SPOSTAMENTO.

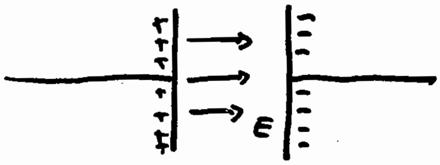
$$\boxed{I_s = \varepsilon_0 \frac{d\,\Phi(\vec{E})}{dt}}$$

- $\Phi(\vec{E})$ È IL FLUSSO DEL CAMPO $\vec{E}$ ATTRAVERSO LA SUPERFICIE S_2

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{d\,\Phi(\vec{E})}{dt}$$

CORRENTE DI SPOSTAMENTO

- VERIFICHIAMO CHE LA CORRENTE DI CONDUZIONE I E LA CORRENTE DI SPOSTAMENTO I_s SONO EQUIVALENTI



- ALL'INTERNO DEL CONDENSATORE È PRESENTE UN CAMPO

$$|\vec{E}| = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \qquad \left[\sigma = \frac{Q}{S} \text{ densità di carica} \right]$$

CALCOLIAMO $\Phi(\vec{E})$ ATTRAVERSO UNA SUPERFICIE CHE PASSI ALL'INTERNO DEL CONDENSATORE

$$\Phi_S(\vec{E}) = \int_{S_1} \vec{E} \cdot \hat{n} \, dS = E \cdot S = \frac{\sigma \cdot S}{\varepsilon_0} = \frac{Q}{\varepsilon_0} \qquad [\, S = \text{superficie di un'armatura} \,]$$

(fuori dal condensatore il campo $\vec{E}$ è nullo)

$$I_s = \varepsilon_0 \frac{d\Phi(\vec{E})}{dt} = \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_0} \frac{dQ}{dt} = \frac{dQ}{dt} = I$$

QUINDI IL TEOREMA DI AMPERE GENERALIZZATO SI SCRIVE:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{d\Phi(\vec{E})}{dt}$$

N.B. I CAMPI MAGNETICI SONO GENERATI NON SOLO DALLE CORRENTI I, MA ANCHE DA CAMPI ELETTRICI VARIABILI NEL TEMPO

EQUAZIONI DI MAXWELL

- TUTTI I FENOMENI ELETTRICI E MAGNETICI POSSONO ESSERE RIASSUNTI DALLE EQUAZIONI DI MAXWELL, CHE NEL VUOTO SONO:

FLUSSO DI $\vec{E}$ ATTRAVERSO UNA SUPERFICIE CHIUSA

- $$\int_{S_{CHIUSA}} \vec{E}\cdot\hat{n}\,dS = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$ [TEOREMA DI GAUSS]

FLUSSO DI $\vec{B}$ ATTRAVERSO UNA SUPERFICIE CHIUSA

- $$\int_{S_{CHIUSA}} \vec{B}\cdot\hat{n}\,dS = 0$$ [non esistono cariche magnetiche]

CIRCUITAZIONE DI $\vec{E}$

- $$\oint \vec{E}\cdot d\vec{\ell} = -\frac{d\Phi(\vec{B})}{dt}$$ [Legge di Faraday - Neumann]

CIRCUITAZIONE DI $\vec{B}$

- $$\oint \vec{B}\cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I + \varepsilon_0\mu_0\frac{d\Phi(\vec{E})}{dt}$$ [Teorema di Ampere generalizzato]

- DALLA CONOSCENZA DEI CAMPI $\vec{E}$ E $\vec{B}$ SI PUO' RICAVARE LA FORZA CHE AGISCE SU UNA PARTICELLA CARICA ATTRAVERSO LA FORZA DI LORENTZ

$$\vec{F} = q\vec{E} + q\vec{v}\times\vec{B}$$

N.B. IN ASSENZA DI CARICHE Q E CORRENTI I, LE EQUAZIONI DI MAXWELL SONO SIMMETRICHE NEI CAMPI $\vec{E}$ E $\vec{B}$