Anno Accademico 2003-2004

Dispense del corso di Fisica per Farmacia del Prof. Claudio Luci

http://www.roma1.infn.it/people/luci/corso_farmacia.html

Parte I

- Meccanica del punto
- Meccanica dei fluidi

LIBRI DI TESTO CONSIGLIATI

- **Serway & Jewett**
  Principi di Fisica (3° Edizione)   - Edises

- **Halliday – Resnik – Walker**
  Fondamenti di Fisica (5° Edizione) – Casa Editrice Ambrosiana

Lo studente è libero di utilizzare uno dei due libri o qualunque altro testo simile, oppure edizioni precedenti degli stessi.

<u>Libri di esercizi</u>

- **Gordon – Mcgrew – Van Wyk – Serway** (2 vol.)
  Guida alla soluzione dei problemi da:
  Principi di Fisica (Serway) [2° Edizione] – Edises
- **Ragozzino** – Problemi di Fisica (meccanica e termodinamica) – Editoriale Grasso

<u>Ausilio Matematico</u>

- **Davidson**: Metodi matematici per un corso introduttivo di Fisica – Edises

<u>Dispense</u> (presso i "chioschi gialli")

- **Bagnaia-Luci**: esercizi d'esame con soluzione
- **Luci**: dispense del corso di Fisica per Farmacia

INTRODUZIONE

- LA FISICA E' UNA SCIENZA SPERIMENTALE

- LE LEGGI FISICHE DEVONO ESSERE RIPRODUCIBILI

- LA FISICA E' UNA SCIENZA QUANTITATIVA

- LA MISURA E' UN CONCETTO FONDAMENTALE DELLA FISICA

- OCCORRE DEFINIRE DEI CAMPIONI FONDAMENTALI PER LE UNITA' DI MISURA
  - ACCESSIBILI
  - INVARIABILI

- GRANDEZZE FONDAMENTALI E GRANDEZZE DERIVATE

METODO SCIENTIFICO

- SCHEMATIZZAZIONE DEL FENOMENO
  - DISTINZIONE TRA CAUSE DOMINANTI E CAUSE SECONDARIE
  - TRATTANDO SOLO LE CAUSE DOMINANTI, AL FENOMENO IN ESAME SI PUO' SOSTITUIRE UN MODELLO. IL MODELLO E' UN'ASTRAZIONE MATEMATICA
- MISURA
- OSSERVAZIONE SPERIMENTALE
- LEGGE FISICA
- PREVISIONE
- VERIFICA SPERIMENTALE

IL SISTEMA INTERNAZIONALE DELLE UNITA' DI MISURA

• LUNGHEZZA

metro campione 1782 - barra di platino-iridio

1960 : 1 650 763.73 lunghezze d'onda del Kr-86

$$1983 = c \cdot \frac{1}{299\,792\,458 \text{ secondi}}$$

• TEMPO

QUANTO E' DURATO ? QUANDO E' ACCADUTO ?

- rotazione della terra giorno solare medio

1 SECONDO : 9 192 631 770 OSCILLAZIONI CESIO 133

• MASSA

CHILOGRAMMO : CILINDRO DI PLATINO-IRIDIO

SISTEMA MKS

M: metro
K: kilogrammo
S: secondo

PROBLEMA DI FERMI

[OVVERO TROVARE L'ORDINE DI GRANDEZZA DELLA RISPOS

ESEMPIO:

QUANTI SOLDI VENGONO SPESI OGNI ANNO IN ITALIA PER COMPRARE BENZINA PER LE AUTOMOBILI ?

o o o o

- NUMERO DI ITALIANI $\simeq$ 60 MILIONI
- $N_{AUTOMOBILI} \simeq \frac{1}{3} \cdot N_{ITALIANI} = 20$ MILIONI
- $N_{KM} = N_{AUTOMOBILI} \cdot N_{KM\_AUTO} = 20 \cdot 10^6 \cdot 15 \cdot 10^3 = 30 \cdot 10^{10}$ km
- km/litro $\simeq$ 10 km/l

$\Rightarrow$ litri di benzina $= \dfrac{N_{KM}}{km/l} = \dfrac{30 \cdot 10^{10}\ km}{10\ km/l} = 30 \cdot 10^9$ litri

- COSTO DELLA BENZINA $\simeq$ 2000 lire

$\Rightarrow$ SOLDI SPESI $= 30 \cdot 10^9 \cdot 2 \cdot 10^3 \simeq 60 \cdot 10^{12}$ lire $=$ 60'000 MILIARDI

$\Rightarrow$ SOLDI SPESI PER AUTO ?

$\dfrac{6 \cdot 10^{13}}{2 \cdot 10^7} = 3 \cdot 10^6$ = TRE MILIONI DI LIRE /ANNO

Introduzione alla cinematica

- La cinematica si pone come obiettivo lo studio del moto, ovvero lo studio degli spostamenti di un corpo in funzione del tempo.

- A tale fine viene introdotto un concetto astratto: **il punto materiale**. Esso è un oggetto privo di dimensioni (ovvero puntiforme) ma che tuttavia possiede una massa. Più avanti nel corso identificheremo il punto materiale con il centro di massa di un corpo.

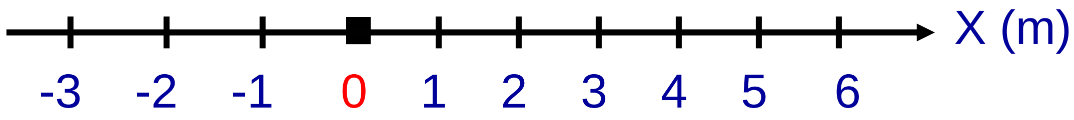
- Un punto materiale spostandosi nello spazio occupa successivamente una serie di punti geometrici. L'insieme di questi punti costituisce la **TRAIETTORIA** descritta dal punto.

- La traiettoria descrive una curva qualsiasi nello spazio. Per semplificare lo studio della cinematica in questo corso, considereremo soltanto delle traiettorie che descrivano delle figure geometriche semplici, quali linee rette, circonferenze, parabole, ellissi.

- Nei casi complessi, in genere, si cerca di ridursi a dei casi semplici con delle approssimazioni, oppure ad una somma di casi semplici.

- Da notare che lo studio delle curve nello spazio ricade nell'ambito della **geometria**. La geometria ha origini antichissime, basti pensare ai principi di Euclide.

Moto unidimensionale.
Il moto avviene lungo una retta



- Dobbiamo definire che cosa è lo spostamento e darne una misura quantitativa. Per fare ciò introduciamo **l'asse cartesiano.**

- Definiamo sulla retta un'origine rispetto alla quale misurare gli spostamenti.

- Definiamo un verso di percorrenza in modo da avere sia spostamenti positivi che negativi. La scelta è arbitraria.

- Definiamo un'unità di misura della lunghezza per misurare lo spostamento, ad esempio il metro.

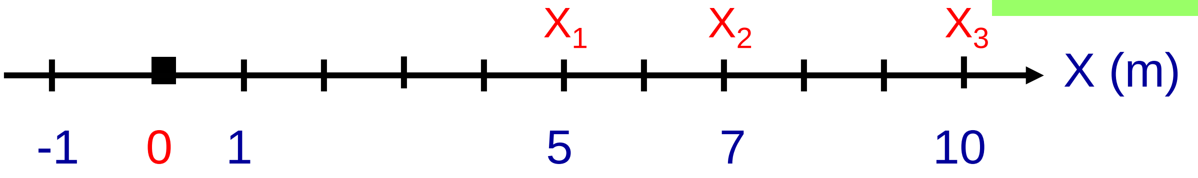
Se un punto materiale si trova nella posizione $\mathbf{X_1}$ e successivamente si trova nella posizione $\mathbf{X_2}$, il suo spostamento sarà dato da:

$$\boxed{\Delta X = X_2 - X_1}$$

<u>Valore finale</u> <u>Valore iniziale</u>

Lo spostamento ha un segno. Può essere positivo o negativo.

Ancora sullo spostamento



$$\boxed{\Delta X = X_2 - X_1}$$

- Non sappiamo nulla su cosa abbia fatto il punto mentre andava da X_1 a X_2 e su quanto spazio abbia effettivamente percorso.

Spazio percorso $\neq$ ΔX

- Facciamo un esempio: $X_1 = 5$ m ; $X_2 = 7$ m

  Immaginiamo che il punto, partendo da X_1, sia andato prima nel punto $X_3 = 10$ m, e poi sia tornato indietro nel punto X_2.

$$\mathbf{\Delta X = X_2 - X_1 = \underbrace{(X_2 - X_3)}_{\Delta X_2} + \underbrace{(X_3 - X_1)}_{\Delta X_1} =}$$

$$\mathbf{2 \quad = \; (7 - 10) \; + (10 - 5) \; = -3 + 5 \; = 2\ m}$$

- Per trovare lo spazio percorso dobbiamo considerare il valore assoluto dello spostamento.

  Esempio: spazio percorso = $\mathbf{|X_2 - X_3| + |X_3 - X_1| =}$

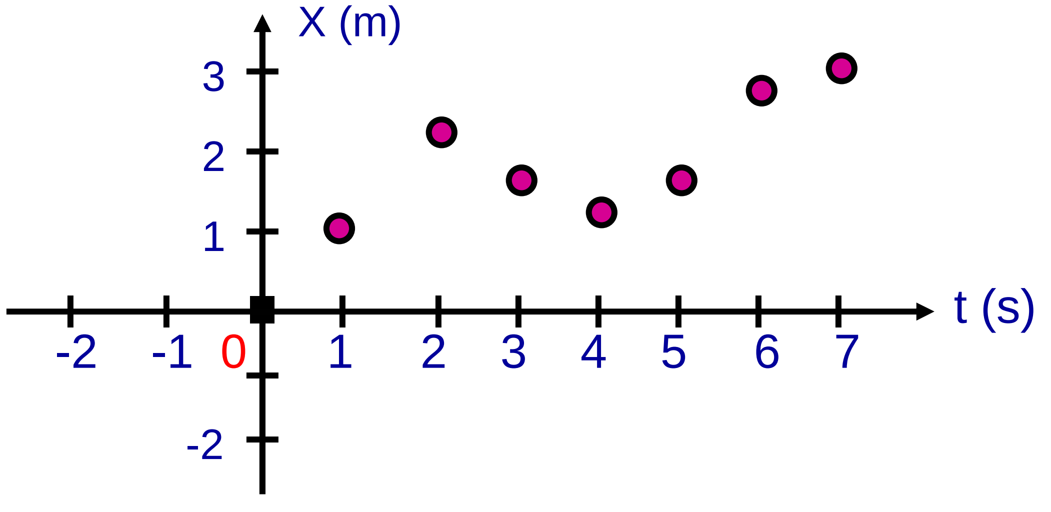
$$\mathbf{3 \qquad + \qquad 5 \qquad = \; 8\ m}$$

- Come si vede lo spazio percorso è diverso dallo spostamento.

Legge oraria

- Supponiamo di scattare una fotografia ogni secondo al punto materiale che si sta spostando lungo la retta graduata.

- Costruiamo quindi il seguente grafico, dove in ascissa mettiamo il tempo e sulle ordinate mettiamo lo spazio. Anche per il tempo fissiamo un'origine, mentre per il verso non abbiamo scelta in quanto il tempo scorre in una direzione soltanto.



- Non sappiamo quale sia stato il tipo di moto del punto tra una fotografia e l'altra. Possiamo assumere che abbia fatto il moto più semplice (moto rettilineo uniforme).

- Se vogliamo più informazioni sul moto, dobbiamo diminuire l'intervallo tra una foto e l'altra, facciamo ad esempio una foto ogni decimo di secondo.

- Possiamo immaginare di ridurre sempre più il tempo intercorso tra una fotografia e l'altra, fino a quando questi diventa un infinitesimo.

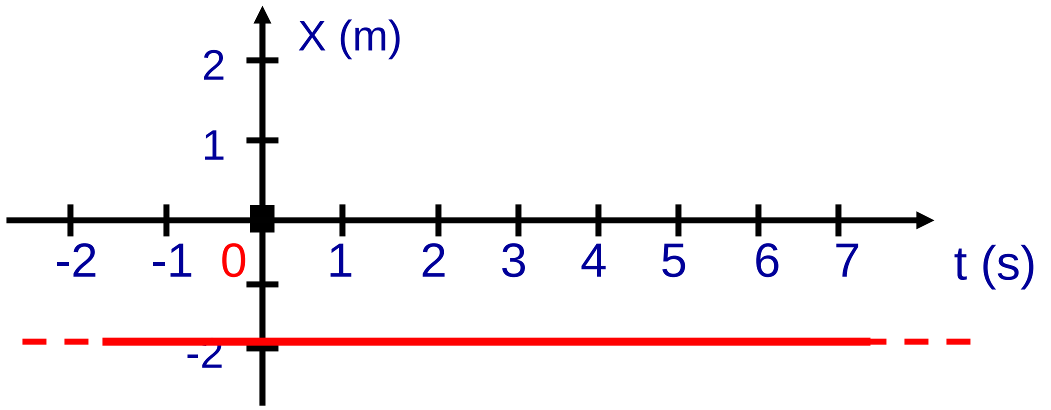
- Abbiamo ottenuto così una funzione continua dello spazio in funzione del tempo:

$X = X(t)$ [si può anche scrivere $X = f(t)$]

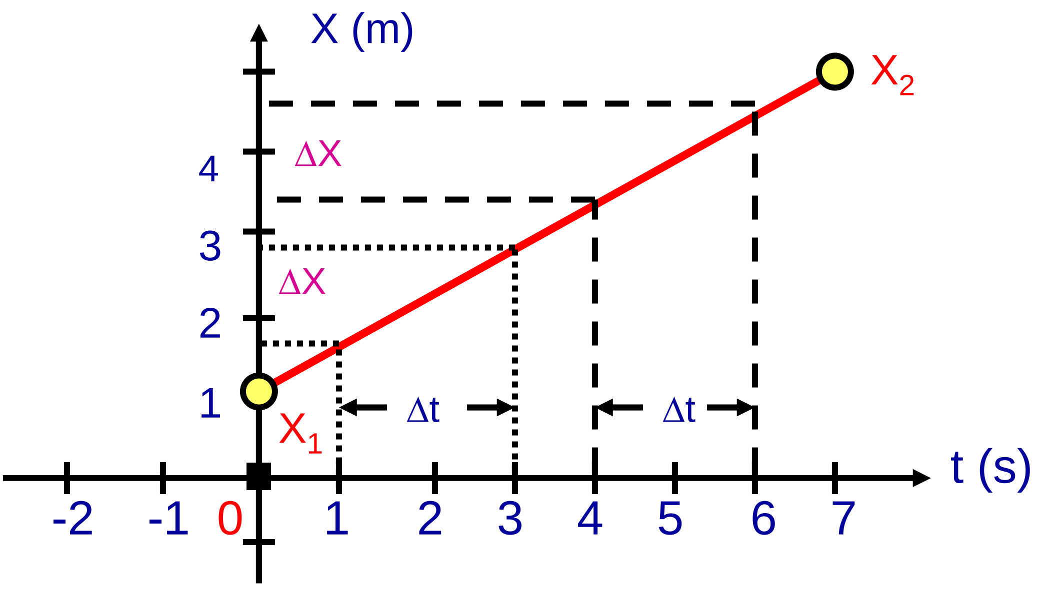
- Questa funzione si chiama **legge oraria del moto.**

Legge oraria: due esempi.

- Immaginiamo una lepre che stia ferma nel punto X = - 2 m



- Immaginiamo ora la lepre che si sta muovendo secondo la seguente legge oraria:



- Da notare in questo tipo di moto che se noi scegliamo un intervallo di tempo Δt, lo spostamento ΔX della lepre è sempre lo stesso, qualunque sia il punto in cui si trova la lepre. Come vedremo questa è la caratteristica del moto rettilineo uniforme.

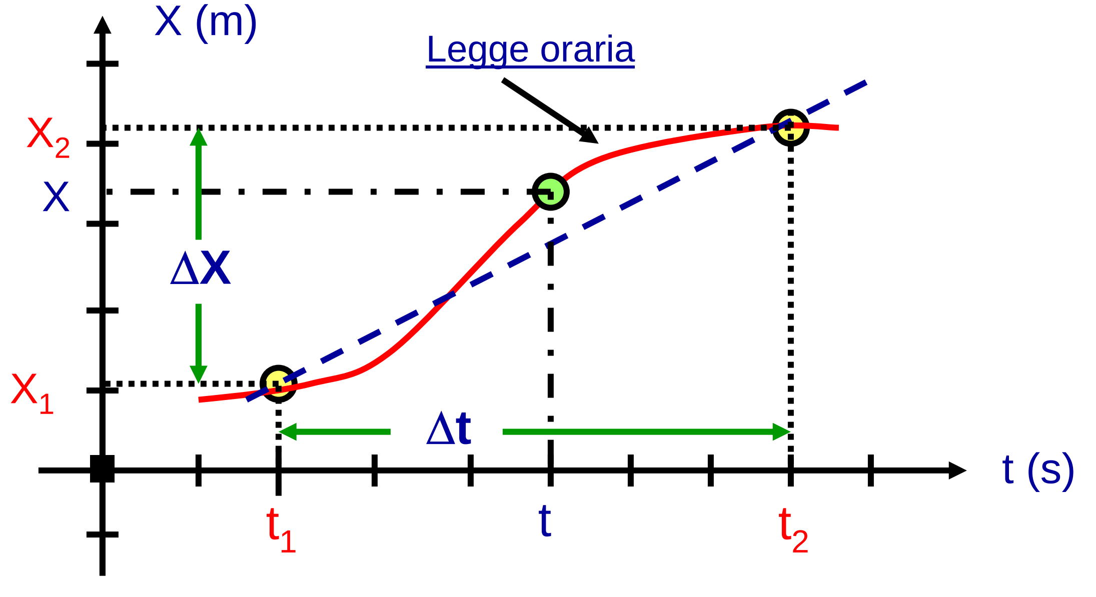
Definizione di velocità media

- La velocità media è il rapporto tra lo spostamento di un punto materiale e l'intervallo di tempo impiegato per realizzarlo.

$$v_{media} = \frac{\Delta X}{\Delta t} = \frac{X_2 - X_1}{t_2 - t_1}$$

Da notare che la velocità ha sempre lo stesso segno dello spostamento, perché Δt è sempre positivo (il tempo, purtroppo, non scorre mai all'indietro!)

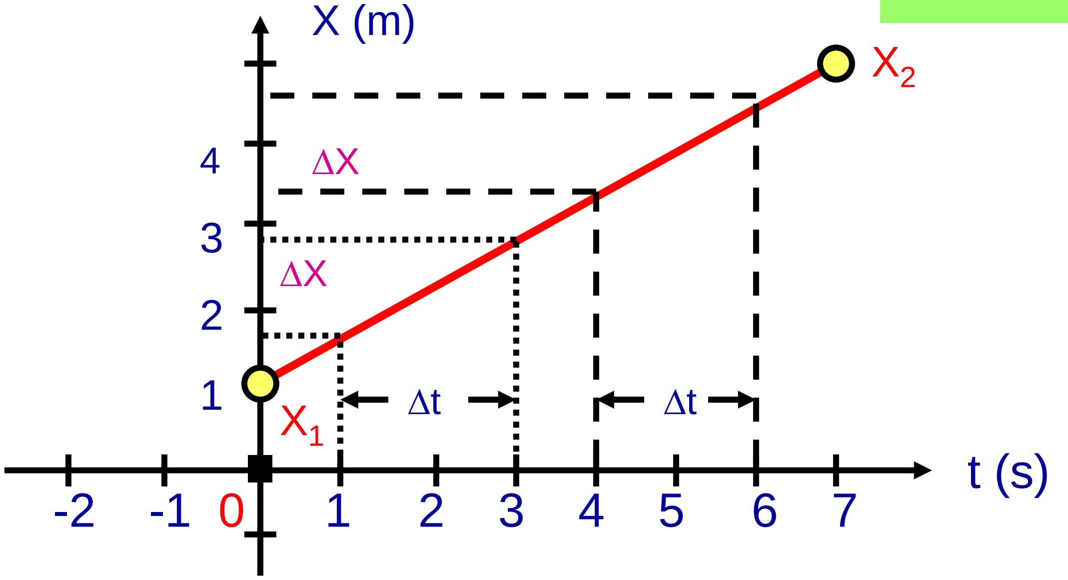
- Prendiamo il grafico che mostra la posizione di un corpo in funzione del tempo. La linea rossa rappresenta la legge oraria del corpo.



- Prendiamo due punti qualsiasi sul grafico (t_1, t_2). La velocità media esprime la pendenza della retta che unisce il punto iniziale ed il punto finale.

- Così facendo abbiamo approssimato la vera legge oraria con una retta.

Moto rettilineo uniforme

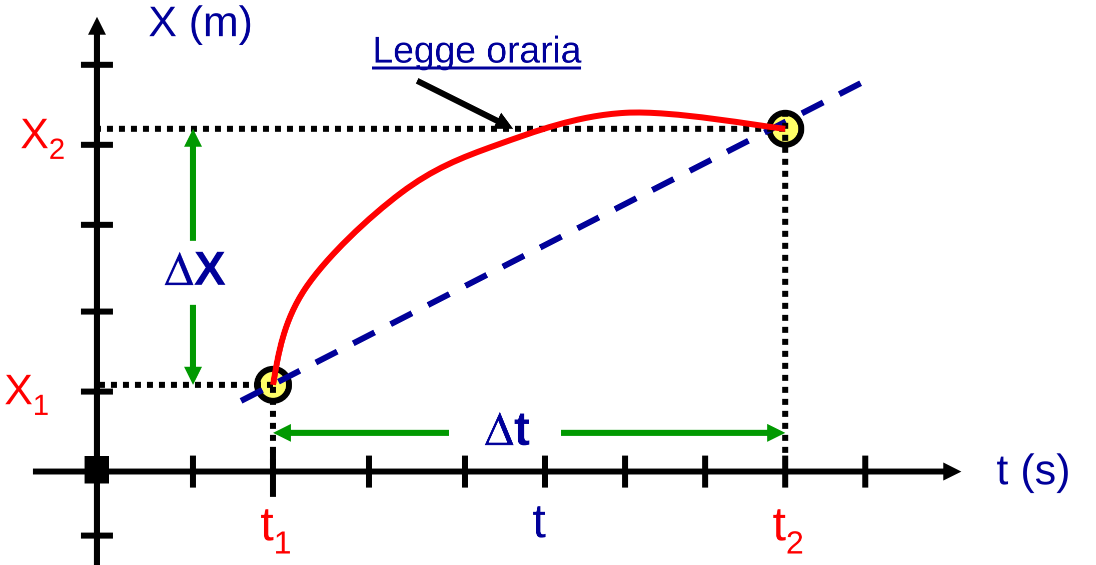


- Il moto avviene lungo una retta

- La velocità media è la stessa per qualsiasi Δt da noi scelto

$$v_{media} = \frac{\Delta X}{\Delta t} = \frac{X_2 - X_1}{t_2 - t_1} = \text{costante}$$

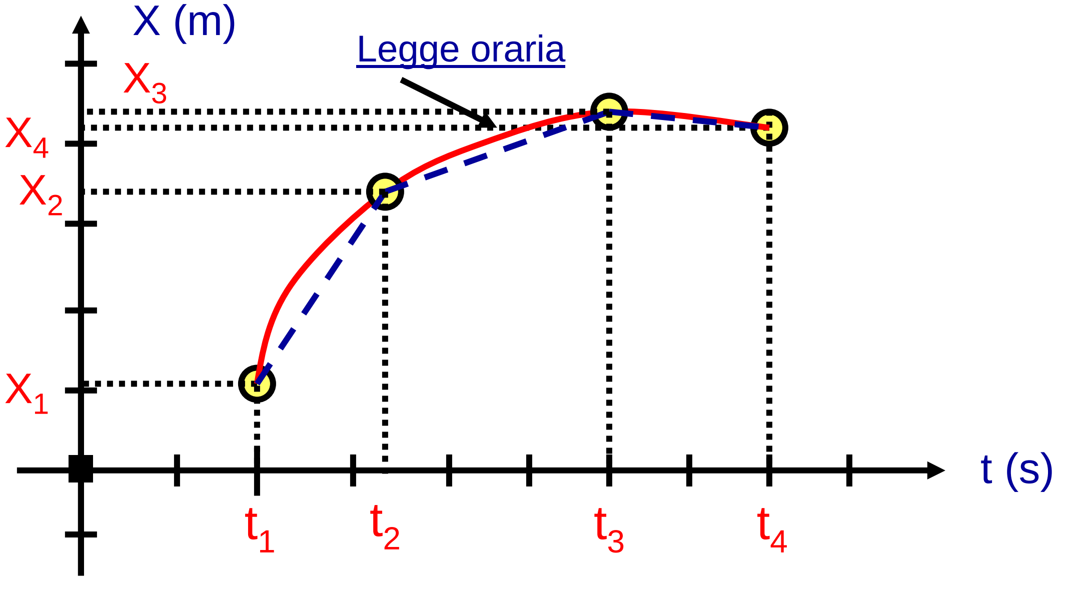
- Quando parliamo di velocità media stiamo approssimando il moto qualsiasi di un corpo tra X_1 e X_2 con un modo rettilineo uniforme



Velocità istantanea

- La conoscenza della velocità media corrispondente allo spostamento ΔX non ci dà informazioni sulla velocità della particella durante l'intervallo di tempo in cui è avvenuto lo spostamento.

- Per ovviare a questo problema si può pensare di ridurre l'intervallo Δt in tanti intervalli Δt più piccoli, in modo che l'approssimazione del moto qualsiasi con un moto rettilineo uniforme migliori (ovvero si approssima il moto qualsiasi con una somma di moti rettilinei uniformi).



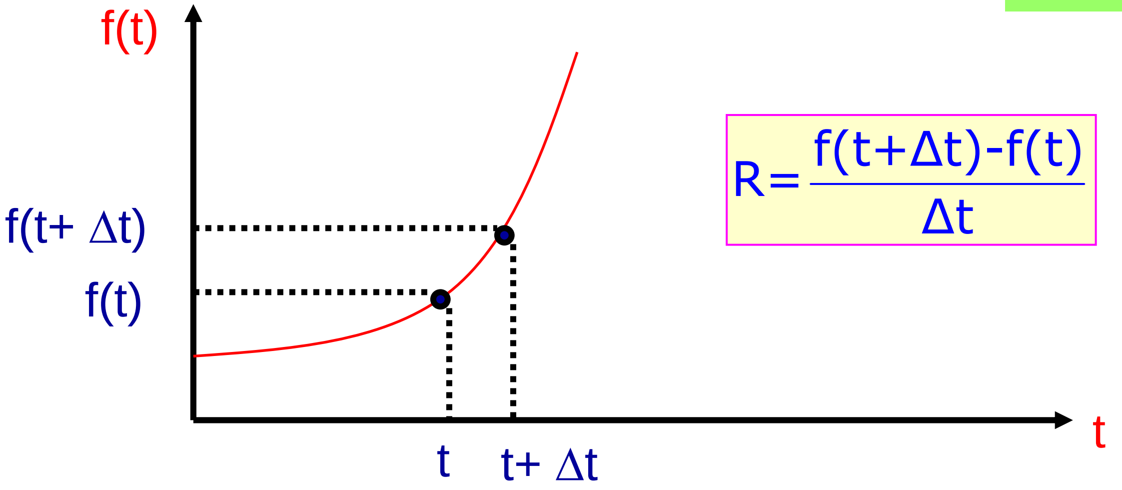
- In questo caso particolare la velocità media dei tre intervalli Δt è diversa nei tre intervalli (in particolare nel terzo intervallo è negativa perché il corpo torna indietro) ed è diversa dalla velocità media nell'intervallo $\Delta t = t_4 - t_1$

- Per conoscere la velocità media nell'intorno di un punto qualsiasi della traiettoria occorre ridurre sempre più l'intervallo, fino a farlo diventare un intervallo infinitesimo.

- La definizione di velocità istantanea del punto al tempo t_1 è la seguente:

$$\boxed{v(t_1) = \lim_{t_2 \to t_1} \frac{X_2 - X_1}{t_2 - t_1}}$$

Derivata



$$R = \frac{f(t+\Delta t)-f(t)}{\Delta t}$$

- Si prenda una funzione qualsiasi f(t)
- Si costruisce il rapporto incrementale R

- Si definisce la derivata della funzione f(t) il limite del rapporto incrementale R per Δt che tende a zero.

$$f'(t) \equiv \frac{df}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(t+\Delta t)-f(t)}{\Delta t}$$

- La velocità istantanea è la derivata rispetto al tempo della funzione x(t) [legge oraria]

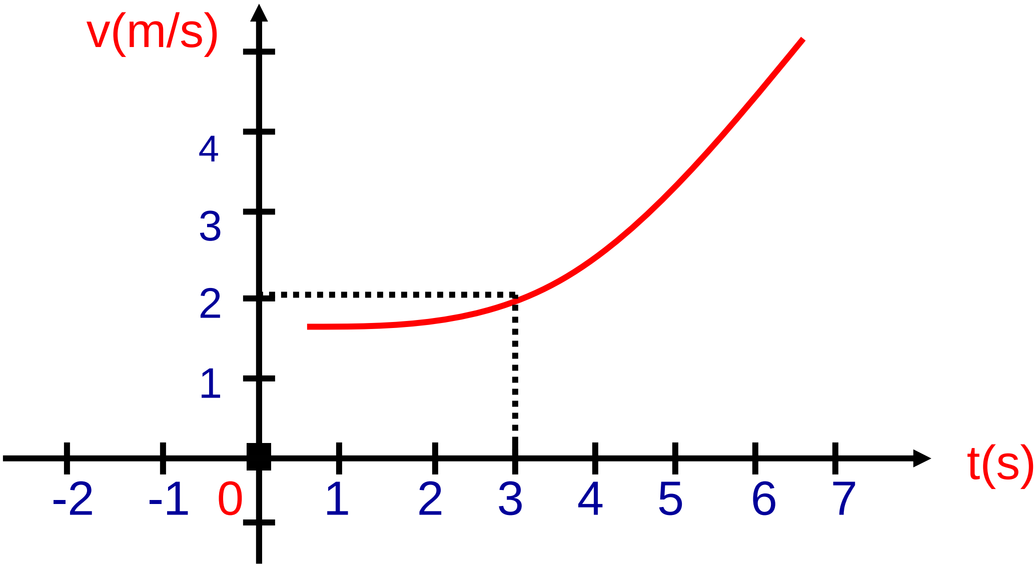
$$v \equiv \frac{dx}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{x(t+\Delta t)-x(t)}{\Delta t}$$

- Alcuni esempi:
  - $x(t) = \text{costante} \quad \Rightarrow \quad v = \frac{dx}{dt} = 0$
  - $x(t) = A + B \cdot t \quad \Rightarrow \quad v = \frac{dx}{dt} = B$
  - $x(t) = A \cdot t^2 \quad \Rightarrow \quad v = \frac{dx}{dt} = 2At$
  - $x(t) = A \cdot \sin(\omega t) \Rightarrow \quad v = \frac{dx}{dt} = \omega A \cdot \cos(\omega t)$
  - $x(t) = \log(t) \quad \Rightarrow \quad v = \frac{dx}{dt} = \frac{1}{t}$

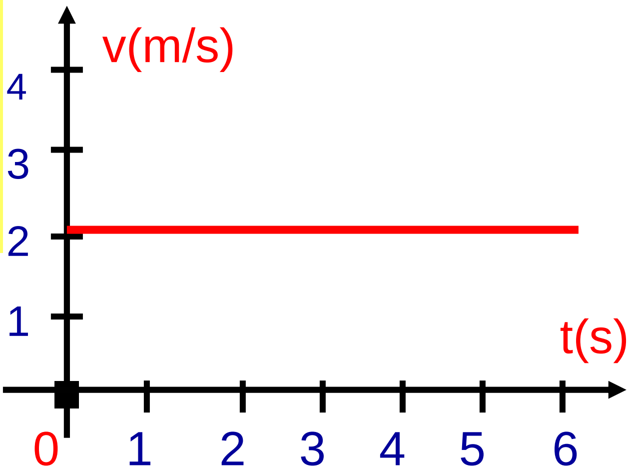
Accelerazione

- La velocità istantanea è definita per ogni istante di tempo t; abbiamo cioè una funzione v(t).

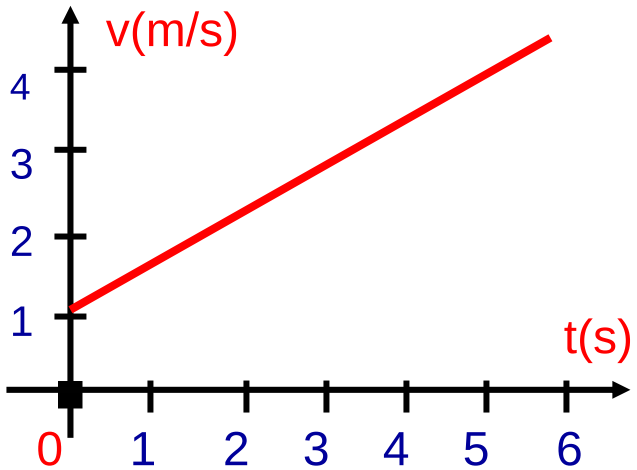
- Possiamo costruire il grafico seguente:



- Due casi particolari:



Moto rettilineo uniforme

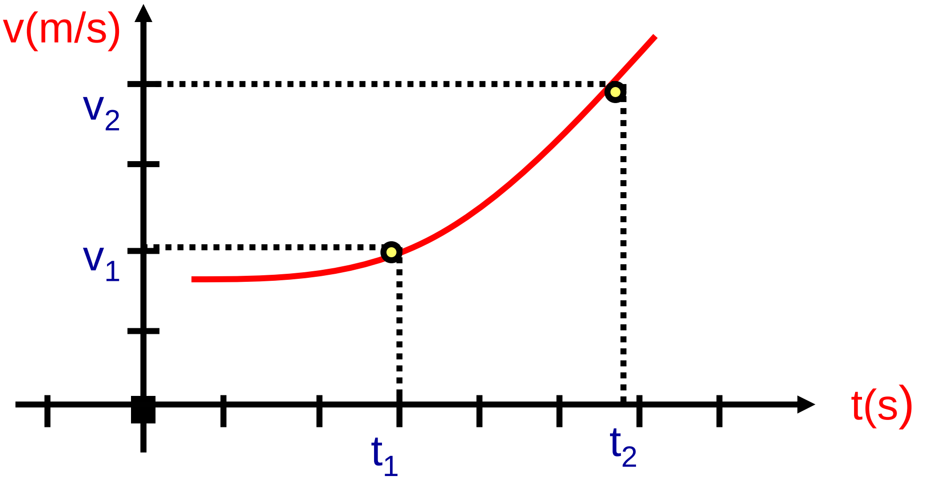


Moto uniformemente accelerato

Accelerazione

- Per definire l'accelerazione si può applicare di nuovo quanto detto a proposito della velocità

- L'accelerazione è una misura della variazione della velocità rispetto al tempo:



- Accelerazione media:

$$a_{media} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1}$$

Si misura in m/s^2

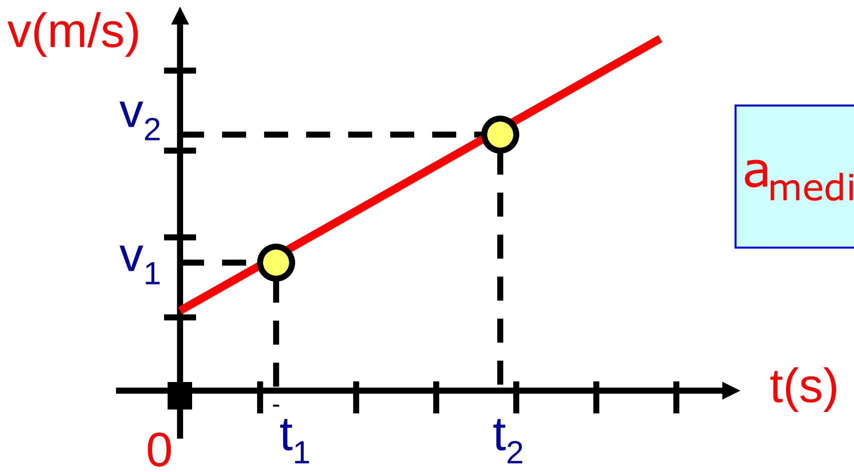
- L'accelerazione ha un segno che può essere diverso rispetto al segno della velocità
  - Se voi siete in automobile e frenate, l'auto continua ad andare avanti ma l'accelerazione è diretta all'indietro

- Accelerazione istantanea:

$$a(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{v(t+\Delta t) - v(t)}{\Delta t}$$

- L'accelerazione è la derivata rispetto al tempo della velocità ovvero è la derivata seconda dello spazio rispetto al tempo.

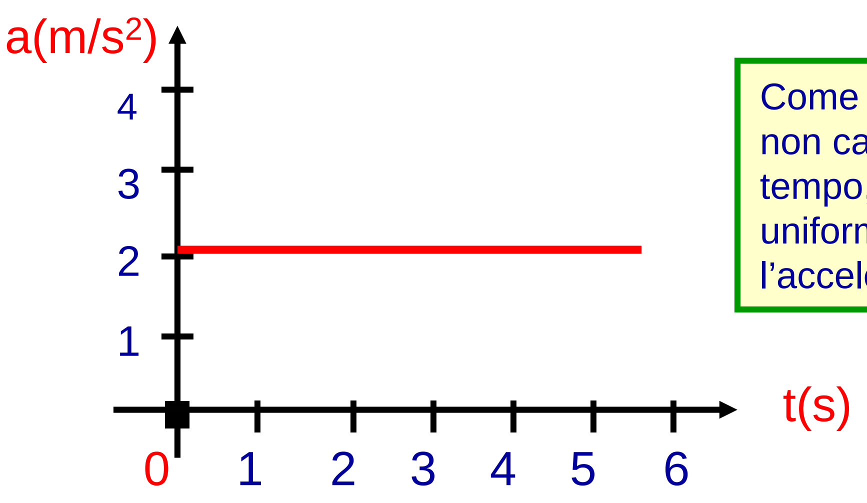
Moto uniformemente accelerato



$$a_{media} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1}$$

- Nel moto uniformemente accelerato l'accelerazione media è la stessa qualunque sia l'intervallo di tempo $t_2 - t_1$ scelto.

- Facciamo il grafico dell'accelerazione istantanea in funzione del tempo nel caso del moto uniformemente accelerato:



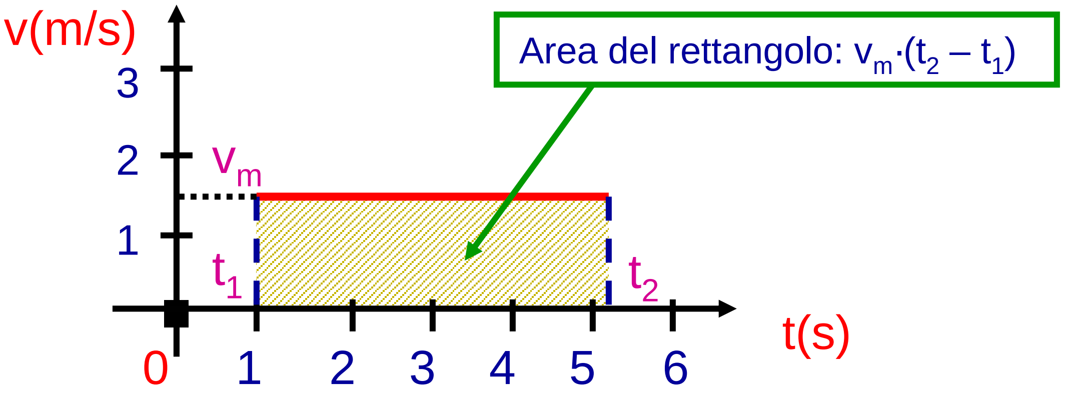
Come si vede l'accelerazione non cambia in funzione del tempo, ovvero nel moto uniformemente accelerato l'accelerazione è costante.

- Molti dei moti che studieremo, e che avvengono in natura, sono di questo tipo:
  - Caduta di un grave in prossimità della superficie della terra
  - Moto di un elettrone in un tubo a raggi catodici
  - Etc…

N.B. Non ha nessuna importanza la derivata dell'accelerazione

Problema: trovare lo spostamento conoscendo la velocità.

- Caso semplice: moto rettilineo uniforme.



- Supponiamo che tra gli istanti t_1 e t_2 il punto si sia mosso con velocità costante v_m, allora abbiamo:

$$v_m = \frac{X_2 - X_1}{t_2 - t_1} \Rightarrow \boxed{X_2 - X_1 = v_m \cdot (t_2 - t_1)}$$

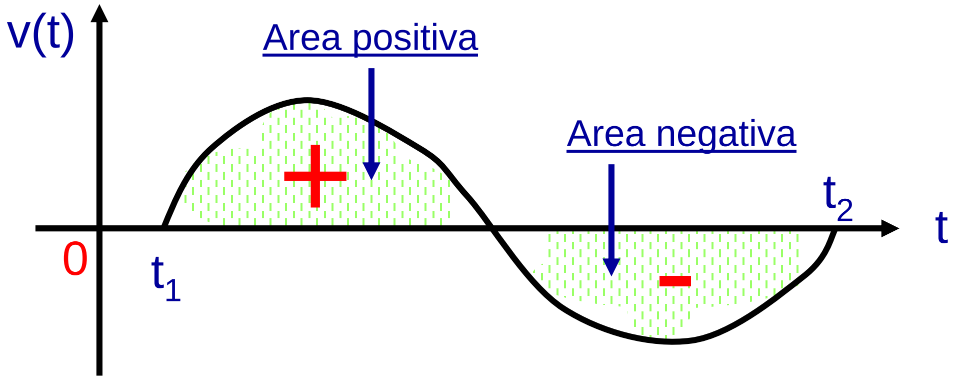
- <u>Lo spostamento</u> ($X_2 - X_1$) <u>è uguale all'area compresa tra il grafico della velocità e l'asse dei tempi.</u>

- Per conoscere il punto finale X_2 occorre conoscere il punto iniziale X_1.

$$\boxed{X_2 = X_1 + v_m \cdot (t_2 - t_1)}$$

- Riassumendo: per trovare il punto di arrivo di un corpo che si sta muovendo con velocità costante, occorre conoscere:
  - La velocità del corpo
  - L'intervallo di tempo ($t_2 - t_1$) nel quale è avvenuto il moto
  - Il punto di partenza (condizione al contorno)

Velocità → spazio: caso generale



- L'area racchiusa al di sopra dell'asse dei tempi (velocità positive) è positiva; l'area racchiusa al di sotto dell'asse dei tempi (velocità negative) è negativa.

- Lo spostamento del corpo tra gli istanti t_1 e t_2 corrisponde all'area racchiusa dalla curva, presa con i segni corrispondenti.

- Per conoscere la posizione finale occorre conoscere a priori (dato del problema) la posizione iniziale.

- Problema: come calcolare l'area racchiusa dalla curva? Risposta: integrale definito.

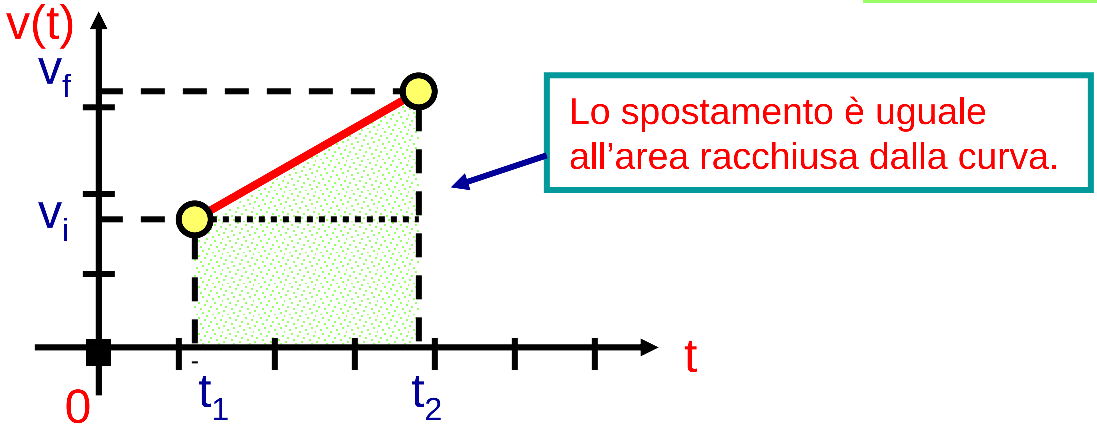
$$\text{Spostamento} \equiv S = \int_{t_1}^{t_2} v(t)dt$$

- Esempio: moto rettilineo uniforme, $v(t) = v_m$

$$S = \int_{t_1}^{t_2} v_m dt = v_m \int_{t_1}^{t_2} dt = v_m \cdot t\Big|_{t_1}^{t_2} = v_m \cdot (t_2 - t_1)$$

- Nel caso di figure geometriche semplici (rettangoli, triangoli, circonferenze, etc…) possiamo calcolarne l'area anche senza ricorrere all'integrale definito.

Velocità → spazio: esempio



- Esempio: un corpo si muove di moto uniformemente accelerato tra gli istanti di tempo t_1 e t_2. All'istante iniziale il corpo ha velocità pari a v_i.
- Lo spostamento è pari all'area racchiusa dalla curva. In questo caso semplice possiamo calcolare l'area anche senza risolvere l'integrale definito.
- La curva corrisponde ad un rettangolo con sovrapposto un triangolo:
  - Rettangolo: base = $t_2 - t_1$; altezza = v_i → area = $(t_2 - t_1) \cdot v_i$
  - Triangolo: base = $t_2 - t_1$; altezza = $v_f - v_i$ → area = $\frac{1}{2}(t_2 - t_1) \cdot (v_f - v_i)$
  - Area totale = area_rettangolo + area_triangolo =

$$= (t_2 - t_1) \cdot v_i + \frac{1}{2}(t_2 - t_1)(v_f - v_i) = (t_2 - t_1)\frac{v_f + v_i}{2} = \Delta t \cdot v_m$$

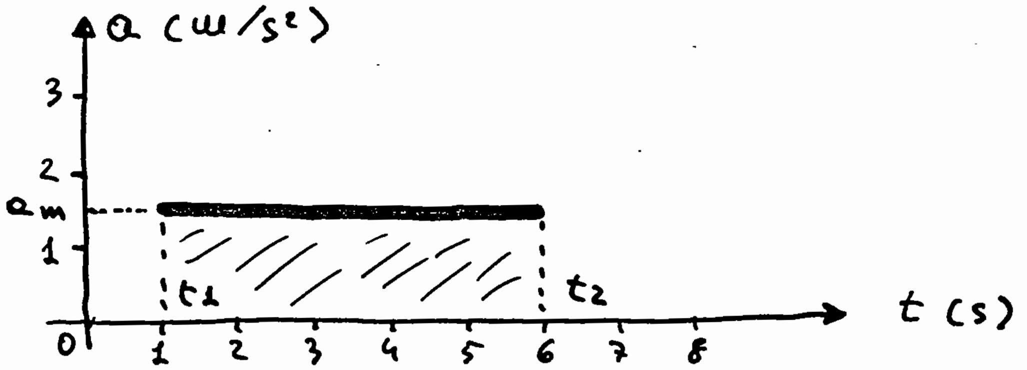
$$\Rightarrow \quad X_2 = X_1 + \Delta t \cdot v_m$$

PROBLEMA

TROVARE LA VELOCITA' CONOSCENDO L'ACCELERAZIONE

- QUESTO È IL CASO CHE AVVIENE PIÙ FREQUENTEMENTE COME VEDREMO TRA QUALCHE LEZIONE, DI SOLITO SI RIESCE A CONOSCERE L'ACCELERAZIONE DI UN CORPO, E DA QUI OCCORRE RISALIRE ALLA LEGGE ORARIA X(t)

- CASO SEMPLICE: MOTO UNIFORMEMENTE ACCELERATO



- SUPPONIAMO CHE TRA GLI ISTANTI t_1 e t_2 IL CORPO SI MUOVA CON ACCELERAZIONE COSTANTE a_m

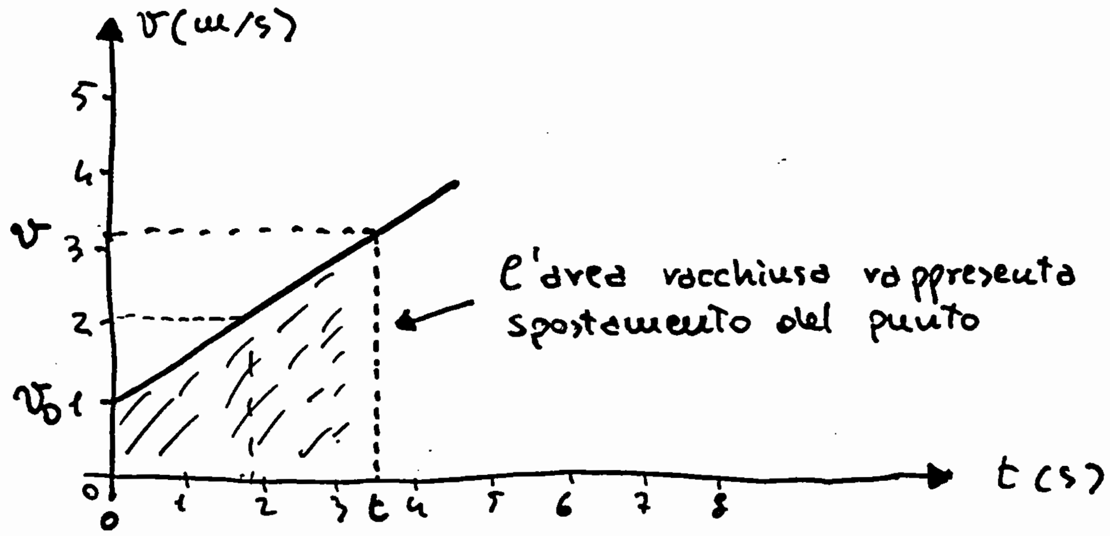
$$\Rightarrow \quad a_m = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} \quad \Rightarrow \quad v_2 - v_1 = a_m \cdot (t_2 - t_1)$$

- LA VARIAZIONE DI VELOCITA' $(v_2 - v_1)$ È UGUALE ALL'AREA COMPRESA TRA IL GRAFICO DELL'ACCELERAZIONE E L'ASSE DEI TEMPI

- PER CONOSCERE LA VELOCITA' FINALE v_2 OCCORRE CONOSCERE LA VELOCITA' INIZIALE v_1

$$v_2 = v_1 + a_m \cdot (t_2 - t_1)$$

ACCELERAZIONE → VELOCITA'
VELOCITA' → SPAZIO



- $\bar{v} = \frac{x - x_0}{t - 0}$

➡ $x = x_0 + \bar{v}\, t$ • $\bar{v} = \frac{1}{2}(v_0 + v)$

- CONOSCENDO L'ACCELERAZIONE SI HA:

$$v = v_0 + a t$$

➡ $\bar{v} = \frac{1}{2}(v_0 + v_0 + a t) = V_0 + \frac{1}{2} a t$ moto uniformemente accelerato

- $x = x_0 + \left[V_0 + \frac{1}{2} a t\right] \cdot t = x_0 + V_0 t + \frac{1}{2} a t^2$

$$\boxed{x = x_0 + V_0 t + \frac{1}{2} a t^2}$$ $x = f(t)$

Eq. del moto ad accelerazione costante

- AVETE $\underline{a}$ e $\underline{V_0}$:
  QUANTO VALE v DOPO UN TEMPO t ?

$$v = v_0 + at$$

- CONOSCETE $\underline{a}$, $\underline{x_0}$, $\underline{v_0}$:
  QUANTO VALE x DOPO UN TEMPO t ?

$$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$$

- CONOSCETE a, v_0, x_0 :
  QUANTO VALE v DOPO UNO SPOSTAMENTO x ?

$$v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0)$$

- CONOSCETE x_0, V_0 :
  QUANTO VALE x SE DOPO UN TEMPO t LA VELOCITA' VALE v ?

$$x = x_0 + \frac{1}{2}(V_0 + v)t$$

- CONOSCETE x_0, a :
  QUANTO VALE x SE DOPO UN TEMPO t LA VELOCITA' VALE v ?

$$x = x_0 + vt - \frac{1}{2} a t^2$$

ACCELERAZIONE NEL MOTO DI CADUTA LIBERA

- TRASCURANDO L'ATTRITO DELL'ARIA (GALILEO GALILEI) SI TRATTA DI UN MOTO UNIFORMEMENTE ACCELERATO (ACCELERAZIONE COSTANTE)

- SCEGLIETE UN ASSE VERTICALE PER IDENTIFICARE LA DIREZIONE DEL MOTO

- SCEGLIETE UN VERSO DI PERCORRENZA:
  - POSITIVO VERSO L'ALTO $\Rightarrow$ $g = -9.80\ m/s^2$
  - POSITIVO VERSO IL BASSO $\Rightarrow$ $g = +9.80\ m/s^2$

- QUALUNQUE SIA LA SCELTA CHE VOI FATE, L'ACCELERAZIONE DI GRAVITA' E' SEMPRE DIRETTA VERSO IL CENTRO DELLA TERRA

- PICCOLO CAMBIO DI NOTAZIONE: GLI SPOSTAMENTI CHE AVVENGONO NELLA DIREZIONE VERTICALE LI INDICHIAMO CON Y INVECE DI X

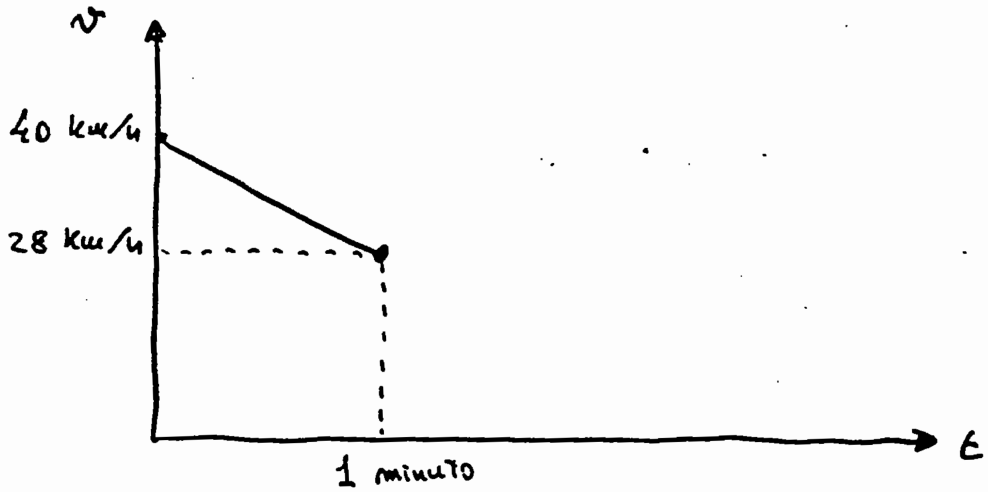
ESERCIZI CONSIGLIATI

Moto in una dimensione

- Serway (3° Edizione) – Cap. 2
  - 1 – 3 – 5 – 7 – 9 – 11 – 13 – 15 – 17 – 19 – 21 – 23 – 25 – 27 – 29 – 31 – 33 – 35 – 37 – 39 – 41 – 45 – 47 – 51 – 55
- Halliday (5° Edizione) – Cap. 2
  - 1E – 3E – 5P – 7P – 11E – 13P – 17E – 19P – 21P – 23E – 25E – 27E – 29E – 31P – 33P – 35P – 37P – 39E – 41E – 43E – 45P – 51P – 53P – 55P – 59P – 61P

ESERCIZIO : CINEMATICA

FRENATA UNIFORME : IN UN MINUTO v VA DA 40 Km/h A 28 Km/h. TROVARE a E s.



- $V = V_0 + a t \quad \Rightarrow \quad a = \dfrac{V_2 - V_1}{t}$

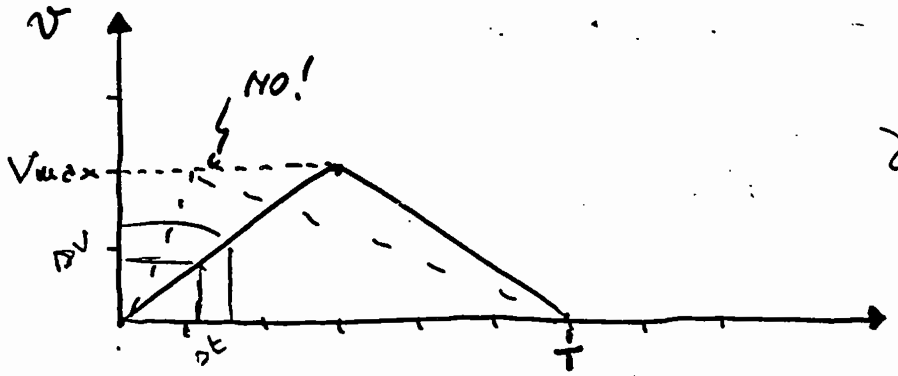
$$a = (28 - 40) \cdot \frac{10^3}{3.6 \cdot 10^3} \cdot \frac{1}{60} = -0.055 \ m/s^2$$

- $S = S_0 + V_0 t + \frac{1}{2} a t^2$

$$S = \frac{40}{3.6} \cdot 60 - \frac{1}{2} * 0.055 * 60^2 = 566.6 \ m$$

ESERCIZIO : CINEMATICA

ABBIAMO DUE STAZIONI DISTANTI $d = 1.5$ Km. UN TRENO PERCORRE METÀ CAMMINO CON MOTO UNIFORMEMENTE ACCELERATO E L'ALTRA METÀ CON MOTO UNIFORMEMENTE RITARDATO. SE $V_{MAX} = 50$ Km/h, TROVARE a E T.



$$a = \frac{\Delta V}{\Delta t} \qquad X = X_0 + V_0 t$$

$$\begin{cases} \frac{d}{2} = \frac{1}{2} a \left(\frac{T}{2}\right)^2 \\ V_{max} = a \frac{T}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{T}{2} = V_{max}/a \\ \frac{d}{\cancel{2}} = \frac{1}{\cancel{2}} a \left(\frac{V_{max}}{a}\right)^2 = \frac{1}{\cancel{2} a} v_{max}^2 \end{cases}$$

$$a = \frac{V_{max}^2}{d} = \left(\frac{50 \cdot 10^3}{3.6 \cdot 10^3}\right)^2 \cdot \frac{1}{1.5 \cdot 10^3} = 0.128 \ m/s^2$$

$$T = 2 \frac{V_{max}}{a} = 2 \cdot \frac{50}{3.6} \cdot \frac{1}{0.128} = 217 \ s = 3 \text{ min. } 37 \text{ sec.}$$

ESERCIZIO

UNA PALLA VIENE LANCIATA DA TERRA VERSO L'ALT

CON VELOCITA' INIZIALE DI 12.0 m/s

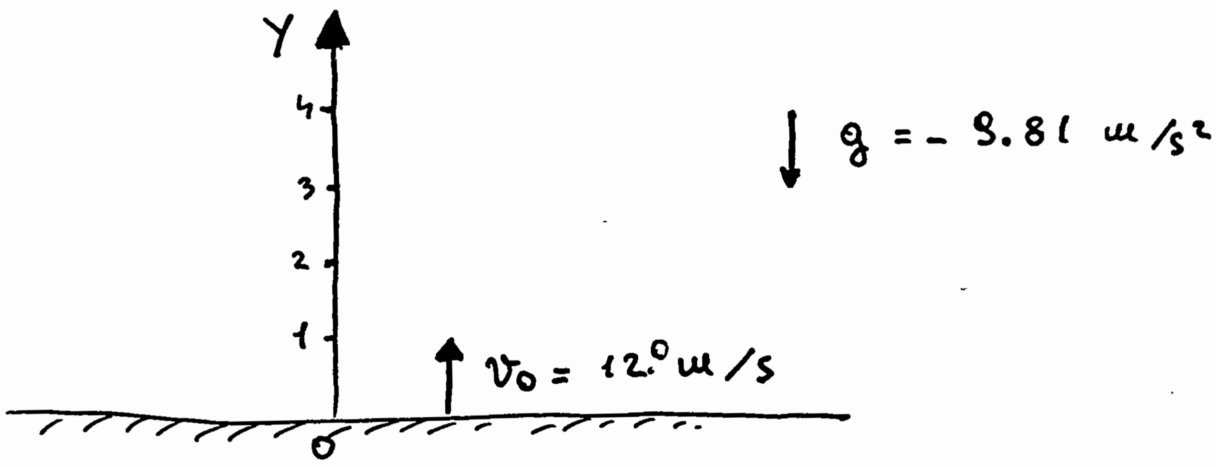
A) QUANTO TEMPO IMPIEGA A RAGGIUNGERE IL PUNTO PIU' ALTO DELLA TRAIETTORIA ?

B) QUANTO VALE LA DISTANZA DA TERRA DEL PUNTO PIU' ALT

C) DOPO QUANTO TEMPO RICADE A TERRA ?

D) CON CHE VELOCITA' LA PALLA TOCCA TERRA ?

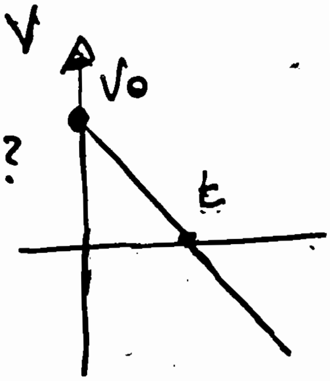
E) QUANTO VALE LO SPAZIO TOTALE PERCORSO DALLA PALLA ?



A) QUANTO TEMPO IMPIEGA A RAGGIUNGERE IL PUNTO PIU' ALTO DELLA TRAIETTORIA ?

- QUANTO VALE LA VELOCITA' NEL PUNTO PIU' ALTO ?

ZERO m/s



- QUANTO VALE L'ACCELERAZIONE ?

$$a \equiv g = -9.81 \ m/s^2$$

- CONOSCIAMO V_0, a, $v(t)$

DOBBIAMO TROVARE t

USIAMO L'EQUAZIONE

$$v = v_0 + a t$$

$$\Rightarrow \quad t = \frac{v - v_0}{a}$$

VALORI NUMERICI : $t = \dfrac{0 - 12.0}{-9.81} = 1.24 \ s$ $\quad [t > 0]$

B) A CHE ALTEZZA ARRIVA ?

- CONOSCIAMO V_0, Y_0, a, t

- $Y = Y_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$

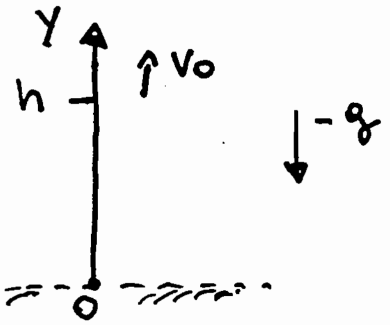
oppure : $\underset{0}{v^2} = \underset{12.0^2}{V_0^2} + 2 \underset{-9.81}{a} (\underset{?}{Y} - \underset{0}{Y_0})$

$$\Rightarrow Y = -\frac{V_0^2}{2a} = -\frac{12.0^2}{-2 \cdot 9.81} = 7.3 \ m$$

ESERCIZIO

UN UOMO LANCIA UN SASSO DAL TETTO DI UN PALAZZO VERSO L'ALTO CON UNA VELOCITA' DI 12.25 m/s. IL SASSO RAGGIUNGE IL SUOLO DOPO 4.25 s. CALCOLARE: a) QUANTO E' ALTO IL PALAZZO, b) QUAL'E' LA MASSIMA ALTEZZA RAGGIUNTA DAL SASSO, c) CON QUALE VELOCITA' IL SASSO RAGGIUNGE IL SUOLO

o o o o



h = altezza del palazzo

V_0 = velocita' iniziale

$-g$ = accelerazione di gravita'

a) $$Y = -\frac{1}{2}gt^2 + V_0 t + h$$

per $Y = 0$ ricaviamo t

$$h = \frac{1}{2}g t_0^2 - V_0 t_0 = \frac{1}{2} \cdot 9.8 \cdot 4.25^2 - 12.25 \cdot 4.25 = 36.4 \text{ m}$$

b) troviamo il tempo per il quale la velocita' si annulla

$$v = -gt + V_0$$

$$\Rightarrow t' = \frac{V_0}{g} = \frac{12.25}{9.8} = 1.25 \text{ s}$$

$$Y_{max} = -\frac{1}{2}gt'^2 + V_0 t' + h =$$

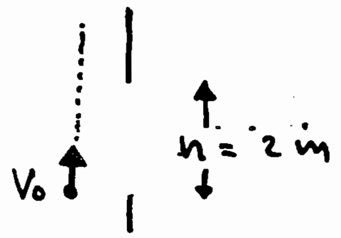
$$= -\frac{1}{2} 9.8 \cdot 1.25^2 + 12.25 \cdot 1.25 + 36.4 = 44.1 \text{ m}$$

c) troviamo la velocita' con la quale raggiunge il suolo

$$v = -g t_0 + V_0 = -9.8 \cdot 4.25 + 12.25 = -29.4 \ \frac{m}{s}$$

HALLIDAY 2-30P

UN GATTO APPISOLATO VIENE RISVEGLIATO DI COLPO AL
VISTA DI UN VASO DI FIORI CHE VELEGGIA PRIMA IN SU E P
IN GIÚ DAVANTI A UNA FINESTRA APERTA. IL VASO RIMANE
IN VISTA PER UN TOTALE DI 0.50 s, E L'ALTEZZA LIBERA DEL
FINESTRA E' DI 2.0 m. QUANTO PIU' IN ALTO DEL BORDO SUPER
DELLA FINESTRA E' ARRIVATO IL VASO?



$\downarrow \vec{g} = -9.8$ m/s²

- SUPPONENDO CHE IL VASO OLTREPASSI IL LIMITE SUPERIO DELLA FINESTRA, ESSO IMPIEGA 0,25 s PER PERCORRERE I 2m DELLA FINESTRA [0.50/2 = 0.25 s]
- INDICHIAMO CON V_0 LA VELOCITA' AL BORDO INFERIORE
  - $y = y_0 + V_0 t - \frac{1}{2} g t^2$; $V = V_0 - g t$
- DALLA PRIMA EQUAZIONE:

$$h = y - y_0 = V_0 t - \frac{1}{2} g t^2 \Rightarrow h + \frac{1}{2} g t^2 = V_0 t \Rightarrow V_0 = \frac{h}{t} + \frac{1}{2} g t$$

$$V_0 = \frac{2}{0.25} + \frac{1}{2} 9.8 * 0.25 = \underline{9.22} \text{ m/s}$$

- TROVIAMO ORA IL TEMPO CHE IMPIEGA PER RAGGIUNGERE IL PUNTO PIU' ALTO DELLA TRAIETTORIA DOVE LA VELOCITA' E' NULLA

$$0 = V = V_0 - g t^* \Rightarrow t^* = \frac{V_0}{g} = \frac{9.22}{9.8} = 0.94 \text{ s}$$

- IL PUNTO PIU' ALTO SI TROVA IN:

$$y = y_0 + V_0 t^* - \frac{1}{2} g t^{*2} = 0 + 9.22 * 0.94 - \frac{1}{2} * 9.8 * 0.94^2 = 4.34 \text{ m}$$

ESSO SI TROVA A $4.34 - 2 = 2.34$ m SOPRA IL BORDO SUPERIO DELLA FINESTRA

SERWAY 2-39 [CINEMATICA]

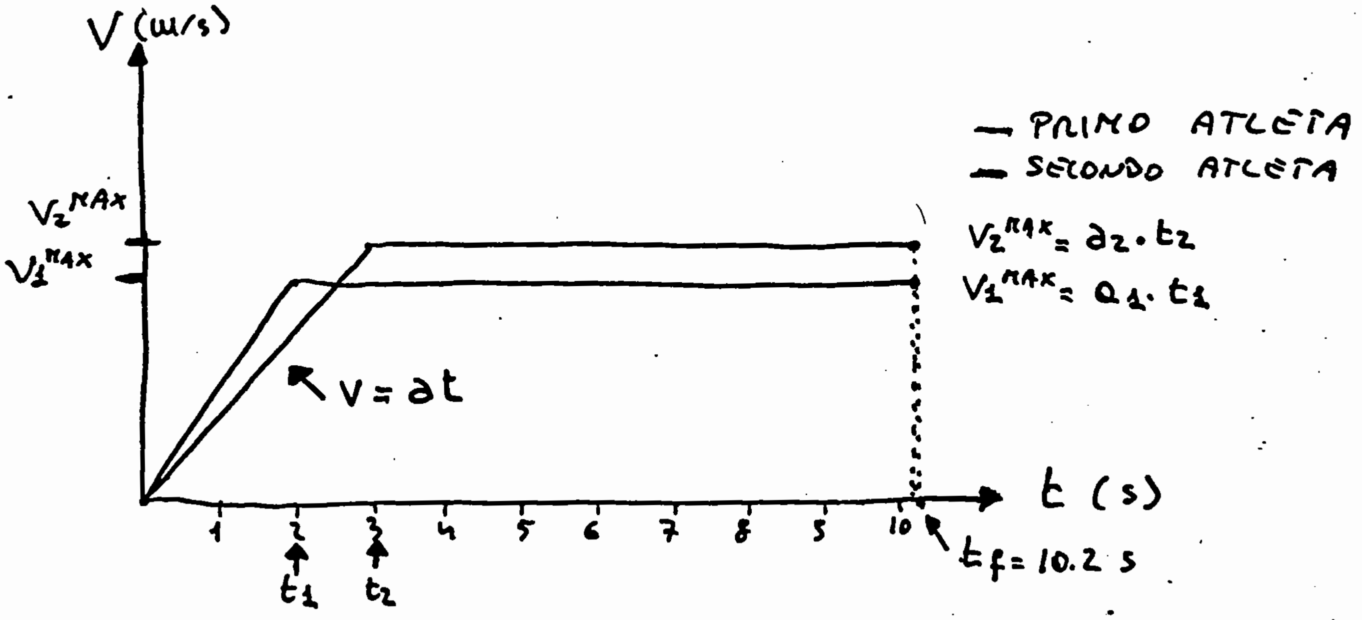
IN UNA GARA SUI 100 m, DUE ATLETI TAGLIANO IL TRAGUARDO ALLO STESSO ISTANTE CON UN TEMPO DI 10.2 s. CON UN'ACCELERAZIONE COSTANTE, IL PRIMO CONCORRENTE IMPIEGA 2.00 SECONDI, MENTRE IL SECONDO NE IMPIEGA 3.00, PER RAGGIUNGERE LA MASSIMA VELOCITA', MANTENENDOLA POI COSTANTE PER IL RESTO DELLA GARA. DETERMINARE PER CIASCUN CONCORRENTE:

a) L'ACCELERAZIONE; b) LA VELOCITA' MASSIMA RAGGIUN

c) QUALE CONCORRENTE SI TROVA IN TESTA DOPO 6.00 s ED IL SUO VANTAGGIO.

o o o

- SI TRATTA DI UN MOTO UNIFORMEMENTE ACCELERATO PER I PRIMI 2.00 (3.00) SECONDI SEGUITO DA UN MOTO RETTILINEO UNIFORME



N.B. L'AREA RACCHIUSA DALLE DUE CURVE CON L'ASSE DEI TEMPI DEVE ESSERE LA STESSA PERCHE' LO SPOSTAMENTO E' LO STESSO (100 m)

SERWAY 2-39 [...CONTINUA...]

- PER IL PRIMO ATLETA ABBIAMO:

$$L = \frac{1}{2} a_1 t_1^2 + a_1 t_1 \cdot (t_f - t_1)$$

moto uniformemente accelerato

moto rettilineo uniforme

a_1 = accelerazione

$a_1 \cdot t_1$ = velocità massima

L'UNICA INCOGNITA E' L'ACCELERAZIONE a_1

$$L = a_1 \left[\frac{1}{2} t_1^2 + t_1 \cdot t_f - t_1^2 \right] = a_1 \left[t_1 t_f - \frac{1}{2} t_1^2 \right]$$

$$\Rightarrow a_1 = \frac{L}{t_1 t_f - \frac{1}{2} t_1^2} = \frac{100}{2 \cdot 10.2 - \frac{1}{2} \cdot 2^2} = \underline{5.43} \ m/s^2$$

- PER IL SECONDO ATLETA POSSIAMO SCRIVERE:

$$L = \frac{1}{2} a_2 t_2^2 + a_2 t_2 \cdot (t_f - t_2)$$

$$\Rightarrow a_2 = \frac{L}{t_2 t_f - \frac{1}{2} t_2^2} = \frac{100}{3 \cdot 10.2 - \frac{1}{2} 3^2} = \underline{3.83} \ m/s^2$$

- TROVIAMO LA VELOCITA' MASSIMA DEI DUE ATLETI:

- $V_1^{MAX} = a_1 \cdot t_1 = 5.43 \cdot 2.0 = 10.9 \ m/s$
- $V_2^{MAX} = a_2 \cdot t_2 = 3.83 \cdot 3.0 = 11.5 \ m/s$

- TROVIAMO ORA LO SPOSTAMENTO DEI DUE ATLETI DOPO $t^* = 6$ SECONDI

$$S_1 = \frac{1}{2} a_1 \cdot t_1^2 + a_1 \cdot t_1 \cdot (t^* - t_1) =$$

$$= \frac{1}{2} * 5.43 * 2.0^2 + 5.43 * 2.0 * (6.0 - 2.0) = \underline{54.3} \text{ m}$$

$$S_2 = \frac{1}{2} a_2 \cdot t_2^2 + a_2 \cdot t_2 \cdot (t^* - t_2) =$$

$$= \frac{1}{2} * 3.83 * 3.0^2 + 3.83 * 3.0 * (6.0 - 3.0) = 51.7 \text{ m}$$

- QUINDI DOPO 6 SECONDI E' IN TESTA IL PRIMO ATLETA CON UN VANTAGGIO DI $(54.3 - 51.7) = 2.60$ m

SERWAY - 2-27 (CINEMATICA)

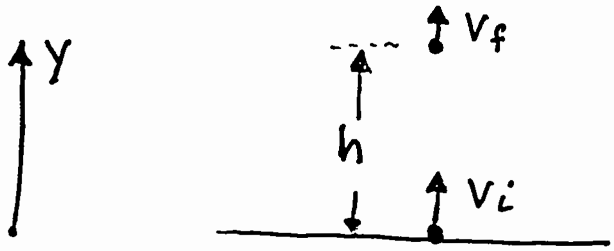
UNA STUDENTESSA LANCIA UN MAZZO DI CHIAVI AD UN AMICA, AFFACCIATA AD UNA FINESTRA, SITUATA AD UN'ALTEZZ DI 4.00 m. LE CHIAVI VENGONO AFFERRATE DOPO 1.50 s. DETERMINARE LA VELOCITA' DEL MAZZO DI CHIAVI

a) AL MOMENTO DEL LANCIO

b) ALL'ISTANTE PRIMA DI ESSERE AFFERRATO DALL'AMI

o o o o

SI TRATTA DI UN MOTO UNIDIMENSIONALE LUNGO L'ASS VERTICALE ⇒ IL CORPO E' SOGGETTO ALL'ACCELERAZIONE g



$\downarrow \vec{g} = -9.8\ m/s^2$

• $v = v_0 + at \Rightarrow v_f = v_i - gt$

• $y = y_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2 \Rightarrow h = 0 + v_i t - \frac{1}{2}gt^2$

⇒ POSSIAMO RICAVARE V_i

$$V_i = \frac{h}{t} + \frac{1}{2}gt = \frac{4.0}{1.5} + \frac{1}{2} \cdot 9.8 \cdot 1.5 = 10.0\ m/s$$

• RICAVIAMO ORA V_f

$$V_f = V_i - gt = 10.0 - 9.8 \cdot 1.5 = -4.70\ m/s$$

N.B. V_f E' NEGATIVA, QUINDI LA VELOCITA' E' DIRETTA VERSO IL BASSO, CIOE' LE CHIAVI STANNO RICADENDO

- TROVIAMO QUAL'È L'ALTEZZA MASSIMA RAGGIUNTA DAL MAZZO DI CHIAVI

- NEL PUNTO PIÙ ALTO LA VELOCITÀ È NULLA

$$V_f = V_i - g t \Rightarrow 0 = V_i - g t^*$$

$$t^* = \frac{V_i}{g} = \frac{10}{9.8} = 1.02 \ s$$

IL PUNTO PIÙ ALTO VIENE RAGGIUNTO DOPO 1.02 S

$$h_{max} = 0 + V_i t^* - \frac{1}{2} g t^{*2} = 10 \cdot 1.02 - \frac{1}{2} \cdot 9.8 \cdot 1.02^2 = \underline{5.10 \ m}$$

- CALCOLIAMO DOPO QUANTO TEMPO IL MAZZO DI CHIAVI RAGGIUNGE LA RAGAZZA DURANTE LA SALITA

$$h = 0 + V_i \cdot t' - \frac{1}{2} g t'^2 \Rightarrow \frac{1}{2} g t'^2 - V_i t' + h = 0$$

PER TROVARE t' DOBBIAMO RISOLVERE UN'EQUAZIONE ALGEBRICA DI SECONDO GRADO : $ax^2 + bx + c = 0$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \Rightarrow \left[a = \frac{g}{2} \ ; \ b = -V_i \ ; \ c = h \right]$$

$$t' = \frac{V_i \pm \sqrt{V_i^2 - 4 \cdot \frac{g}{2} \cdot h}}{2 \cdot \frac{g}{2}} = \frac{10 \pm \sqrt{10^2 - 2 \cdot 9.8 \cdot 4}}{9.8} = \frac{10 \pm 4.6}{9.8}$$

$\Rightarrow$ ABBIAMO DUE SOLUZIONI

$$t_1' = \frac{10 - 4.6}{9.8} = \underline{0.55 \ s} \quad \text{[durante la salita]}$$

$$t_2' = \frac{10 + 4.6}{9.8} = 1.49 \simeq \underline{1.50 \ s} \quad \text{[durante la ricaduta]}$$

VETTORI

- ALCUNE GRANDEZZE FISICHE SONO IDENTIFICATE IN MANIERA UNIVOCA DANDO SEMPLICEMENTE UN NUMERO (CON LA CORRISPONDENTE UNITA' DI MISURA): ESEMPIO: MASSA, TEMPERATURA, PRESSIONE, VOLUME, ... TALI GRANDEZZE VENGONO CHIAMATE SCALARI

- VI SONO ALTRE GRANDEZZE FISICHE CHE NON SONO UNIVOCAMENTE DETERMINATE DANDO UN NUMERO. UN ESEMPIO E' LO SPOSTAMENTO.

  IO DEVO DIRE:

  - DI QUANTO MI SONO SPOSTATO (MODULO)
  - LUNGO QUALE DIREZIONE (DIREZIONE
  - IN CHE VERSO MI SONO MOSSO (VERSO)

- TUTTE LE GRANDEZZE CHE HANNO BISOGNO DEL MODULO, DIREZIONE E VERSO PER ESSERE COMPLETAMENTE SPECIFICATE SI CHIAMANO VETTORI ESEMPIO: SPOSTAMENTO, VELOCITA', ACCELERAZIONE, FORZA, CAMPO ELETTRICO, ETC...

LA NOTAZIONE E': $\vec{V}$

IL MODULO SI INDICA: $|\vec{V}| \equiv V$

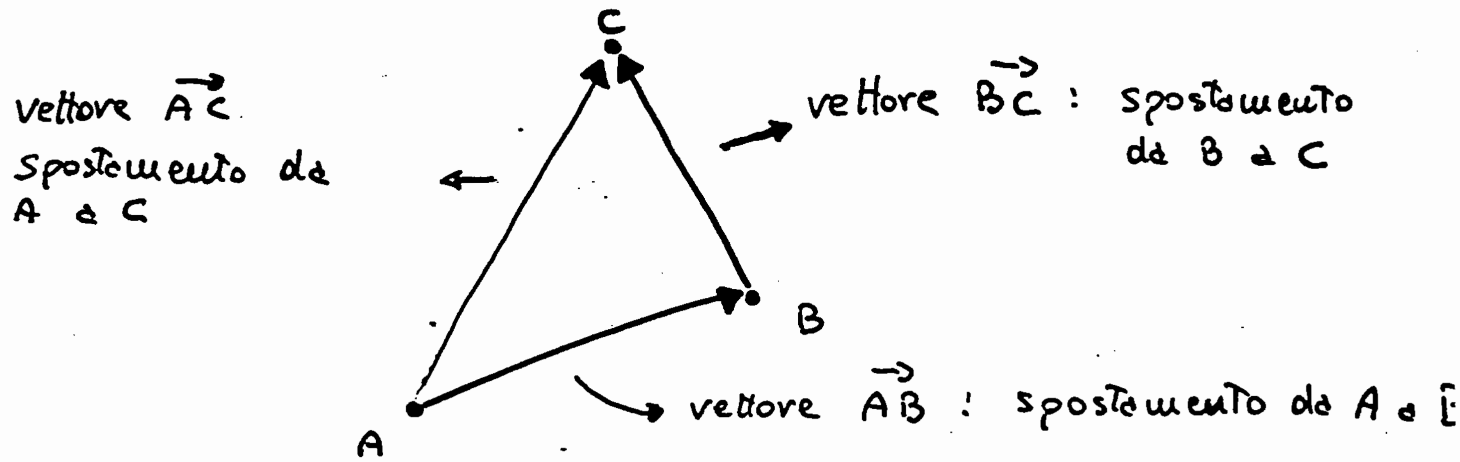
DIREZIONE E VERSO SI SPECIFICANO DANDO IL VETTORE DI MODULO UNITARIO (VERSORE): $\hat{V}$

SOMMA DI VETTORI

- OCCORRE DEFINIRE LA SOMMA DI DUE VETTORI.

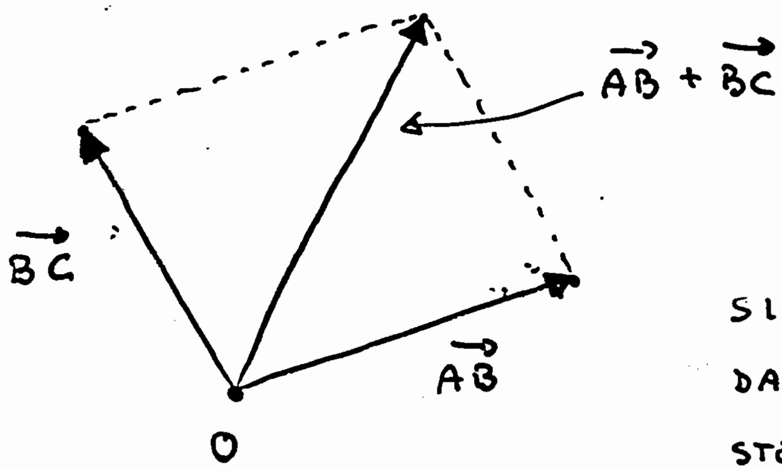
METODO GRAFICO

UN VETTORE SI RAPPRESENTA GRAFICAMENTE COME UNA FRECCIA



$$\vec{AC} = \vec{AB} + \vec{BC}$$

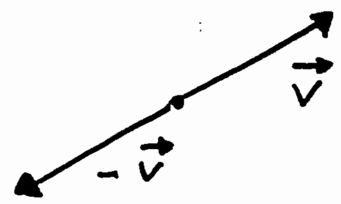
- REGOLA DEL PARALLELOGRAMMA



SI IMMAGINA CHE I VETTORI DA SOMMARE ABBIANO LA STESSA ORIGINE

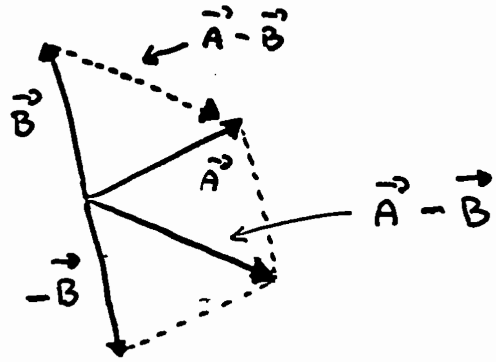
DIFFERENZA DI VETTORI

- VETTORE OPPOSTO $-\vec{V}$



- LA SOTTRAZIONE DI UN VETTORE SI FA FACENDO LA SOMMA CON IL VETTORE OPPOSTO

$$\vec{A} - \vec{B} = \vec{A} + (-\vec{B})$$



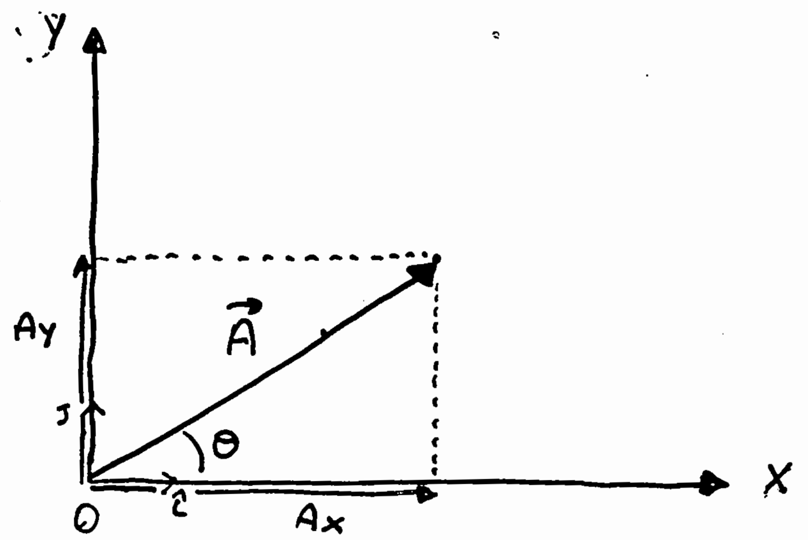
- CON LO STESSO PROCEDIMENTO SI POSSONO SOMMARE N VETTORI

PROPRIETA':

- $\vec{A} + \vec{B} = \vec{B} + \vec{A}$ proprietà commutativa
- $(\vec{A} + \vec{B}) + \vec{C} = \vec{A} + (\vec{B} + \vec{C})$ proprietà associativa

SISTEMA DI COORDINATE

- NEL PIANO SI SCELGONO DUE DIREZIONI ORTOGONALI (NELLO SPAZIO TRE DIREZIONI)



$\vec{A}$

$\vec{B} = c \cdot \vec{A}$

$|\vec{B}| = c \cdot |\vec{A}|$

- LE DIREZIONI VENGONO IDENTIFICATE DAI RISPETTIVI VERSORI $\hat{i}$; $\hat{j}$; $\hat{k}$

- PROIETTIAMO IL VETTORE $\vec{A}$ SUGLI ASSI X, Y E Z (IMMAGINIAMO CHE LA PROIEZIONE SU Z SIA NULLA)

$$A_x = |\vec{A}| \cdot \cos\theta$$
$$A_y = |\vec{A}| \cdot \operatorname{sen}\theta$$

SONO DEI NUMERI

- A_x e A_y POSSONO ESSERE PENSATI COME DUE VETTORI, UNO NELLA STESSA DIREZIONE DI $\hat{i}$ E L'ALTRO DI $\hat{j}$

$$\vec{A}_x = A_x \cdot \hat{i} \quad ; \quad \vec{A}_y = A_y \cdot \hat{j}$$

- IL VETTORE ORIGINARIO $\vec{A}$ PUÒ ESSERE PENSATO COME SOMMA DEI VETTORI $\vec{A}_x$ E $\vec{A}_y$

$$\vec{A} = \vec{A}_x + \vec{A}_y = A_x \hat{i} + A_y \hat{j}$$

PERCHE' USARE UN SISTEMA DI COORDINATE?

PERCHE' NUMERICAMENTE SI POSSONO SOMMARE, SOTTRARRE, MOLTIPLICARE SOLTANTO DEI NUMERI E NON DELLE QUANTITA' ASTRATTE COME DEI VETTORI.

USANDO UN SISTEMA DI COORDINATE SI RIDUCE UN VETTORE ALLA SOMMA VETTORIALE DI TRE COMPONENTI.

SULLE SINGOLE COMPONENTI SI PUO' USARE L'ALGEBRA ORDINARIA

EX: $\vec{A} + \vec{B}$; $\vec{A} = A_x \hat{i} + A_y \hat{j}$; $\vec{B} = B_x \hat{i} + B_y \hat{j}$

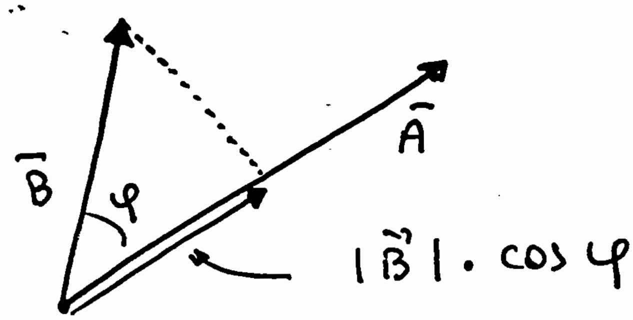
$$\vec{A} + \vec{B} = A_x \hat{i} + A_y \hat{j} + B_x \hat{i} + B_y \hat{j} =$$

$$= (A_x + B_x)\hat{i} + (\cancel{A_y} + B_y)\hat{j}$$

HO TROVATO LE COMPONENTI DEL VETTORE $\vec{A} + \vec{B}$ SENZA RICORRERE AL METODO GRAFICO $|\vec{A} + \vec{B}| = \sqrt{(A_x + B_x)^2 + (B_y + A_y)^2}$

PRODOTTO SCALARE

$$\vec{A} \cdot \vec{B}$$



- SI PROIETTA $\vec{B}$ SU $\vec{A}$
  (OPPURE $\vec{A}$ SU $\vec{B}$, È EQUIVALENTE)

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = |\vec{A}| \cdot |\vec{B}| \cdot \cos\varphi$$

- IL RISULTATO DEL PRODOTTO SCALARE È UNO SCALARE
- DUE VETTORI SONO ORTOGONALI QUANDO IL LORO PRODOTTO SCALARE È ZERO
- TRAMITE LE COMPONENTI

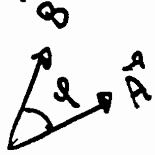
$$\vec{A} = A_x \hat{i} + A_y \hat{j} + A_z \hat{k} \quad ; \quad \vec{B} = B_x \hat{i} + B_y \hat{j} + B_z \hat{k}$$

$$\hat{i} \cdot \hat{i} = \hat{j} \cdot \hat{j} = \hat{k} \cdot \hat{k} = 1 \quad ; \quad \hat{i} \cdot \hat{j} = \hat{i} \cdot \hat{k} = \hat{j} \cdot \hat{k} = 0$$

$$\Rightarrow \underline{\vec{A} \cdot \vec{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z \cdot B_z}$$

PRODOTTO VETTORIALE

$$\vec{A} \times \vec{B}$$



- IL RISULTATO E' UN VETTORE DI MODULO

$$|\vec{A} \times \vec{B}| = |\vec{A}| \cdot |\vec{B}| \operatorname{sen} \varphi$$

- LA DIREZIONE E' ORTOGONALE AL PIANO INDIVIDUATO DAI DUE VETTORI

- PER TROVARE IL VERSO SI USA LA MANO SINISTRA

  - $\vec{A}$ E' DIRETTO COME IL MEDIO
  - $\vec{B}$ E' DIRETTO COME L' INDICE

  LA DIREZIONE DEL POLLICE DA IL VERSO DEL PRODOTTO VETTORIALE

$$\vec{A} \times \vec{B} = - \vec{B} \times \vec{A}$$

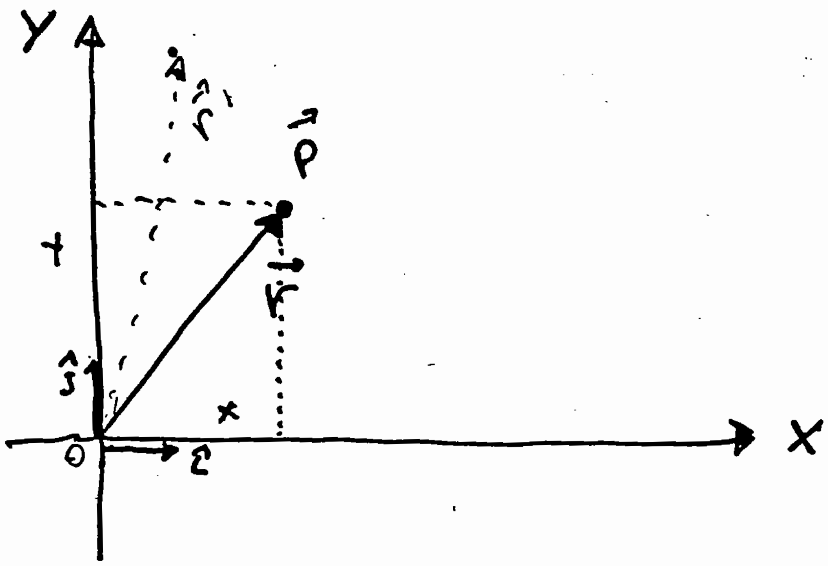
- SI PUO' USARE LA MANO DESTRA (COME SUL LIBRO) SEGUENDO UN ALTRO CRITERIO

ESERCIZI CONSIGLIATI

VETTORI

- Serway (3° Edizione) – Cap. 1
  - 31 – 35 – 37 – 39 – 41 – 43 – 45 – 47 – 49 – 51 - 53
- Halliday (5° Edizione) – Cap. 3
  - 3E – 5E – 11E – 13E – 15P – 23E – 25P

SPOSTAMENTO IN DUE O TRE DIMENSIONI



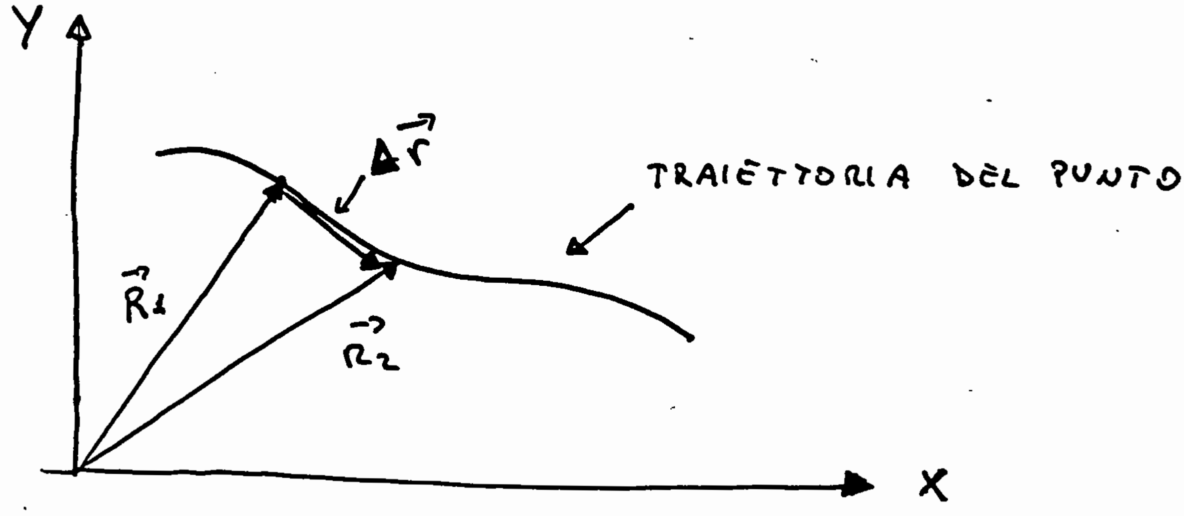
- SCEGLIAMO UN SISTEMA DI RIFERIMENTO ORTOGONALE, CIOE' CON TRE ASSI FORMANTI UN ANGOLO DI 90° TRA CIASCUNO DI ESSI

- LA POSIZIONE DI UN PUNTO NELLO SPAZIO E' INDIVIDUATA DANDO IL VETTORE POSIZIONE $\vec{r}$

$$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$$

- I COEFFICIENTI x, y, z RAPPRESENTANO LE POSIZIONI DEL PUNTO LUNGO I TRE ASSI COORDINATI

ANCORA SULLO SPOSTAMENTO



- QUANDO IL CORPO SI MUOVE, DISEGNANDO NELLO SPAZIO UNA TRAIETTORIA, IL VETTORE POSIZIONE $\vec{r}$ CAMBIA ANCH'ESSO.

- LO SPOSTAMENTO DEL CORPO DA UN PUNTO 1 (OCCUPATO AL TEMPO t) AD UN PUNTO 2 (OCCUPATO AL TEMPO $t+\Delta t$) E' DATO DA:

$$\Delta \vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 =$$

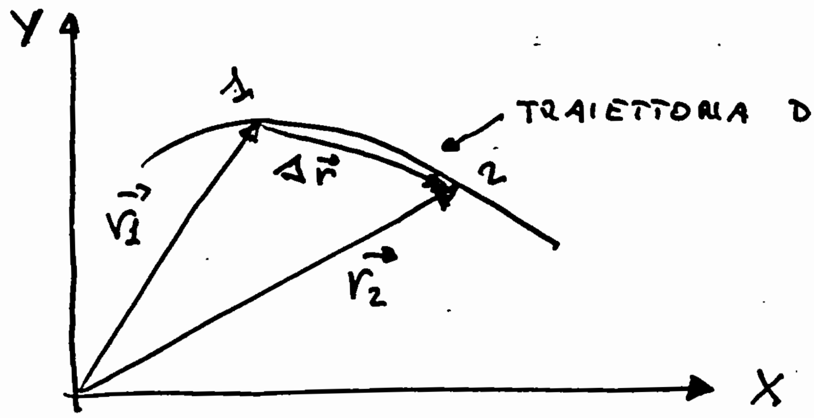
$$= (x_2 \hat{i} + y_2 \hat{j} + z_2 \hat{k}) - (x_1 \hat{i} + y_1 \hat{j} + z_1 \hat{k})$$

$$\Delta \vec{r} = (x_2 - x_1)\hat{i} + (y_2 - y_1)\hat{j} + (z_2 - z_1)\hat{k} =$$

$$= \Delta x \hat{i} + \Delta y \hat{j} + \Delta z \hat{k}$$

$$|\Delta \vec{r}| = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}$$

VELOCITA' IN TRE DIMENSIONI



- $\Delta \vec{r} = \vec{r_2} - \vec{r_1}$

- $\vec{V}_{MEDIA} = \dfrac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$ → LA VELOCITA' MEDIA E' UN VETTO PARALLELO A $\Delta \vec{r}$

- $\vec{V}_{MEDIA} = \dfrac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \dfrac{\Delta X}{\Delta t}\hat{i} + \dfrac{\Delta Y}{\Delta t}\hat{j} + \dfrac{\Delta Z}{\Delta t}\hat{k}$

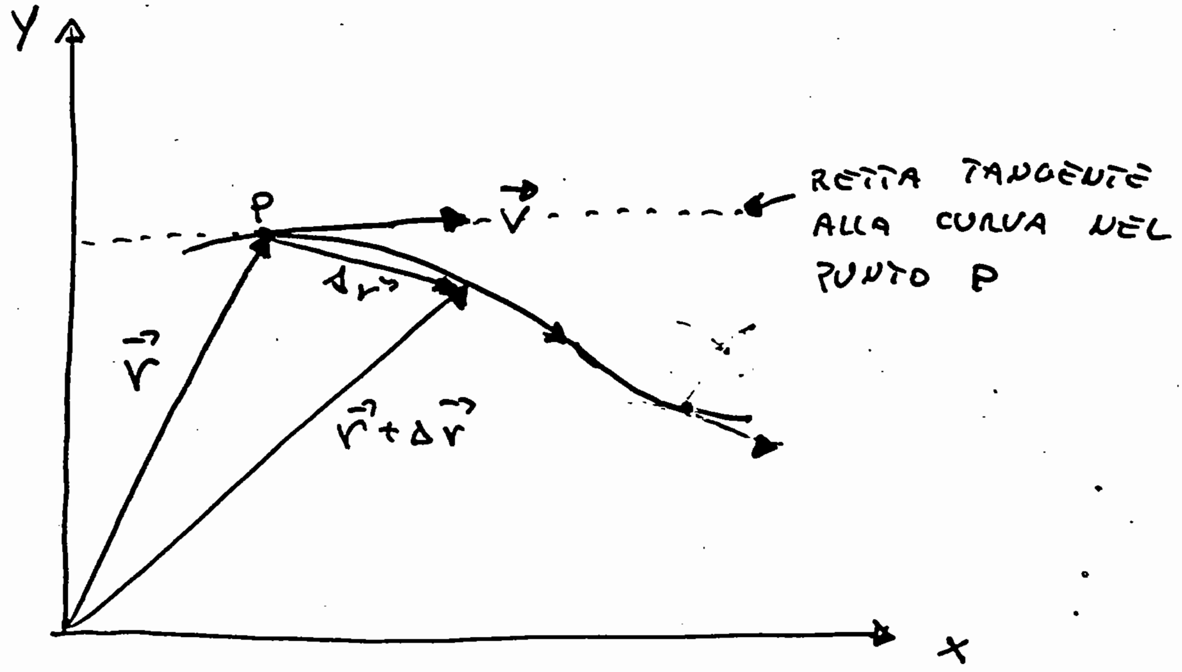
- PER TROVARE LA VELOCITA' ISTANTANEA SI FA:

$$\vec{V} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

- $\vec{V} = \dfrac{d\vec{r}}{dt} = \dfrac{d\,(x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k})}{dt} = \dfrac{dx}{dt}\hat{i} + \dfrac{dy}{dt}\hat{j} + \dfrac{dz}{dt}\hat{k}$.

$$\underline{\vec{V} = V_x\hat{i} + V_y\hat{j} + V_z\hat{k}}$$

VELOCITÀ ISTANTANEA

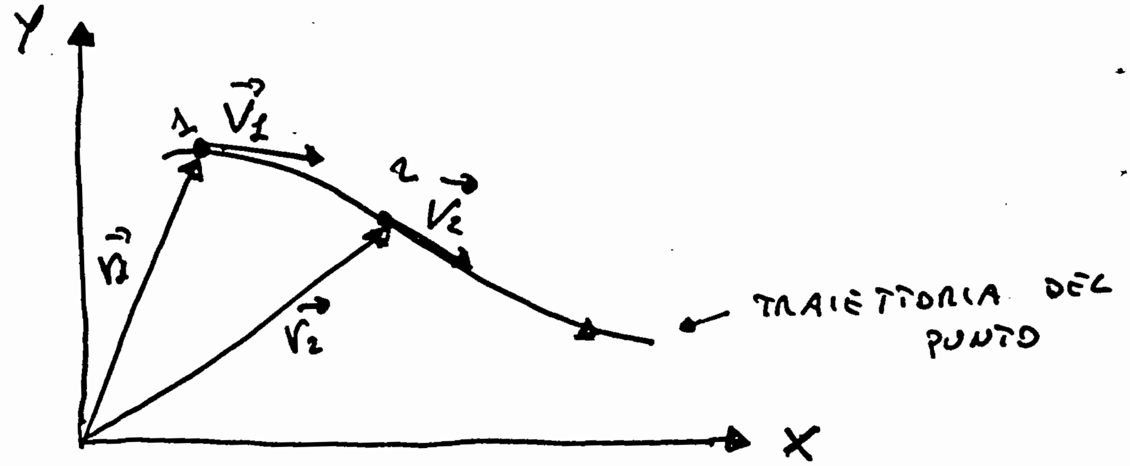


- QUANDO SI FA TENDERE Δt A ZERO $\Delta\vec{r}$ TENDE AD ASSUMERE LA DIREZIONE DELLA TANGENTE ALLA CURVA NEL PUNTO P

- LA VELOCITÀ ISTANTANEA DI UNA PARTICELLA È SEMPRE PARALLELA ALLA TANGENTE ALLA CURVA CHE RAPPRESENTA IL PERCORSO DELLA PARTICELLA.

N.B. NON CONFONDETE LA TRAIETTORIA DI UNA PARTICELLA CON LA SUA LEGGE ORARIA $x(t)$

ACCELERAZIONE MEDIA ED ISTANTANEA

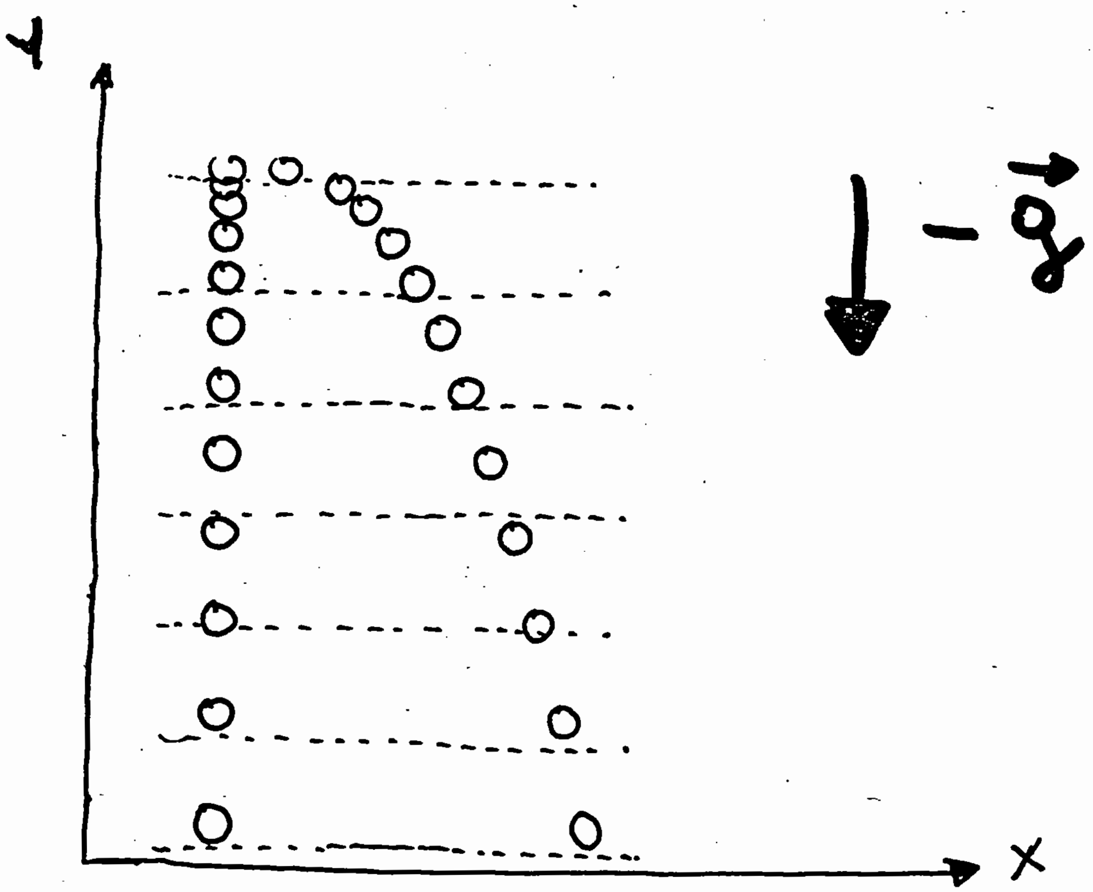


$$\vec{a}_{MEDIA} = \frac{\vec{V}_2 - \vec{V}_1}{\Delta t} = \frac{\Delta \vec{V}}{\Delta t} = \frac{\Delta V_x}{\Delta t}\hat{i} + \frac{\Delta V_y}{\Delta t}\hat{j} + \frac{\Delta V_z}{\Delta t}\hat{k}$$

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{V}}{\Delta t} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{dV_x}{dt}\hat{i} + \frac{dV_y}{dt}\hat{j} + \frac{dV_z}{dt}\hat{k}$$

- L'ACCELERAZIONE PUÒ CAMBIARE SIA IL MODULO DELLA VELOCITÀ E SIA LA DIREZIONE DELLA VELOCITÀ
- L'ACCELERAZIONE CHE CAMBIA IL MODULO È DIRETTA COME LA TANGENTE ALLA CURVA E SI CHIAMA ACCELERAZIONE TANGENZIALE
- L'ACCELERAZIONE CHE CAMBIA LA DIREZIONE DELLA VELOCITÀ È DIRETTA ORTOGONALMENTE ALLA TANGENTE E SI CHIAMA ACCELERAZIONE RADIALE.

MOTO DEI PROIETTILI



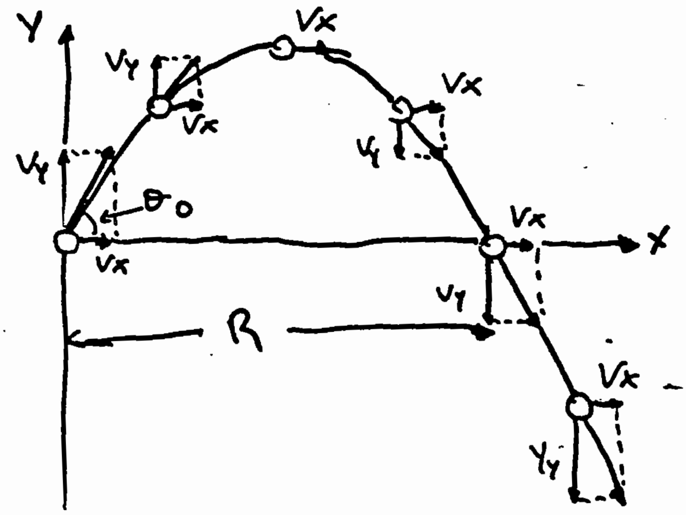
UNA PALLA È LASCIATA CADERE DA FERMA NELLO STESSO ISTANTE IN CUI UN'ALTRA È SPARATA <u>ORIZZONTALMENTE</u> VERSO DESTRA.

I LORO MOTI VERTICALI SONO IDENTICI

- LE DUE PALLE RAGGIUNGONO TERRA NELLO STESSO ISTANTE.

- IL MOTO LUNGO L'ASSE VERTICALE È INDIPENDENTE DAL MOTO LUNGO L'ASSE ORIZZONTALE.

MOTO DEL PROIETTILE



- IL PROIETTILE È LANCIATO CON VELOCITÀ $\vec{v}_0$

$$\vec{V}_0 = V_{0x}\,\hat{i} + V_{0y}\,\hat{j}$$

$$V_{0x} = |\vec{V}_0| \cos\theta_0 \quad ; \quad V_{0y} = |\vec{V}_0| \sin\theta_0$$

- LA COMPONENTE ORIZZONTALE DELLA VELOCITÀ SI CONSERVA

- LUNGO LA DIREZIONE VERTICALE IL PROIETTILE DESCRIVE UN MOTO UNIFORMEMENTE ACCELERATO CON ACCELERAZIONE g DIRETTA VERSO IL SUOLO

- LA GITTATA R È LA DISTANZA ORIZZONTALE CHE IL PROIETTILE HA COPERTO QUANDO RIPASSA ALLA QUOTA DI LANCIO

ANALISI DEL MOTO

- MOTO ORIZZONTALE

$$X - X_0 = V_{0x} \cdot t = V_0 \cos\theta_0 \cdot t$$

- MOTO VERTICALE

$$Y - Y_0 = V_{0y} \cdot t - \frac{1}{2} g t^2 =$$

$$= V_0 \sin\theta_0 \cdot t - \frac{1}{2} g t^2$$

- GITTATA ORIZZONTALE

TROVIAMO IL VALORE DI t PER IL QUALE SI HA $Y - Y_0 = 0$

$$0 = V_0 \sin\theta_0 t - \frac{1}{2} g t^2 = t\left(V_0 \sin\theta_0 - \frac{1}{2} g t\right)$$

$$\Rightarrow t = 0 \quad \text{OPPURE} \quad t = 2 V_0 \sin\theta_0 / g$$

SOSTITUIAMO t NEL MOTO ORIZZONTALE

$$X - X_0 = R = V_0 \cos\theta_0 \cdot 2 V_0 \sin\theta_0 / g =$$

$$= 2 \frac{V_0^2}{g} \sin\theta_0 \cos\theta_0 = \frac{V_0^2}{g} \sin(2\theta_0)$$

- IL VALORE MASSIMO DI R SI HA PER $\sin(2\theta_0) = 1$
OVVERO $\theta_0 = 45°$

- TRAIETTORIA

$$Y = (\tan\theta_0) X - \frac{g X^2}{2 (V_0 \cos\theta_0)^2} \quad [\text{parabola}]$$

ESERCIZI CONSIGLIATI

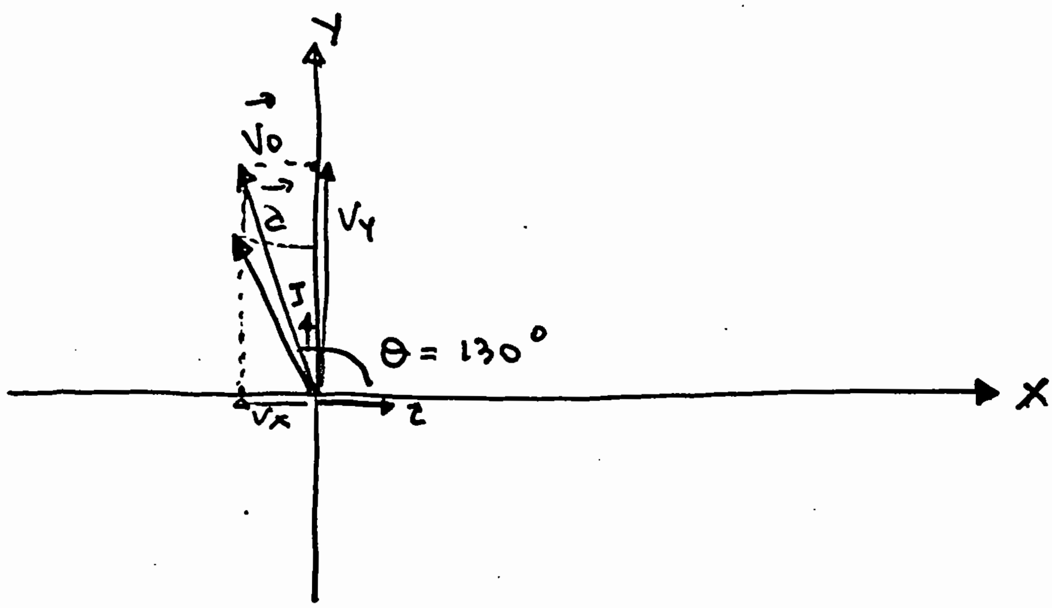
Moto in due dimensioni

- Serway (3° Edizione) – Cap. 3
  - 1 – 5 – 7 – 9 – 11 – 13 – 15 – 17 – 19 – 45 – 47 – 49 – 51 – 55
- Halliday (5° Edizione) – Cap. 4
  - 1E – 5E – 9E – 15E – 17E – 19E – 21E – 23P – 29P – 31P – 33P

PROBLEMA 4-5

UNA PARTICELLA DOTATA DI VELOCITA' INIZIALE, A $T=0$, $V_0 = -2.0\hat{i} + 4.0\hat{j}$ (IN m/s) SUBISCE UN'ACCELERAZIONE COSTANTE $\vec{a}$ DI INTENSITA' $a=3.0$ m/s², FORMANTE UN ANGOLO $\theta = 130°$ RISPETTO ALLA DIREZIONE POSITIVA DELL'ASSE X. QUAL E' LA VELOCITA' DELLA PARTICELLA, IN AMPIEZZA E DIREZIONE (RISPETTO ALL'ASSE X POSITIVO), PER $t = 2.0$ s, FACENDO USO DEI VETTORI UNITARI?

o———o———o



- PROIETTIAMO L'ACCELERAZIONE SULL'ASSE X E SULL'ASSE Y

  - $a_x = |\vec{a}| \cos\theta = 3.0 \cdot \cos 130° = -1.93$ m/s²
  - $a_y = |\vec{a}| \sin\theta = 3.0 \sin 130° = +2.30$ m/s

PROBLEMA 4-5

- TROVIAMO SEPARATAMENTE LE COMPONENTI DELLA VELOCITA' LUNGO GLI ASSI X E Y

$$V_x = V_{0x} + a_x \cdot t$$

$$V_y = V_{0y} + a_y \cdot t$$

- PER $t = 2.0$ s SI HA:

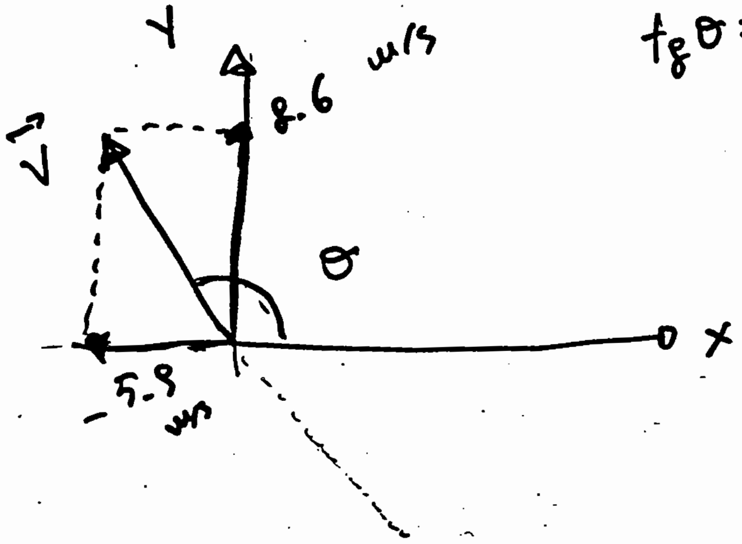
$$V_x = -2.0 - 1.93 \cdot 2.0 = -5.9 \text{ m/s}$$

$$V_y = 4.0 + 2.30 \cdot 2.0 = 8.6 \text{ m/s}$$

$$\vec{V} = -5.9\,\hat{i} + 8.6\,\hat{j} \text{ m/s}$$

- $|\vec{V}| = \sqrt{V_x^2 + V_y^2} = \sqrt{(-5.9)^2 + 8.6^2} = 10 \text{ m/s}$

- $\theta = \text{arc tag} \dfrac{V_y}{V_x} = \text{arc tag} \dfrac{8.6}{-5.9} = 124°$



$$tg\,\theta = \frac{V_y}{V_x}$$

PROBLEMA

UN MOTOCICLISTA VIAGGIA VERSO SUD PER 3 MINUTI CON UNA VELOCITA' DI 20 m/s, SUCCESSIVAMENTE SI SPOSTA PER 2 MINUTI VERSO OVEST CON UNA VELOCITA' DI 25 m/s ED INFINE VIAGGIA A 30 m/s, PER UN MINUTO, VERSO NORD-OVEST. ALLA FINE DEL VIAGGIO, DELLA DURATA COMPLESSIVA DI 6 MINUTI, CALCOLARE

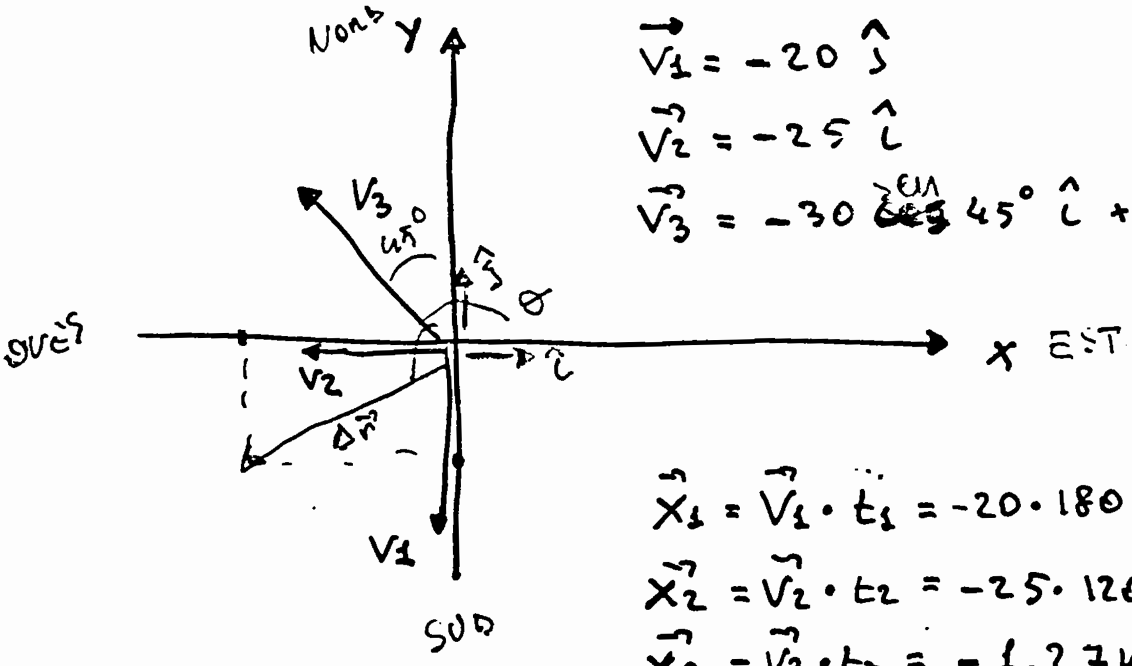
a) IL VETTORE SPOSTAMENTO

b) LA VELOCITA' SCALARE

c) IL VETTORE VELOCITA' MEDIA

$\cos(90+\alpha) = -\sin\alpha$

$\sin(90+\alpha) = \cos\alpha$



$\vec{V_1} = -20\,\hat{j}$

$\vec{V_2} = -25\,\hat{i}$

$\vec{V_3} = -30 \sin 45°\,\hat{i} + 30 \cos 45°\,\hat{j}$

$\vec{X_1} = \vec{V_1} \cdot t_1 = -20 \cdot 180 = -3.6\ \text{Km}\,\hat{j}$

$\vec{X_2} = \vec{V_2} \cdot t_2 = -25 \cdot 120 = -3.0\ \text{Km}\,\hat{i}$

$\vec{X_3} = \vec{V_3} \cdot t_3 = -1.27\,\text{Km}\,\hat{i} + 1.27\,\text{Km}\,\hat{j}$

- $\Delta\vec{r} = \vec{X_1} + \vec{X_2} + \vec{X_3} = -(3.0 + 1.27)\text{Km}\,\hat{i} + (1.27 - 3.6)\text{Km}\,\hat{j}$

$= -4.27\ \text{Km}\,\hat{i} - 2.33\ \text{Km}\,\hat{j}$

$|\Delta\vec{r}| = 4.87\ \text{Km}$; $\theta = 208°$ $\qquad \theta = \arctan \frac{V_y}{V_x}$

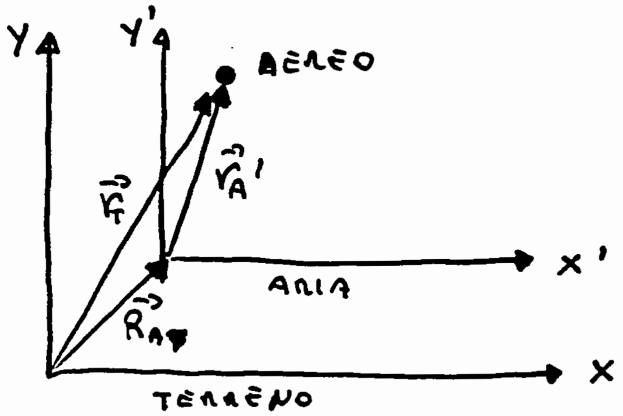
- Lunghezza del cammino $= |\vec{X_1}| + |\vec{X_2}| + |\vec{X_3}| = 8.4\ \text{Km}$

- velocità media : $\frac{\Delta\vec{r}}{t} = \frac{4.87\ \text{Km}}{360\ \text{s}} = 13.5\ \frac{m}{s}$ a $208°$

PROBLEMA 4-14

LA BUSSOLA DI UN AEROPLANO INDICA CHE LA PRORA DELL'AEREO PUNTA VERSO EST; L'INDICATORE DI VELOCITA' (RISPETTO ALL'ARIA) SEGNA 215 km/h. SOFFIA UN VENTO COSTANTE DI 65.0 km/h IN DIREZIONE NORD.

a) QUAL E' LA VELOCITA' DELL'AEREO RISPETTO AL TERRENO?



$$\vec{V_A}' = 215\ \hat{i}\ \frac{km}{h}$$

$$\vec{V}_{AT} = 65.0\ \hat{j}\ \frac{km}{h}$$

$$\vec{V_T} = \vec{V}_{AT} + \vec{V_A}$$

$$\vec{V_T} = 215\ \hat{i} + 65\ \hat{j}\ \frac{km}{h}$$

$$|\vec{V_T}| = \sqrt{215^2 + 65^2} = 225\ \frac{km}{h}$$

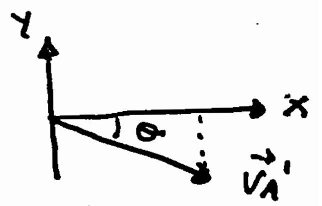
$$\alpha = \text{arctg}\,\frac{65}{215} = 16.8^\circ = 0.294 \text{ radianti}$$

- SE IL PILOTA VUOLE ANDARE AD EST RISPETTO AL TERRENO DEVE:

$$V_T = \vec{V}_{AT} + \vec{V_A}' \qquad |\vec{V_A}'| = 215\ km/h$$

- componente Y di $\vec{V_A}' = -\vec{V}_{AT} = -65\ km/h\ \hat{j}$

  $$\theta = -\arcsin\frac{65}{215} = -17.6^\circ$$

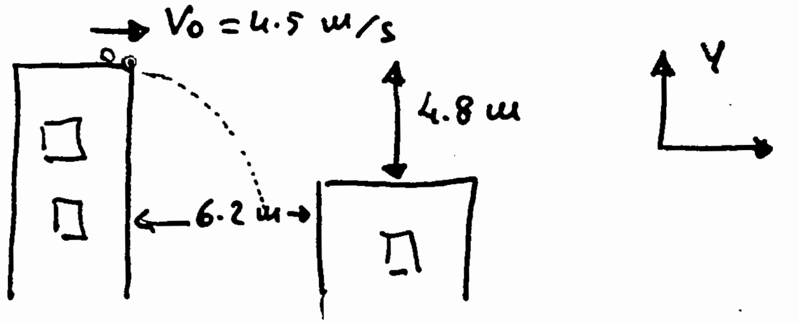


- VELOCITA' RISPETTO AL TERRENO

$$V_T = \sqrt{215^2 - 65^2} = 205\ km/h$$

PROBLEMA 4-7

UN CASCATORE CINEMATOGRAFICO DEVE ATTRAVERSARE DI CORSA UN TERRAZZO E VOLARNE FUORI ORIZZONTALMENTE PER ATTERRARE SUL TETTO DI UN EDIFICIO VICINO.
PUÒ USCIRNE INCOLUME SE LA SUA MASSIMA VELOCITÀ SUL TERRAZZO È 4.5 m/s ?



$g = -9.8$

$\vec{V}_0 = V_0\,\hat{i}$

- LA CADUTA DI 4.8 m DURA UN TEMPO t PARI A:

$$y - y_0 = -\frac{1}{2} g t^2 \quad \Rightarrow t = \sqrt{\frac{-2 \cdot 4.8}{-9.8}} = 0.990 \text{ s}$$

- CHE DISTANZA ORIZZONTALE PERCORRE IN QUESTO TEMPO ?

$$x - x_0 = V_{0x} \cdot t = 4.5 \cdot 0.990 = 4.5 \text{ m}$$

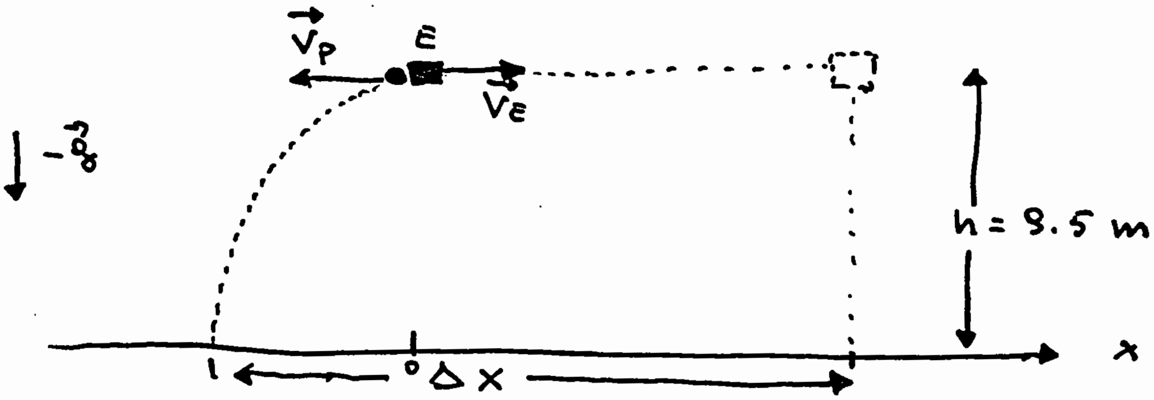
NON CE LA FA A RAGGIUNGERE IL PALAZZO

- PER RIUSCIRCI DOVREBBE AVERE UNA VELOCITÀ DI :

$$V_0 = \frac{x - x_0}{t} = \frac{6.2}{0.990} = 6.3 \ \frac{\text{m}}{\text{s}} \equiv 22 \ \text{Km/h}$$

HALLIDAY 4·75P

UN ELICOTTERO STA VOLANDO IN LINEA RETTA AL DI SOPRA DI UN TERRENO PIANO A VELOCITA' COSTANTE DI 6.2 m/s E A UNA QUOTA, ANCH'ESSA COSTANTE, DI 9.5 m. UN PACCO VIENE LANCIATO, ORIZZONTALMENTE, DALL'ELICOTTERO CON VELOCITA' RELATIVA ALL'ELICOTTERO DI 12 m/s DIRETTA IN SENSO OPPOSTO ALLA ROTTA. a) TROVATE LA VELOCITA' INIZIALE DEL PACCO RISPETTO AL TERRENO. b) QUAL'E' LA DISTANZA ORIZZONTALE FRA IL PACCO E L'ELICOTTERO AL MOMENTO DELL'IMPATTO COL TERRENO? c) VISTO DA TERRA QUALE ANGOLO COL TERRENO FORMA IL VETTORE VELOCITA' DEL PACCO UN ISTANTE PRIMA DI TOCCAR TERRA?



- LA VELOCITA' DEL PACCO RELATIVAMENTE AL TERRENO E' DATA DALLA COMPOSIZIONE DELLA VELOCITA' DELL'ELICOTTERO RISPETTO AL TERRENO ($\vec{V}_E$) E DEL PACCO RISPETTO ALL'ELICOTTERO ($\vec{V}_{PE}$)

$$\vec{V}_P = \vec{V}_E + \vec{V}_{PE} = 6.2 - 12 = -5.8 \text{ m/s}$$

LA VELOCITA' E' NEGATIVA, QUINDI ANCHE RISPETTO AL TERRENO IL PACCO SI MUOVE IN VERSO OPPOSTO A QUELLO DELL'ELICOTTERO

HALLIDAY 4-75P [... CONTINUA ...]

- STUDIAMO ORA IL MOTO DEL PACCO RISPETTO AL TERRENO. LA SUA TRAIETTORIA SARA' UNA PARABOLA

  - POSIZIONE INIZIALE : $X_0 = 0$; $Y_0 = 9.5\,m$
  - VELOCITA' INIZIALE : $V_{X_0} = -5.8\,m/s$; $V_{Y_0} = 0$

- $X = X_0 + V_{X_0} \cdot t = V_{X_0} t$ [moto rettilineo uniforme
- $Y = Y_0 + V_{Y_0} t + \frac{1}{2} a t^2 = Y_0 - \frac{1}{2} g t^2$ [moto uniformemente accelerat

- TROVIAMO DOPO QUANTO TEMPO IL PACCO TOCCA TERRA

$$0 = Y_0 - \frac{1}{2} g t^2 \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2\,Y_0}{g}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 9.5}{9.8}} = 1.39\ s$$

- VEDIAMO LO SPAZIO PERCORSO DAL PACCO IN ORIZZONTALE

$$X_p = V_{X_0} \cdot t = -5.8 * 1.39 = -8.06\ m$$

- VEDIAMO LO SPAZIO PERCORSO DALL'ELICOTTERO

$$X_E = V_E \cdot t = 6.2 * 1.39 = 8.62\ m$$

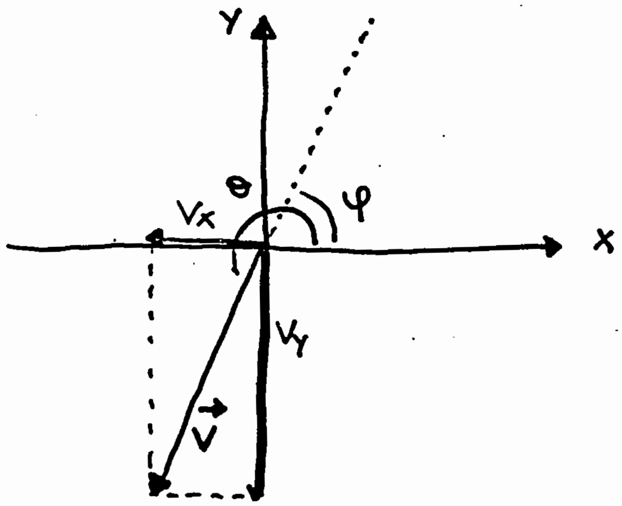
- LA DISTANZA TRA L'ELICOTTERO È IL PACCO VALE:

$$\Delta X = X_E - X_P = 8.62 - (-8.06) = 16.7\ m$$

HALLIDAY 4-75P [... CONTINUA]

TROVIAMO ORA LA VELOCITA' CON LA QUALE IL PAC[...]
TOCCA TERRA (MISURATA RISPETTO ALLA TERRA)

- $V_x = V_{x_0} = -5.8 \ m/s$
- $V_y = V_{y_0} + at = -gt = -9.8 \cdot 1.39 = -13.6 \ m/s$



- TROVIAMO IL MODULO DI $\vec{V}$

$$|\vec{V}| = \sqrt{V_x^2 + V_y^2} = \sqrt{(-5.8)^2 + (-13.6)^2} = 14.8 \ m/s$$

- TROVIAMO L'ANGOLO CHE FORMA LA DIREZIONE DELLA VELOCITA' CON L'ASSE X

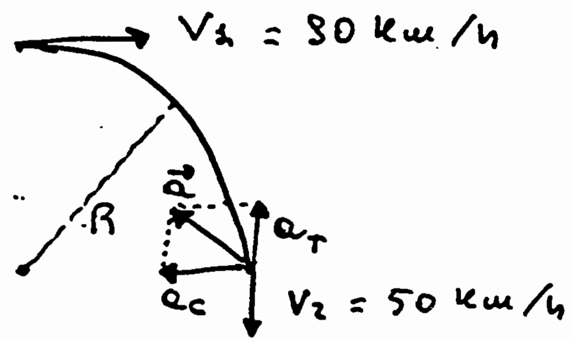
$$\varphi = \operatorname{arctg} \frac{V_y}{V_x} = \operatorname{arctg} \frac{-13.6}{-5.8} = 66.9°$$

- PER TROVARE L'ANGOLO θ CHE FORMA IL VETTORE VELOCITA' CON L'ASSE X OCCORRE AGGIUNGERE 180°

$$\theta = \varphi + 180 = 246.9°$$

SERWAY 3-31

UN TRENO AFFRONTANDO UNA CURVA RALLENTA DA 90.0 Km/h A 50.0 Km/h NEI 15.0 s CHE IMPIEGA A COMPLETARE LA CURVA. IL RAGGIO DELLA CURVA È 150 m. CALCOLARE L'ACCELERAZIONE NEL MOMENTO IN CUI LA VELOCITÀ DEL TRENO È 50 Km/h, ASSUMENDO CHE IN QUEST MOMENTO CONTINUI A DECELERARE.



- TRASFORMIAMO LE VELOCITÀ DA Km/h A m/s

$$V_1 = 90 \text{ Km/h} = 90 \frac{1000 \text{ m}}{3600 \text{ s}} = \frac{90}{3.6} = \underline{25.0 \text{ m/s}}$$

$$V_2 = 50 \text{ Km/h} = \frac{50}{3.6} = \underline{13.9} \text{ m/s}$$

- IL MODULO DELLA VELOCITÀ DEL TRENO CAMBIA, QUINDI È PRESENTE UN'ACCELERAZIONE TANGENZIALE

$$a_T^{\text{MEDIA}} = \frac{V_2 - V_1}{\Delta t} = \frac{13.9 - 25.0}{15} = -0.74 \text{ m/s}^2$$

- LA DIREZIONE DELLA VELOCITÀ CAMBIA, QUINDI È PRESEN UN'ACCELERAZIONE RADIALE (CENTRIPETA)

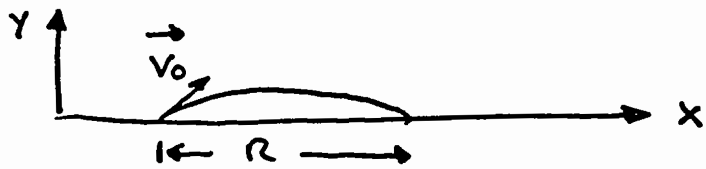
$$a_C = \frac{V^2}{R} = \frac{V_2^2}{R} = \frac{13.9^2}{150} = 1.29 \text{ m/s}^2$$

- IL MODULO DELL'ACCELERAZIONE TOTALE VALE:

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_C^2 + a_T^2} = \sqrt{1.29^2 + (-0.74)^2} = 1.49 \text{ m/s}^2$$

HALLIDAY 4-34P

AI CAMPIONATI MONDIALI DI ATLETICA DI TOKYO (1991) MIKE POWELL SALTÒ 8.95 m, MIGLIORANDO DI 5 cm IL PRIMATO DEL SALTO IN LUNGO CHE BOB BEAMON AVEVA STABILITO 23 ANNI PRIMA. PONIAMO CHE LA SUA VELOCITÀ AL "DECOLLO" SIA STATA 9.5 m/s, CORRISPONDENTE A QUELLA DI UN CENTOMETRISTA. QUANTO VICINO ARRIVÒ ALLA MASSIMA "GITTATA" POSSIBILE PER QUELLA VELOCITÀ INIZIALE IN ASSENZA DI RESISTENZA DELL'ARIA?



- LA GITTATA È PARI A:

$$R = \frac{V_0^2}{g} \sin(2\theta_0)$$

- LA GITTATA MASSIMA SI HA PER $\theta_0 = 45°$

$$R_{MAX} = \frac{V_0^2}{g}$$

- NEL CASO DI MIKE POWELL SI AVREBBE:

$$R_{MAX} = \frac{V_0^2}{g} = \frac{9.5^2}{9.8} = 9.21 \text{ m}$$

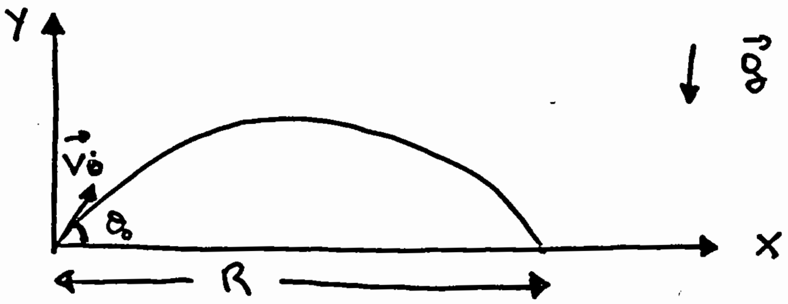
$\Rightarrow$ $\Delta R = R_{MAX} - R = 9.21 - 8.95 = 0.26$ m

$\Rightarrow$ IL SALTO DI POWELL È STATO QUASI PERFETTO

N.B. LA RESISTENZA DELL'ARIA RIDUCE LA GITTATA

SERWAY 3-15

UN ASTRONAUTA SU UN PIANETA SCONOSCIUTO SCOPRE CHE PUÒ SALTARE CON UNA GITTATA MASSIMA DI 15.0 m SE LA SUA VELOCITÀ INIZIALE È DI 3.0 m/s. DETERMINARE IL VALORE DELL'ACCELERAZIONE DI GRAVITÀ SU TALE PIANETA.



- USIAMO LA RELAZIONE SEGUENTE

$$R = \frac{V_0^2 \operatorname{sen} 2\theta_0}{g}$$

LA GITTATA MASSIMA SI HA PER UN ALZO DI 45°

$$R_{MAX} = \frac{V_0^2}{g}$$

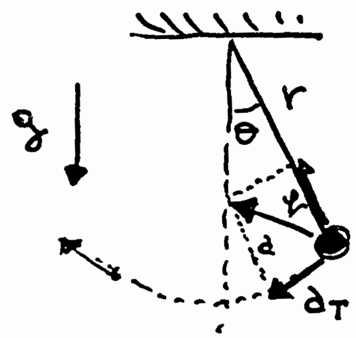
$$\Rightarrow \quad g = \frac{V_0^2}{R_{MAX}} = \frac{3.0^2}{15.0} = 0.60 \text{ m/s}^2$$

- TROVIAMO IL RAPPORTO TRA L'ACCELERAZIONE DI GRAVITÀ DI QUESTO PIANETA E DI QUELLA DELLA TERRA

$$\frac{g}{g_T} = \frac{0.60}{9.8} = 0.06$$

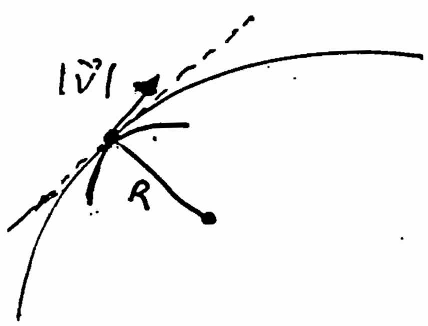
SFERA OSCILLANTE

UNA SFERA VINCOLATA ALL'ESTREMITA' DI UNA FUNE LUNGA 0.50 m, OSCILLA SU UNA CIRCONFERENZA IN UN PIANO VERTICALE SOTTO L'INFLUENZA DELLA GRAVITA'. QUANDO LA FUNE FORMA UN'ANGOLO $\theta = 20°$ CON LA VERTICALE, LA PALLA HA UNA VELOCITA' DI 1.5 m/s. DETERMINARE LA COMPONENTE RADIALE DELL'ACCELERAZIONE A QUELL'ISTANTE.



$$|a_r| = \frac{V^2}{R} = \frac{1.5^2}{0.50} = 4.5 \text{ m/}$$

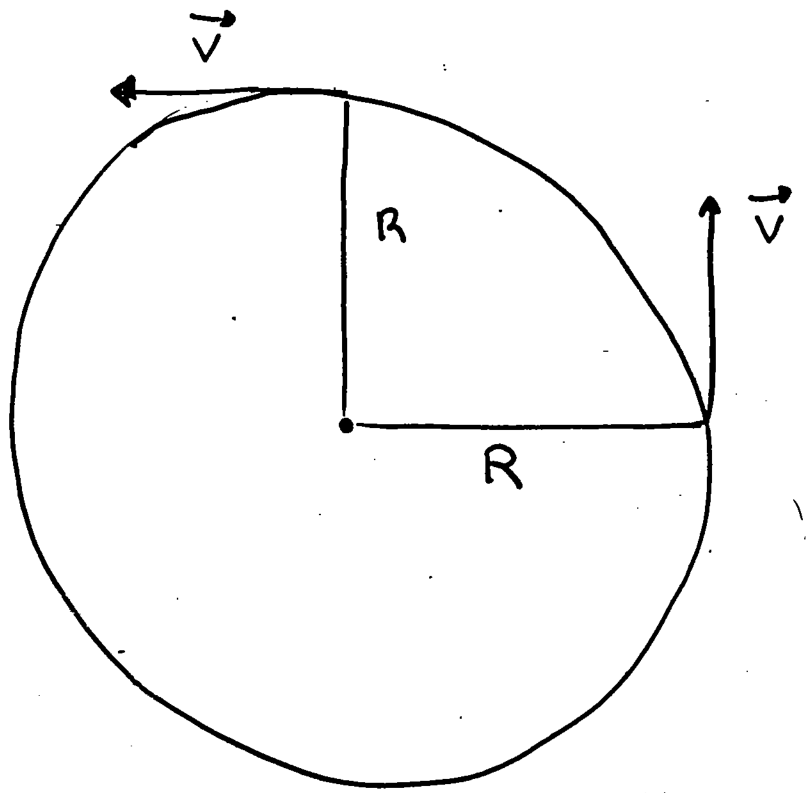
- E' PRESENTE ANCHE UNA COMPONENTE TANGENZIALE DELL'ACCELERAZIONE, PERCHE' IL MODULO DELLA VELOCITA' VARIA



MOTO CIRCOLARE UNIFORME

- UNA PARTICELLA SI DEFINISCE IN MOTO CIRCOLARE UNIFORME SE SI SPOSTA SU UN CERCHIO O SU UN ARCO DI CERCHIO CON VELOCITA' DI MODULO COSTANTE.

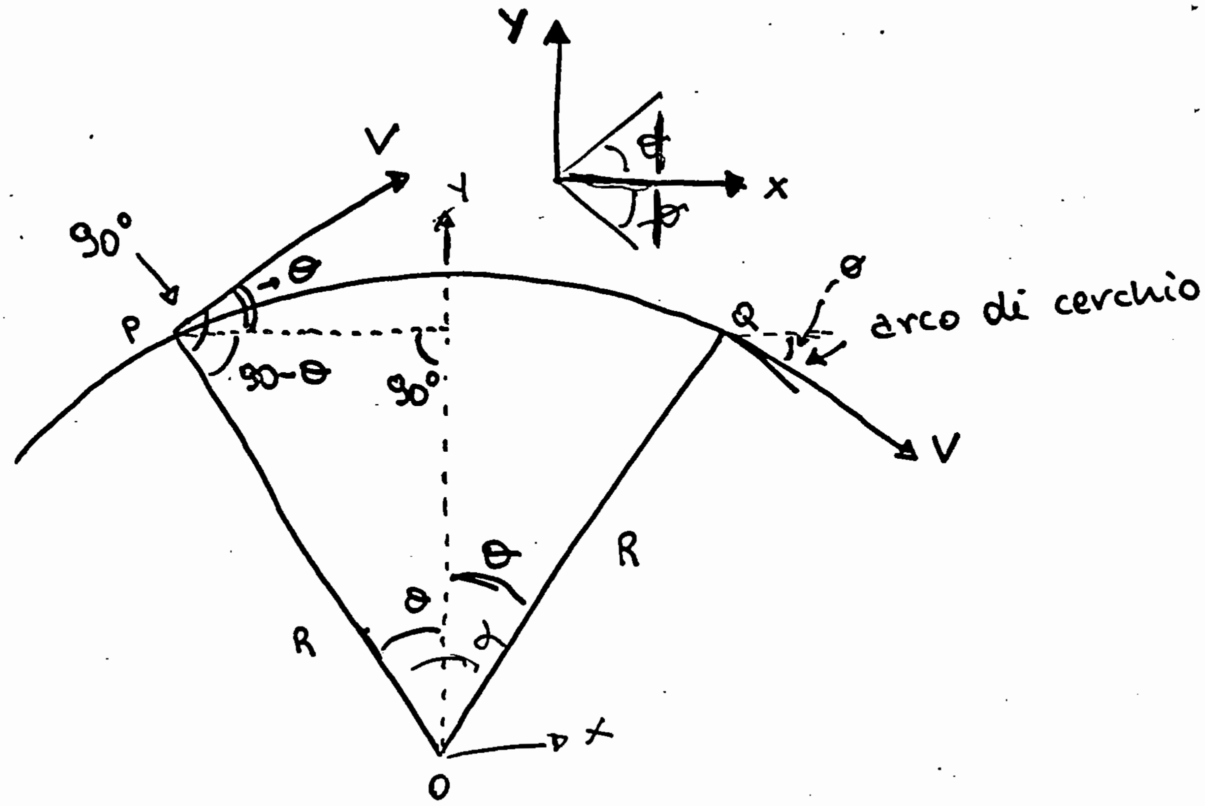
- BENCHE' IL MODULO DELLA VELOCITA' SIA COSTANTE, LA PARTICELLA ACCELERA PERCHE' CAMBIA LA SUA DIREZIONE.



- LA DIREZIONE DI $\vec{v}$ E' SEMPRE ORTOGONALE AL RAGGIO

- IL VERSO DI ROTAZIONE ANTIORARIO E' POSITIVO

ANALISI DEL MOTO C.U.



- LA SOMMA DEGLI ANGOLI DI UN TRIANGOLO È UGUALE A 180° (GEOMETRIA EUCLIDEA)

- LA COMPONENTE V_x DELLA VELOCITA' VALE:

$$V_x = |\vec{V}| \cos\theta$$

- LA COMPONENTE V_y DELLA VELOCITA' VALE:

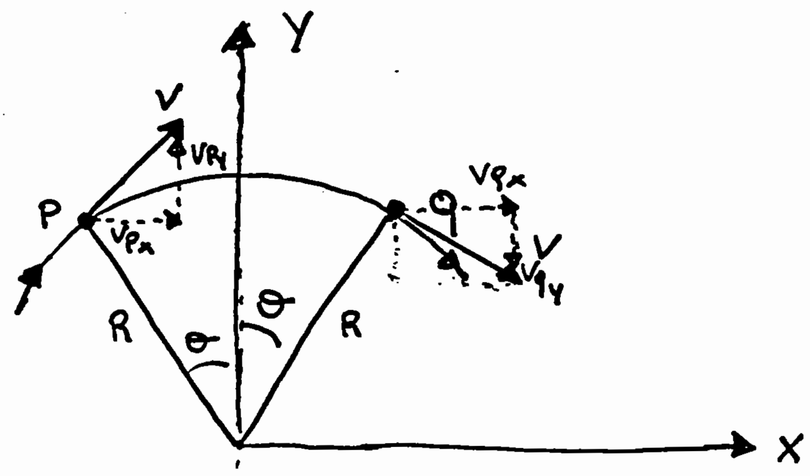
$$V_y = |\vec{V}| \sin\theta$$

- ARCO DI CERCHIO $\widehat{PQ} = R\,2\theta = R\cdot\alpha$

$\Rightarrow$ CIRCONFERENZA $= R\cdot 2\pi$

- $\sin(-\theta) = -\sin\theta$; $\sin(360-\theta) = \sin(-\theta)$
- $\cos(-\theta) = \cos\theta$

ANALISI DEL MOTO C.U.



- $V_{P_x} = +V\cos\theta$ $\quad$ $V_{q_x} = V\cos\theta$

  $V_{P_y} = +V\sin\theta$ $\quad$ $V_{q_y} = -V\sin\theta$

- TEMPO t PER ANDARE DA P A Q = $\dfrac{\widehat{PQ}}{v} \Rightarrow \Delta t = \dfrac{R\,2\theta}{v}$

- CALCOLIAMO L'ACCELERAZIONE TRAMITE LE COMPONENTI

$$\bar{a}_x = \frac{V_{q_x} - V_{p_x}}{\Delta t} = \frac{V\cos\theta - V\cos\theta}{\Delta t} = 0$$

$$\bar{a}_y = \frac{V_{q_y} - V_{p_y}}{\Delta t} = \frac{-V\sin\theta - V\sin\theta}{\Delta t} = -\frac{2V\sin\theta}{2R\theta/v} = -\left(\frac{V^2}{R}\right)\left(\frac{\sin\theta}{\theta}\right.$$

- L'ACCELERAZIONE È DIRETTA VERSO IL BASSO, CIOÈ VERSO IL CENTRO DELLA CIRCONFERENZA

- FACCIAMO TENDERE IL PUNTO q VERSO IL PUNTO P QUESTO VUOL DIRE CHE $\theta \to 0$

- $\lim\limits_{\theta\to 0} \dfrac{\sin\theta}{\theta} = 1$

$\Rightarrow$ $\boxed{a = -\dfrac{V^2}{R}}$ diretta verso il centro della circonferenza

MOTO CIRCOLARE UNIFORME

- UNA PARTICELLA CHE SI MUOVE LUNGO UNA CIRCONFERENZA (O ARCO DI CERCHIO) CON VELOCITA' SCALARE COSTANTE SUBISCE UN ACCELERAZIONE DIRETTA VERSO IL CENTRO CHIAMATA ACCELERAZIONE CENTRIPETA

$$a = -\frac{V^2}{R}$$

- TEMPO DI PERCORRENZA DELLA CIRCONFERENZA (PERIODO)

$$T = \frac{2\pi R}{V} \qquad [\text{UNITA' DI MISURA} = \text{SECONDI}]$$

- GIRI EFFETTUATI PER UNITA' DI TEMPO (FREQUENZA)

$$f \equiv \nu = \frac{1}{T} = \frac{V}{2\pi R} \qquad [s^{-1} = Hz]$$

- VELOCITA' ANGOLARE ω: ANGOLO SPAZZATO DAL RAGGIO VETTORE NELL'UNITA' DI TEMPO

  - 1 GIRO CORRISPONDE A 2π RADIANTI (360°)

$$\Rightarrow \omega = \frac{1 \text{ GIRO}}{1 \text{ PERIODO}} = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\nu = 2\pi\frac{V}{2\pi R} = \frac{V}{R} \qquad [\text{rad } s^{-1}]$$

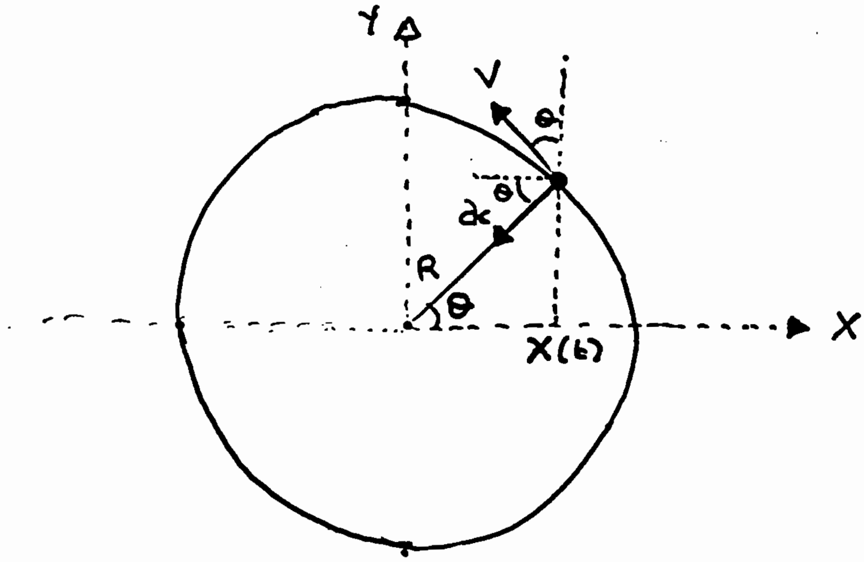
- L'ACCELERAZIONE CENTRIPETA SI PUO' RISCRIVERE COME:

$$a = -\frac{V^2}{R} = -\frac{V^2}{R}\cdot\frac{R}{R} = \underline{-\omega^2 R}$$

$$\boxed{V = \omega R}$$

MOTO ARMONICO E MOTO CIRCOLARE UNIFORME

PROIETTIAMO IL MOTO DI UN PUNTO CHE SI MUOVE DI MOTO CIRCOLARE UNIFORME SU UN DIAMETRO DELLA CIRCONFERENZA



$$\theta = \omega t + \varphi$$

$$\theta(t=0) = \varphi$$

$$\underline{V = \omega R}$$

$$\underline{a_c = +\omega^2 R}$$

- $X(t) = R\cos\theta = R\cos(\omega t + \varphi)$

– PROIETTIAMO IL VETTORE VELOCITA' SUL DIAMETRO

$$V_x(t) = -V\operatorname{sen}\theta = -\omega R\operatorname{sen}(\omega t + \varphi) \qquad \left[\frac{dx}{dt}\right]$$

– PROIETTIAMO ORA L'ACCELERAZIONE CENTRIPETA SUL DIAMETRO

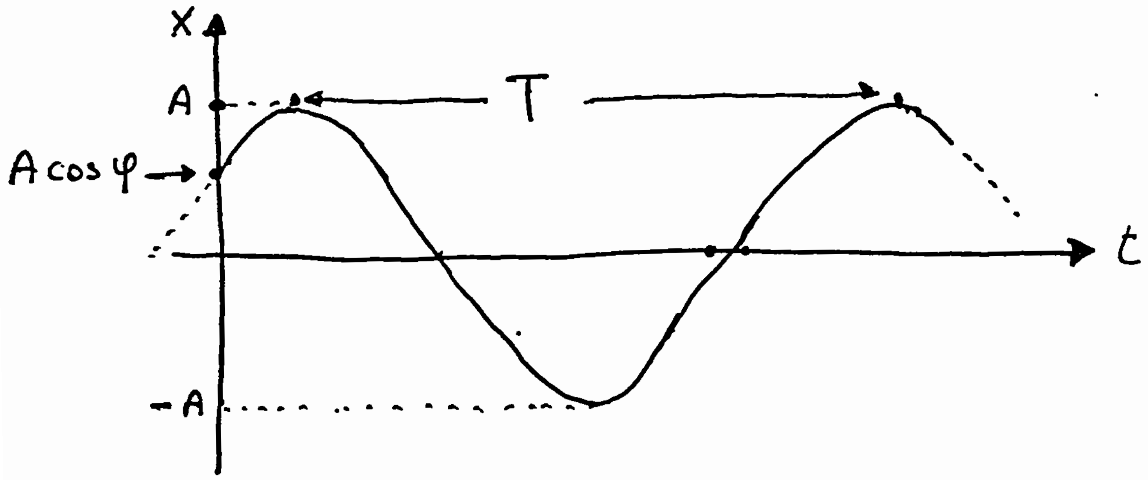
$$a_x(t) = -a_c\cos\theta = -\omega^2 R\cos(\omega t + \varphi) \qquad \left[\frac{d^2x}{dt^2}\right]$$

N.B. $\cos\alpha = \operatorname{sen}\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)$

MOTO ARMONICO

$$\boxed{x = A\cos(\omega t + \varphi)}$$

- A AMPIEZZA MASSIMA
- $\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$ PULSAZIONE ANGOLARE
- φ FASE INIZIALE



N.B. DOPO UN PERIODO T LA FUNZIONE RIASSUME GLI STESSI VALORI

- SI INCONTRA IL MOTO ARMONICO IN MOLTI SISTEMI FISICI
  - OSCILLAZIONE DI UNA MASSA COLLEGATA AD UNA MOLLA
  - PICCOLE OSCILLAZIONI DI UN PENDOLO

N.B. $\underline{x = A\,\mathrm{sen}(\omega t + \varphi')}$ E' ANCHE UN MOTO ARMONICO !!!

N.N.B. – A e φ DIPENDONO DALLE CONDIZIONI INIZIALI

– ω DIPENDE DALLE PROPRIETA' FISICHE DEL SISTEMA

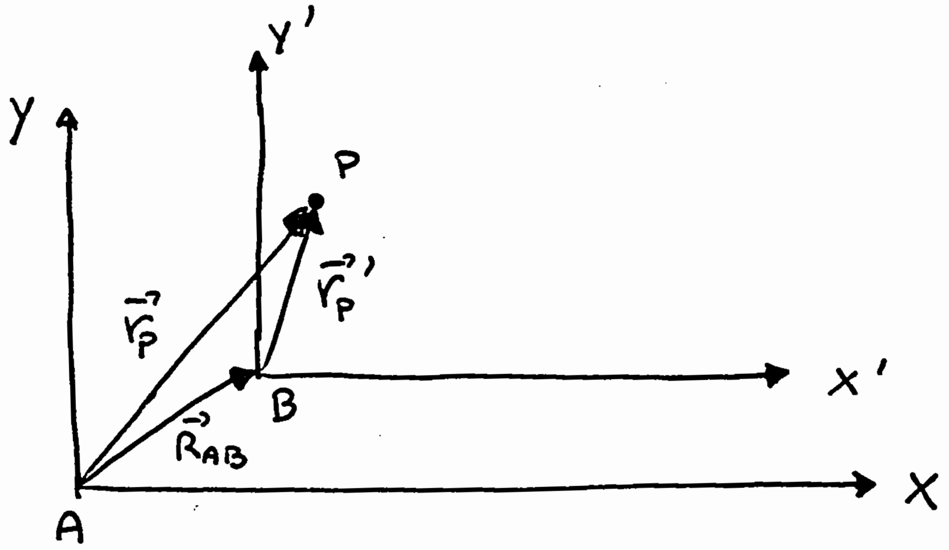
$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (\text{MOLLA + MASSA})$$

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{\ell}} \quad (\text{PENDOLO SEMPLICE})$$

MOTO RELATIVO

- NON ESISTE IL MOTO ASSOLUTO

- IL MOTO E' SEMPRE RIFERITO A QUALCHE COSA CHE NOI CHIAMIAMO SISTEMA DI RIFERIMENTO



$$\vec{r}_P = \vec{r}_{AB} + \vec{r}_P{}'$$ • posizione del punto P

- VELOCITA' DEL PUNTO P

$$\vec{V}_P = \frac{d\vec{r}_P}{dt} = \frac{d\vec{r}_{AB}}{dt} + \frac{d\vec{r}_P{}'}{dt}$$

- SUPPONIAMO CHE IL SISTEMA B SI MUOVA CON VELOCITA' COSTANTE $\vec{V}_{AB}$ RISPETTO AL SISTEMA A

- $\vec{V}_P = \vec{V}_{AB} + \vec{V}_P{}'$

- CALCOLIAMO L'ACCELERAZIONE:

$$\vec{a}_P = \frac{d\vec{V}_P}{dt} = \frac{d\vec{V}_{AB}}{dt} + \frac{d\vec{V}_P{}'}{dt}$$

$$\vec{a}_P = \vec{a}_P{}'$$

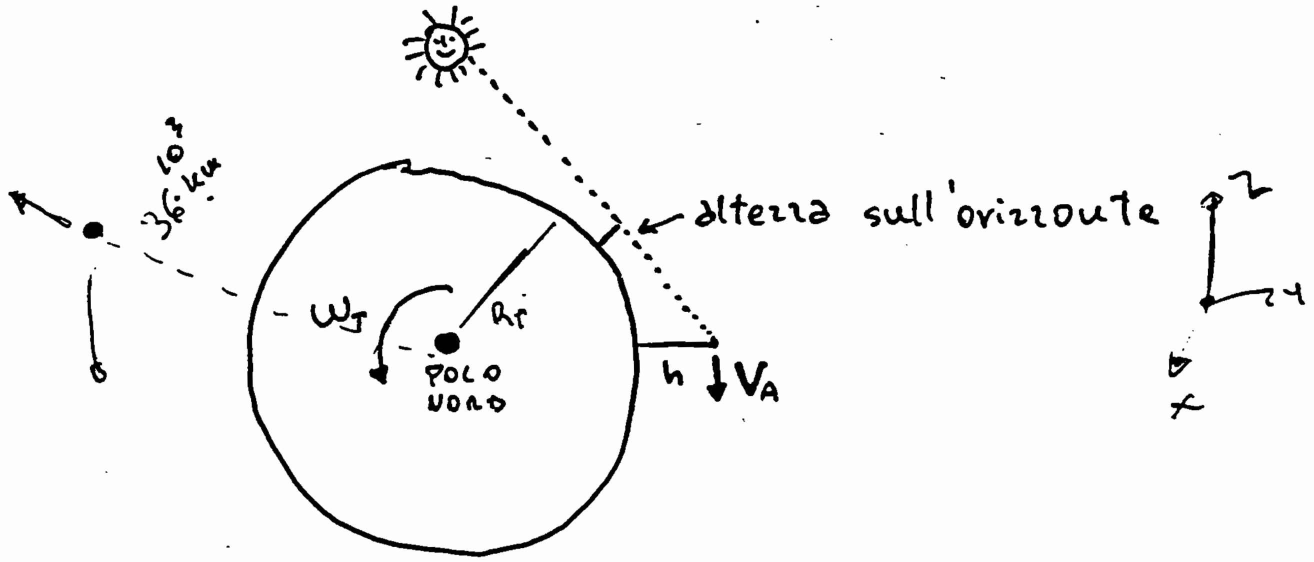
ESERCIZI CONSIGLIATI

Moto circolare uniforme e moto relativo

- Serway (3° Edizione) – Cap. 3
  - 25 – 27 – 29 – 31 – 33 – 35 – 37 – 39
- Halliday (5° Edizione) – Cap. 4
  - 35E – 37E – 39P – 41P – 43P – 45E – 47P – 49E – 51P – 53P – 55P

ESERCIZIO : CINEMATICA

A CHE ω E v DEVE ANDARE UN AEREO ALL'EQUATORE AFFINCHE' IL SOLE APPAIA FISSO ALL'ORIZZONTE, SE VOLA AD UNA QUOTA $h = 10$ Km? $(R_T = 6.37 \cdot 10^3$ Km$)$



$$\omega_{AEREO} = -\omega_T = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{24 \cdot 60 \cdot 60} = 7.27 \cdot 10^{-5} \text{ rad/s}$$

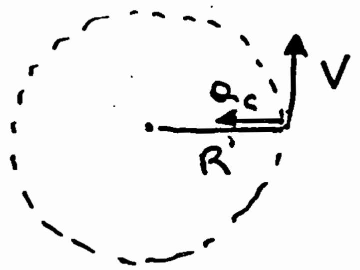
- LA TERRA RUOTA DA OVEST VERSO EST, QUINDI L'AEREO DEVE ANDARE DA EST VERSO OVEST (DALL'ITALIA A USA

$$V_{AEREO} = \omega (R_T + h) = 7.25 \cdot 10^{-5} * (6.37 \cdot 10^3 + 10) \cdot 10^3 = 463 \text{ m/s}$$

$$= 1670 \text{ Km/h}$$

SERWAY 3-27

IL GIOVANE DAVIDE, CHE UCCISE GOLIA, PROVO' VARIE FION
PRIMA DI AFFRONTARE IL GIGANTE. EGLI TROVO' CHE CON
UNA FIONDA DI 60.0 cm DI LUNGHEZZA POTEVA METTER
IN ROTAZIONE LA FIONDA AD UNA FREQUENZA DI 8.0 giri.
CON UNA LUNGHEZZA DI 90.0 cm, LA FREQUENZA DI ROTA
ZIONE ERA SOLO DI 6.0 giri/s. DETERMINARE: a) QUALE
FREQUENZA DI ROTAZIONE PRODUCE LA MAGGIORE VELOCITA'
LINEARE; b) L'ACCELERAZIONE CENTRIPETA PER LA FREQUEN
DI 8.0 giri/s; c) L'ACCELERAZIONE CENTRIPETA PER 6.0 giri/



- $a_c = \omega^2 R = \dfrac{V^2}{R}$
- $\omega = 2\pi f = \dfrac{2\pi}{T}$

- ABBIAMO QUINDI:

b) $a_{c1} = (2\pi f_1)^2 \cdot R_1 = (2\pi \cdot 8)^2 \cdot 0.6 = 1516.0 \ m/s^2$

c) $a_{c2} = (2\pi f_2)^2 \cdot R_2 = (2\pi \cdot 6)^2 \cdot 0.9 = 1279.1 \ m/s^2$

- TROVIAMO ORA LA VELOCITA' LINEARE

$$V = \sqrt{a_c \cdot R}$$

- $V_1 = \sqrt{a_{c1} \cdot R_1} = \sqrt{1516 \cdot 0.6} = 30.2 \ m/s$
- $V_2 = \sqrt{a_{c2} \cdot R_2} = \sqrt{1279.1 \cdot 0.9} = 33.9 \ m/s$

a) LA VELOCITA' LINEARE MASSIMA SI OTTIENE NEL
SECONDO CASO

ESERCIZIO : CINEMATICA

IL TERMINALE DELL'AEREOPORTO DI GINEVRA HA UN MARCIAPIEDE MOBILE PER TRASFERIRE RAPIDAMENTE I PASSEGGERI IN UN LUNGO CORRIDOIO. PIETRO, CHE CAMMINA NEL CORRIDOIO SENZA USARE IL MARCIAPIEDE MOBILE, IMPIEGA 150 s PER PERCORRERLO. PAOLO, CHE SE NE STA FERMO SUL MARCIAPIEDE MOBILE, COPRE LA STESSA DISTANZA IN 70 s. MARIA NON SOLO USA IL MARCIAPIEDE MOBILE, MA CAMMINA NELLA STESSA DIREZIONE, ALLO STESSO PASSO DI PIETRO. QUANTO TEMPO IMPIEGHERA' MARIA?

L = LUNGHEZZA DEL CORRIDOIO

$$V_{PIETRO} = \frac{L}{T_{PIETRO}} = \frac{L}{150} \ m/s$$

$$V_{PAOLO} = \frac{L}{T_{PAOLO}} = \frac{L}{70} \ m/s$$

$$V_{MARIA} = V_{PAOLO} + V_{PIETRO}$$

$$T_{MARIA} = \frac{L}{V_{MARIA}} = \frac{L}{V_{PAOLO} + V_{PIETRO}} =$$

$$= \frac{L}{\frac{L}{150} + \frac{L}{70}} = \frac{1}{\frac{1}{150} + \frac{1}{70}} = \frac{150 \cdot 70}{150 + 70} = 47.7 \ s$$

DINAMICA

- LA CINEMATICA STUDIA LE CARATTERISTICHE DEL MOTO SENZA INDAGARE LE CAUSE CHE LO HANNO PROVOCATO

- LA DINAMICA STUDIA LE CAUSE DEL MOTO

- PRIMA DI GALILEO SI PENSAVA CHE LO STATO NATURALE DI UN CORPO FOSSE LA QUIETE.
  UN CORPO LASCIATO A SE STESSO RIMANEVA FERMO.

- UN CORPO SI METTEVA IN MOTO SOLTANTO SE VI ERA UN AGENTE CHE AGIVA SU DI ESSO.
  IMMAGINATE UN CARRO TRAINATO DA UN CAVALLO.
  SE STACCATE IL CAVALLO DAL CARRO QUESTO SI FERMA.

- SE SIETE VOI A SPINGERE UN CARRO DOVETE FARE UNO SFORZO.
  IL CONCETTO DI FORZA È UN CONCETTO INNATO.

RIFLESSIONI SUL MOTO

- MA... VI SONO ALCUNE COSE CHE NON VANNO
  - LO STATO DI QUIETE DI UN CORPO DIPENDE DAL SISTEMA DI RIFERIMENTO CHE SCEGLIAMO. NON C'E' UN SISTEMA DI RIFERIMENTO PRIVILEGIATO AL QUALE RIFERIRE LA "QUIETE NATURALE".
  - E' VERO CHE UN CORPO LASCIATO A SE' STESSO TENDE A TORNARE NEL SUO STATO DI QUIETE NATURALE?

- **LA RISPOSTA VIENE DALL' ESPERIMENTO**

ESPERIMENTO SUL MOTO

- IMMAGINATE DI PRENDERE UN CORPO (ES. UN LIBRO) E METTETELO SU UN PIANO (ES. UN TAVOLO)

- SPINGETE IL CORPO; SMETTETE DI SPINGERE ED IL CORPO SI FERMA.

- DATE UNA SPINTA PIU' FORTE AL CORPO; IL CORPO SI MUOVE E DOPO AVER PERCORSO UN CERTO SPAZIO SI FERMA.
  IL CORPO SI E' MOSSO ANCHE QUANDO NON SPINGEVO PIU'!

- IMMAGINIAMO DI LEVIGARE PER BENE IL TAVOLO, MAGARI METTIAMOCI DELL'OLIO. SPINGO DI NUOVO IL CORPO E QUESTO PERCORRE UNA DISTANZA MAGGIORE PRIMA DI FERMARSI.

- CAMBIAMO PIANO, ANDIAMO SU UN LAGO GHIACCIATO. DIAMO SEMPRE LA STESSA SPINTA AL CORPO E VEDIAMO CHE QUESTO PERCORRE UNO SPAZIO ANCORA MAGGIORE.

→ LO SPAZIO PERCORSO NON DIPENDE DAL CORPO STESSO E NON DIPENDE NEMMENO DALLA SPINTA DATA, MA DIPENDE SOLO DA QUANTO BENE E' LEVIGATO IL TAVOLO

- IL TAVOLO ESERCITA UNA FORZA SUL CORPO, TANTO PIU' PICCOLA TANTO MIGLIORE E' LEVIGATO IL TAVOLO.

PRINCIPIO D' INERZIA

- SE IMMAGINIAMO DI LEVIGARE IL TAVOLO IN MANIERA PERFETTA, IL CORPO NON SI FERMA PIU' E CONTINUA NEL SUO STATO DI MOTO RETTILINEO CON VELOCITA' COSTANTE.

- RISPETTO A QUALE SISTEMA DI RIFERIMENTO ?

- FACCIAMO UN PROCEDIMENTO INVERSO.
  STABILIAMO DAPPRIMA SE SU UN CORPO NON AGISCONO FORZE OPPURE CHE LE AZIONI DI TUTTE LE FORZE SI COMPENSINO.

- ALLORA E' POSSIBILE TROVARE UN SISTEMA DI RIFERIMENTO RISPETTO AL QUALE IL CORPO RISULTA IN QUIETE O IN MOTO RETTILINEO UNIFORME.
  LA PROPRIETA' DEL CORPO DI CONSERVARE IL SUO STATO DI MOTO SI CHIAMA INERZIA ED IL SISTEMA DI RIFERIMENTO SUDDETTO SI CHIAMA SISTEMA DI RIFERIMENTO INERZIALE.

- TROVATO UN SISTEMA DI RIFERIMENTO INERZIALE TUTTI GLI ALTRI CHE SI MUOVONO RISPETTO A QUESTO DI MOTO RETTILINEO UNIFORME SONO ANCH'ESSI INERZIALI.

- QUINDI IL PRIMO PRINCIPIO DELLA DINAMICA O PRIMA LEGGE DI NEWTON, PUO' ESSERE FORMULATO COME:
  UN CORPO NON SOGGETTO A FORZE O LA CUI RISULTANTE E' NULLA, RIMANE IN QUIETE O SI MUOVE DI MOTO RETTILINEO UNIFORME RISPETTO AD UN SISTEMA INERZIALE.

➞ LA PRIMA LEGGE E' UNA DEFINIZIONE DI UN SISTEMA DI RIFERIMENTO INERZIALE.

LA FORZA

- CLASSIFICHIAMO LE FORZE IN DUE CATEGORIE: FORZE DI CONTATTO E FORZE CHE AGISCONO A DISTANZA (PIU' AVANTI VEDREMO CHE ESISTONO SOLO LE SECONDE, MENTRE NEL SEGUITO FAREMO DEGLI ESEMPI USANDO LE PRIME).

- SAPPIAMO CHE APPLICANDO UNA FORZA AD UN CORPO NE CAMBIAMO LO STATO DI MOTO, VALE A DIRE PROVOCHIAMO UN'ACCELERAZIONE.

- SAPPIAMO MISURARE LE ACCELERAZIONI DI UN CORPO, POSSIAMO QUINDI MISURARE ANCHE LE FORZE
[MISURA DINAMICA]

- SCIEGLIAMO UN CORPO DI RIFERIMENTO CHE ASSUMIAMO AVERE LA MASSA UNITARIA, CIOE' 1 Kg.
[LA SCELTA DELL'UNITA' DI MISURA E' ARBITRARIA].

- APPLICHIAMO UNA FORZA AL CORPO DI RIFERIMENTO; LA FORZA CHE PROVOCA UN'ACCELERAZIONE UNITARIA, CIOE' DI 1 m/s^2 VERRA' DEFINITA COME FORZA UNITARIA. NEL SISTEMA MKS SI MISURA IN NEWTON N.

- LA FORZA CHE PROVOCA UN'ACCELERAZIONE DEL CORPO DI RIFERIMENTO DI 2 m/s^2 SARA DI 2 N.
ALL'ACCELERAZIONE DI 4 m/s^2 CORRISPONDE UNA FORZA DI 4 N, E COSI' VIA.

LA FORZA E' UN VETTORE?

- L'ACCELERAZIONE E' UN VETTORE, E LA FORZA?

- SAPPIAMO CHE POSSIAMO APPLICARE LA STESSA FORZA IN DIVERSE DIREZIONI, MA CIO' NON BASTA PER ASSERIRE IL CARATTERE VETTORIALE DI UNA GRANDEZZA.

- LA DIREZIONE LUNGO LA QUALE APPLICHIAMO LA FORZA E' LA STESSA DELL'ACCELERAZIONE RISULTANTE, MA ANCORA NON BASTA.

- LA FORZA AFFINCHE' ABBIA LE PROPRIETA' DI UN VETTORE DEVE SODDISFARE LE STESSE REGOLE DI SOMMA E SCOMPOSIZIONE PROPRIE DEI VETTORI

$$\vec{F}_3 = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$$

$$\vec{F} = F_x \hat{i} + F_y \hat{j} + F_z \hat{k}$$

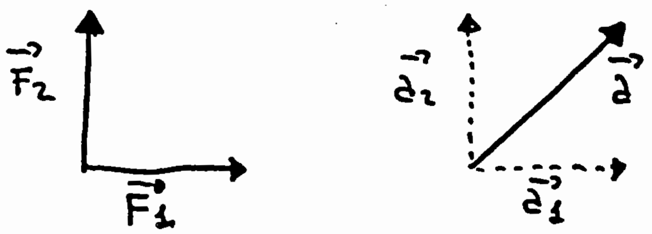
LA FORZA E' UN VETTORE: VERIFICA

- APPLICHIAMO UNA FORZA $\vec{F}_1$ AL CORPO DI PROVA E MISURIAMO $\vec{a}_1$

- APPLICHIAMO POI $\vec{F}_2$ E MISURIAMO $\vec{a}_2$

- APPLICHIAMO CONTEMPORANEAMENTE $\vec{F}_1$ E $\vec{F}_2$

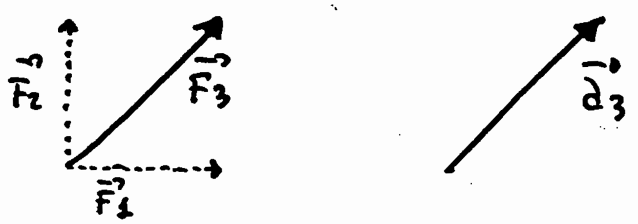
  E VEDIAMO SE L'ACCELERAZIONE RISULTANTE E' UGUALE A $\vec{a}_1 + \vec{a}_2$



$\vec{a} = \vec{a}_1 + \vec{a}_2$?

[SI]

- APPLICHIAMO UNA FORZA $\vec{F}_3$ UGUALE ALLA SOMMA VETTORIALE DI $\vec{F}_1$ E $\vec{F}_2$. VERIFICHIAMO SE $\vec{a}_3 = \vec{a} = \vec{a}_1 + \vec{a}_2$



- TUTTO CIO' SI VERIFICA SPERIMENTALMENTE.

  LA FORZA E' UN VETTORE.

MASSA

- ABBIAMO VISTO CHE APPLICANDO FORZE DIVERSE AL CORPO DI RIFERIMENTO OTTENIAMO ACCELERAZIONI DIVERSE.

- COSA SUCCEDE ORA SE APPLICHIAMO LA STESSA FORZA A CORPI DIVERSI?
  OTTENIAMO SEMPRE LA STESSA ACCELERAZIONE?
  ACCELERAZIONI DIVERSE?
  CHE RELAZIONE C'È TRA LE DIVERSE ACCELERAZIONI?

- APPLICHIAMO LA FORZA UNITARIA AD UN CORPO DIVERSO DAL CORPO DI RIFERIMENTO.
  ASSUMIAMO CHE OGNI CORPO ABBIA UNA PROPRIETA' CHIAMATA MASSA.
  LA MASSA DEL CORPO DI RIFERIMENTO SIA m_0 E QUELLA DELL'ALTRO CORPO SIA m_x (MASSA INCOGNITA)

- MISURIAMO UN'ACCELERAZIONE a_x
  FACCIAMO LA SEGUENTE CONGETTURA:

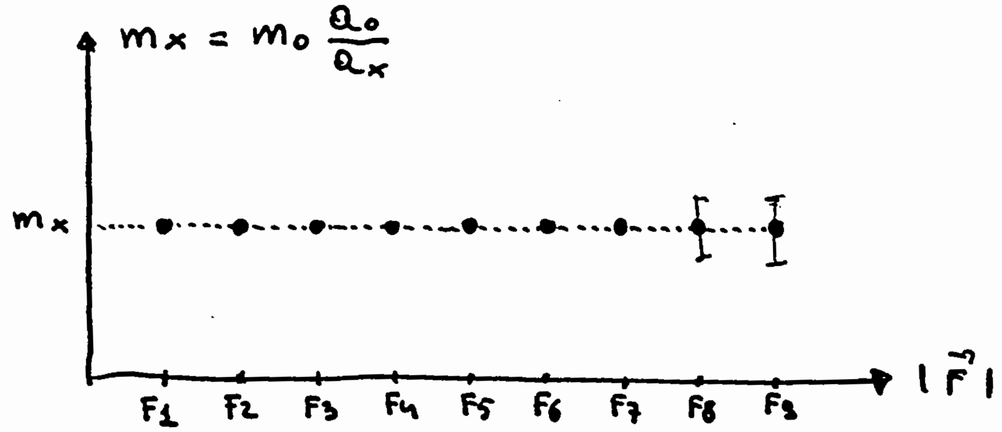
$$a_x \neq a_0$$

$$m_x a_x = m_0 a_0$$

$$\Rightarrow m_x = m_0 \frac{a_0}{a_x}$$

LA MASSA È UNA PROPRIETÀ INTRINSECA DEL CORPO?

- APPLICHIAMO DIVERSE FORZE SIA AL CORPO m_0 CHE AL CORPO DI MASSA INCOGNITA m_x E MISURIAMO LE ACCELERAZIONI DI m_0 E m_x
- COSTRUIAMO IL GRAFICO SEGUENTE



- CAMBIANDO LE FORZE VARIANO SIA a_0 CHE a_x IN MODO TALE CHE IL LORO RAPPORTO RIMANGA COSTANTE
- SI PUÒ RIPETERE L'ESPERIMENTO CAMBIANDO LE DIREZIONI DELLE FORZE E SI VERIFICA CHE IL VALORE m_x CHE SI MISURA NON DIPENDE DALLA DIREZIONE DELL'ACCELERAZIONE DEL CORPO. <u>M È UNO SCALARE</u>
- LA MASSA È UNA CARATTERISTICA INTRINSECA DI UN CORPO
- LA MASSA ESPRIME LA TENDENZA DI UN CORPO A MANTENERE INALTERATO IL SUO STATO DI MOTO. MAGGIORE È LA MASSA PIÙ DIFFICILE SARÀ CAMBIARE LA SUA VELOCITÀ.

SECONDA LEGGE DI NEWTON

$$\vec{F} = m\vec{a}$$

- LE VARIE OSSERVAZIONI SPERIMENTALI SULLA MISURA DI FORZE, MASSE ED ACCELERAZIONI, FURONO RIASSUNTE DA NEWTON IN UN'UNICA EQUAZIONE.

$$\sum_{i}^{N} \vec{f_i} = m\vec{a}$$

- m E' LA MASSA DEL PUNTO MATERIALE, E' UNA GRANDEZZA SCALARE.

- $\vec{a}$ E' L'ACCELERAZIONE DEL PUNTO

- $\Sigma \vec{f}$ E' LA SOMMA VETTORIALE DI TUTTE LE FORZE CHE AGISCONO SUL PUNTO.

- L'EQUAZIONE VETTORIALE EQUIVALE A TRE EQUAZIONI SCALARI

$$\Sigma f_x = m a_x$$

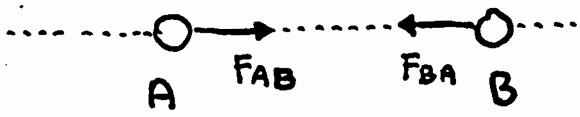
$$\Sigma f_y = m a_y$$

$$\Sigma f_z = m a_z$$

- L'ACCELERAZIONE DEL PUNTO LUNGO UN'ASSE DIPENDE SOLO DALLE PROIEZIONI DELLE FORZE LUNGO QUELL'ASSE

TERZA LEGGE DI NEWTON

AD OGNI AZIONE CORRISPONDE UNA REAZIONE UGUALE E CONTRARIA



$$\vec{F}_{AB} = -\vec{F}_{BA}$$

SE IL CORPO A AGISCE SUL CORPO B CON UNA FORZA $\vec{F}_{AB}$ ALLORA IL CORPO B REAGISCE SUL CORPO A CON UNA FORZA $-\vec{F}_{AB}$

$$\vec{F}_{AB} = -\vec{F}_{BA}$$

- LE DUE FORZE AGISCONO SU DUE CORPI DIVERSI

- IL CORPO A HA MASSA M_A MENTRE IL CORPO B HA MASSA M_B

$\Rightarrow$

$$\vec{F}_{BA} = m_B \cdot \vec{a}_B$$

$$\vec{F}_{AB} = m_A \cdot \vec{a}_A$$

$\Rightarrow$

$$\vec{F}_{AB} = -\vec{F}_{BA}$$

$$m_B \cdot \vec{a}_B = -m_A \cdot \vec{a}_A$$

$$\vec{a}_B = -\frac{m_A}{m_B} \cdot \vec{a}_A$$

- SE $m_B \gg m_A$ $\Rightarrow$ $\vec{a}_B = 0$
- Ex: m_B = TERRA ; m_A = MELA

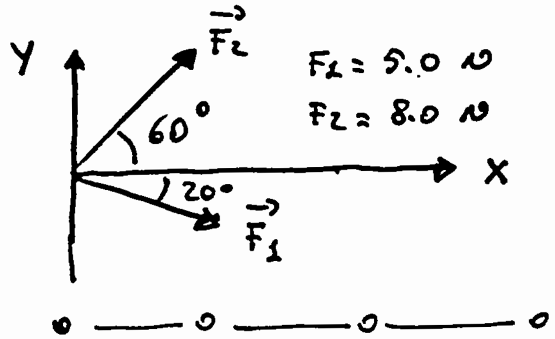
ESERCIZI CONSIGLIATI

Seconda legge di Newton

- Serway (3° Edizione) – Cap. 4
  - 1 – 3 – 5 – 7 – 9 – 11 – 13 – 15 – 23 – 27 – 37 – 41 (risolvere di nuovo questo esercizio dopo aver studiato il lavoro)
- Halliday (5° Edizione) – Cap. 5
  - 1E – 3E – 5E – 7P – 11E – 13E – 15E – 17E – 19P – 21P – 23P – 27P – 29P – 31P – 33P – 35P – 47P

PROBLEMA

UN DISCO DA HOCKEY DI MASSA 0.3 Kg SCORRE SULLA SUPERFICIE ORIZZONTALE PRIVA DI ATTRITO DI UNA PISTA DI GHIACCIO. DUE FORZE AGISCONO SUL DISCO, COME MOSTRATO IN FIGURA. LA FORZA $\vec{F_1}$ HA MODULO 5 N E LA FORZA $\vec{F_2}$ HA MODULO 8 N. DETERMINARE L'ACCELERAZIONE DEL DISCO. DETERMINARE LE COMPONENTI DI UNA TERZA FORZA CHE SE APPLICATA AL DISCO LO MANTERRA' IN EQUILIBRIO.



- $\Sigma F_x = F_{1x} + F_{2x} = F_1 \cdot \cos 20° + F_2 \cos 60° = 5 \cdot 0.940 + 8 \cdot 0.500 = 8.70\ N$
- $\Sigma F_Y = F_{1Y} + F_{2Y} = -F_1 \sin 20° + F_2 \sin 60° = -5 \cdot 0.342 + 8 \cdot 0.866 = 5.22\ N$
- $a_x = \dfrac{\Sigma F_x}{m} = \dfrac{8.70}{0.3} = 29.0\ m/s^2$
- $a_Y = \dfrac{\Sigma F_Y}{m} = \dfrac{5.22}{0.3} = 17.4\ m/s^2$
- $a = |\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_Y^2} = \sqrt{29.0^2 + 17.4^2} = 33.8\ m/s^2$
- $\theta = \operatorname{arctg} \dfrac{a_Y}{a_x} = \operatorname{arctg} \dfrac{17.4}{29.0} = 31.0°$
- Troviamo ora la terza forza $\vec{F_3}$ che mantenga il disco in equilibrio

$$\vec{F_3} = -8.70\,\hat{i} - 5.22\,\hat{j}\ N$$

PROBLEMA 5.1 (Halliday)

UNO STUDENTE (EQUIPAGGIATO DI SCARPONI CHIODATI) SPINGE UNA SLITTA CARICA, LA CUI MASSA m E' DI 240 kg SU UNA DISTANZA d DI 2.3 m, SULLA SUPERFICIE PRIVA DI ATTRITO DI UN LAGO GELATO. CIO' FACENDO EGLI ESERCITA UNA FORZA ORIZZONTALE COSTANTE $\vec{F}$, IL CUI MODULO E' $F = 130$ N.

a) SE LA SLITTA PARTE DALLA CONDIZIONE DI RIPOSO, QUAL'E' LA SUA VELOCITA' FINALE?

b) LO STUDENTE DECIDE DI INVERTIRE IL SENSO DI MARCIA DELLA SLITTA IMPIEGANDO UN TEMPO DI 4.5 s PER RAGGIUNGERE LA MEDESIMA VELOCITA' SCALARE. CON QUALE FORZA COSTANTE DEVE SPINGERE LA SLITTA PER OTTENERE QUESTO RISULTATO?

o———o———o———o

- $a_x = \dfrac{F_x}{m} = \dfrac{130\ N}{240\ kg} = 0.542\ m/s^2$ $\longrightarrow x$
- $V^2 = V_0^2 + 2a(x - x_0)$ $\qquad V_0 = 0\ ;\ x - x_0 = d$

  $V = \sqrt{2ad} = \sqrt{2 \cdot 0.542 \cdot 2.3} = 1.6\ m/s$
- $\vec{a}, \vec{v}, \vec{x}$ sono positivi, invertiamo ora la velocita'
  - $V = V_0 + at$

    $a = \dfrac{V - V_0}{t} = \dfrac{-1.6 - 1.6}{4.5} = -0.711\ m/s^2$
- Ricaviamo ora la forza da applicare per invertire la rotta

$$F_x = m\,a_x = 240 \cdot (-0.711) = -171\ N$$

SE UN TUFFATORE DI 70 Kg DI MASSA SI TUFFA DA UN' ALTEZZA DI 10 m E IL SUO MOVIMENTO VERSO IL BASS[O] SI ARRESTA DOPO 2 S DOPO L'ENTRATA IN ACQUA, QUALE FORZA MEDIA VERSO L'ALTO HA ESERCITATO L'ACQUA SUL TUFFATORE?

o———o———o

CONSIDERIAMO IL TUFFATORE COME UN PUNTO MATERIALE.

- CALCOLIAMO LA SUA VELOCITA' DI ENTRATA NELL' ACQUA

$$v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0) = 0 + 2 \cdot 9.8 \cdot 10 = 196\ m^2/s$$

$$v = 14.0\ m/s$$

- IN ACQUA IL SUO MOTO È RALLENTATO CON UNA ACCELERAZIONE $-a$ (ABBIAMO SCELTO L'ASSE POSITIVO DIRETTO VERSO IL BASSO)

$$v = v_0 - at$$

$$a = \frac{v_0 - v}{t} = \frac{14.0 - 0}{2} = 7\ m/s^2$$

- NELL' ACQUA IL CORPO È SOGGETTO A DUE FORZE, LA SPINTA DELL' ACQUA R E LA FORZA DI GRAVITA', PER CUI:

$$-ma = -R + mg$$

$$\Rightarrow R = mg + ma = m(a+g) = 70 \cdot (7 + 9.8) = 1176\ N$$

LE FORZE FONDAMENTALI

(INTERAZIONI FONDAMENTALI)

- FORZA GRAVITAZIONALE

  DUE CORPI DI MASSA m_1 E m_2 SI ATTRAGGONO CON LA FORZA

  $$|\vec{F}| = G \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2}$$ (legge della gravitazione di Newton

  - E' L'INTERAZIONE DOMINANTE SU SCALA MACROSCOPICA

- FORZA ELETTROMAGNETICA

  DUE CORPI CARICHI IN QUIETE SI ATTRAGGONO (O RESPINGONO

  CON LA FORZA:

  $$|\vec{F}| = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_1 \cdot q_2}{r^2}$$ (legge di Coulomb)

  - FORZA DI LEGAME ELETTRONE NUCLEO
  - TUTTI I LEGAMI CHIMICI SONO DI NATURA ELETTROMAGNETICA
  - TUTTE LE FORZE DI CONTATTO (ATTRITO, TENSIONE, FORZA NORMA. ETC..) SONO MANIFESTAZIONI DELLA FORZA ELETTROMAGNETICA

- FORZA NUCLEARE FORTE

  TIENE LEGATI I PROTONI E I NEUTRONI NEI NUCLEI

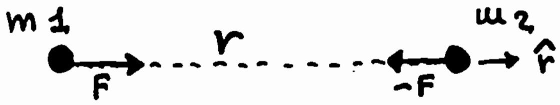
  - HA UN RAGGIO DI INTERAZIONE MOLTO PICCOLO ($\sim 10^{-15}$ m) PER CUI SI MANIFESTA SOLO ALL'INTERNO DEI NUCLEI

- FORZA NUCLEARE DEBOLE

  E' RESPONSABILE DEI DECADIMENTI RADIOATTIVI DI ALCUNI NUCLEI ED E' ALLA BASE DELLE REAZIONI DI FUSIONE NELLE STELLE

  - NON COSTITUISCE ALCUN STATO LEGATO

LEGGE DI GRAVITAZIONE



- DUE CORPI QUALSIASI (TERRA-PENNA, TERRA-LUNA, TAVOLO-PENNA) TENDONO AD ATTRARSI CON UNA FORZA PARI A:

$$|\vec{F}| = G \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2}$$

- G È LA COSTANTE DI GRAVITAZIONE UNIVERSALE

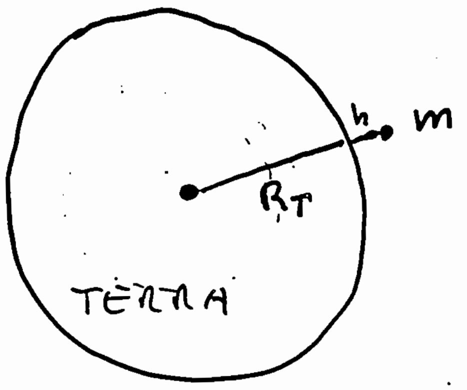
$$G = 6.67 \cdot 10^{-11} \ N \cdot m^2/kg^2$$

- m È LA MASSA GRAVITAZIONALE DI UN CORPO
- r È LA DISTANZA TRA I DUE CORPI
- LA FORZA È DIRETTA LUNGO LA RETTA CONGIUNGENTE I DUE CORP ED È ATTRATTIVA

$$\vec{F} = - G \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2} \hat{r}$$

- LA MASSA GRAVITAZIONALE E LA MASSA INERZIALE ($\vec{F} = m\vec{a}$) SONO DUE COSE CONCETTUALMENTE DISTINTE.
  SPERIMENTALMENTE SI È TROVATO CHE SONO LA STESSA COSA, AD ESEMPIO L'INDIPENDENZA DEL PERIODO DI OSCILLAZIONE DI UN PENDOLO DALLA MASSA CHE OSCILLA.

FORZA DI GRAVITA' IN PROSSIMITA' DELLA SUPERFICIE TERRESTRE



$$G = 6.67 \cdot 10^{-11} \frac{N \cdot m^2}{kg^2}$$

$$R_T = 6.37 \cdot 10^6 \, m$$

$$M_T = 5.98 \cdot 10^{24} \, Kg$$

$$|\vec{F}| = G \frac{m_1 m_2}{r^2}$$

- DATO CHE LA FORZA E' INVERSAMENTE PROPORZIONALE AL QUADRATO DELLA DISTANZA, SI PUO' PENSARE CHE TUTTA LA MASSA DELLA TERRA SIA CONCENTRATA AL CENTRO DELLA TERRA.
(legge di Gauss)

$$|\vec{F}| = G \frac{M_T \, m}{|R_T + h|^2} \simeq G \frac{M_T}{R_T^2} \cdot m$$

$$G \frac{M_T}{R_T^2} = g = 6.67 \cdot 10^{-11} \frac{5.98 \cdot 10^{24}}{(6.37 \cdot 10^6)^2} = 9.83 \, m/s^2$$

N.B. OCCORRE CONSIDERARE ANCHE LA FORZA CENTRIFUGA DOVUTA ALLA ROTAZIONE TERRESTRE. $m \omega^2 R$

- ALL'EQUATORE L'EFFETTO E' MASSIMO
$\omega^2 R_T = 0.03 \, m/s^2$
- QUESTO VALORE VA SOTTRATTO A $9.83 \, m/s^2$

FORZA PESO

- IL PESO DI UN CORPO E' LA FORZA CHE LO ATTRAE DIRETTAMENTE VERSO UN CORPO ASTRONOMICO VICINO. NEL NOSTRO CASO E' LA TERRA.

- NEL CASO IN CUI IL CORPO SIA VICINO ALLA SUPERFICIE TERRESTRE SI HA:

$$|\vec{P}| = mg \qquad g = 9.80\ m/s^2$$

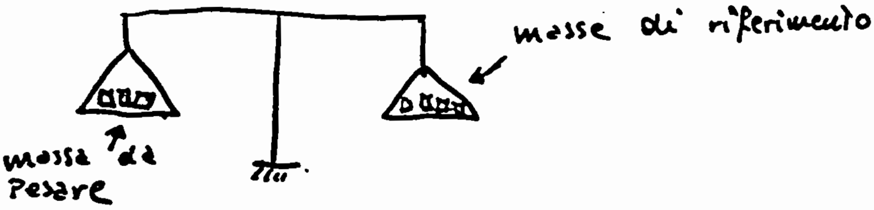
OPPURE

$$\vec{P} = -mg\,\hat{j} \qquad \text{oppure} \qquad \vec{P} = m\vec{g}$$

- LA MASSA DI UN CORPO E' DEFINITO IN MANIERA UNIVOCA, MENTRE IL PESO NON LO E'. IL VOSTRO PESO SULLA LUNA SARA' DIVERSO, MENTRE LA VOSTRA MASSA NON LO E'.

- IL PESO SI MISURA IN UN SISTEMA DI RIFERIMENTO INERZIAL

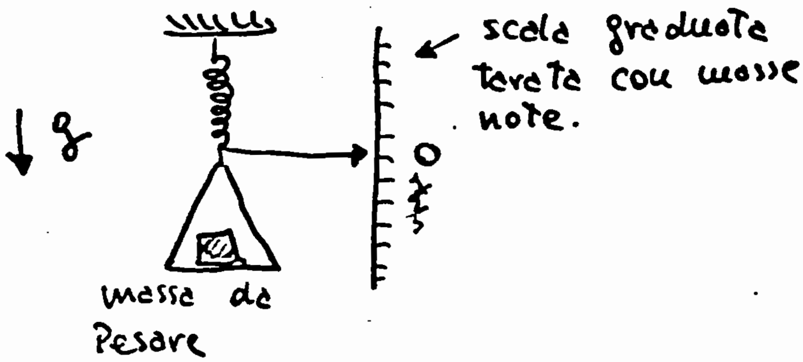
- MISURA DELLA MASSA CON UNA BILANCIA A BRACCI



$$\Rightarrow P = mg$$

$$m_x \cancel{g} = m_n \cdot \cancel{g}$$

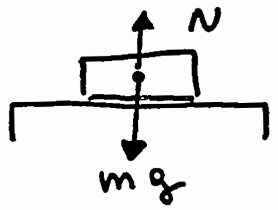
- BILANCIA A MOLLA (DINAMOMETRO)



FORZE DI CONTATTO

- ## FORZA NORMALE

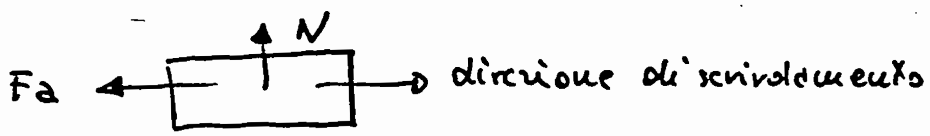
QUANDO UN CORPO COMPRIME UNA SUPERFICIE RICEVE UNA FORZA PERPENDICOLARE ALLA SUPERFICIE STESSA.



$$N = mg$$

- ## ATTRITO

UN CORPO CHE SCIVOLA SU UNA SUPERFICIE VIENE OSTACOLATO DALLA RESISTENZA DELLA SUPERFICIE



$$F_a = \mu_D \cdot N = \mu_D\, m g$$

μ_D = COEFFICIENTE DI ATTRITO DINAMICO

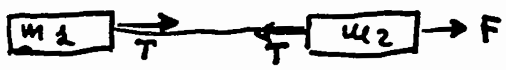
- ## TENSIONE

QUANDO UN FILO INESTENSIBILE E' FISSATO A UN CORPO E TIRATO SI DICE CHE E' SOTTO TENSIONE.

ESSO ESERCITA SUL CORPO UNA TRAZIONE T.

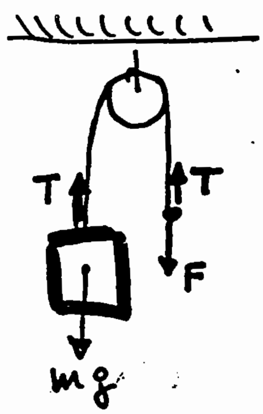
IL FILO E' IN GRADO DI TRASMETTERE UNA FORZA.

N.B. SE SI SUPPONE IL FILO PRIVO DI MASSA, LA TENSIONE E' LA STESSA IN TUTTI I PUNTI

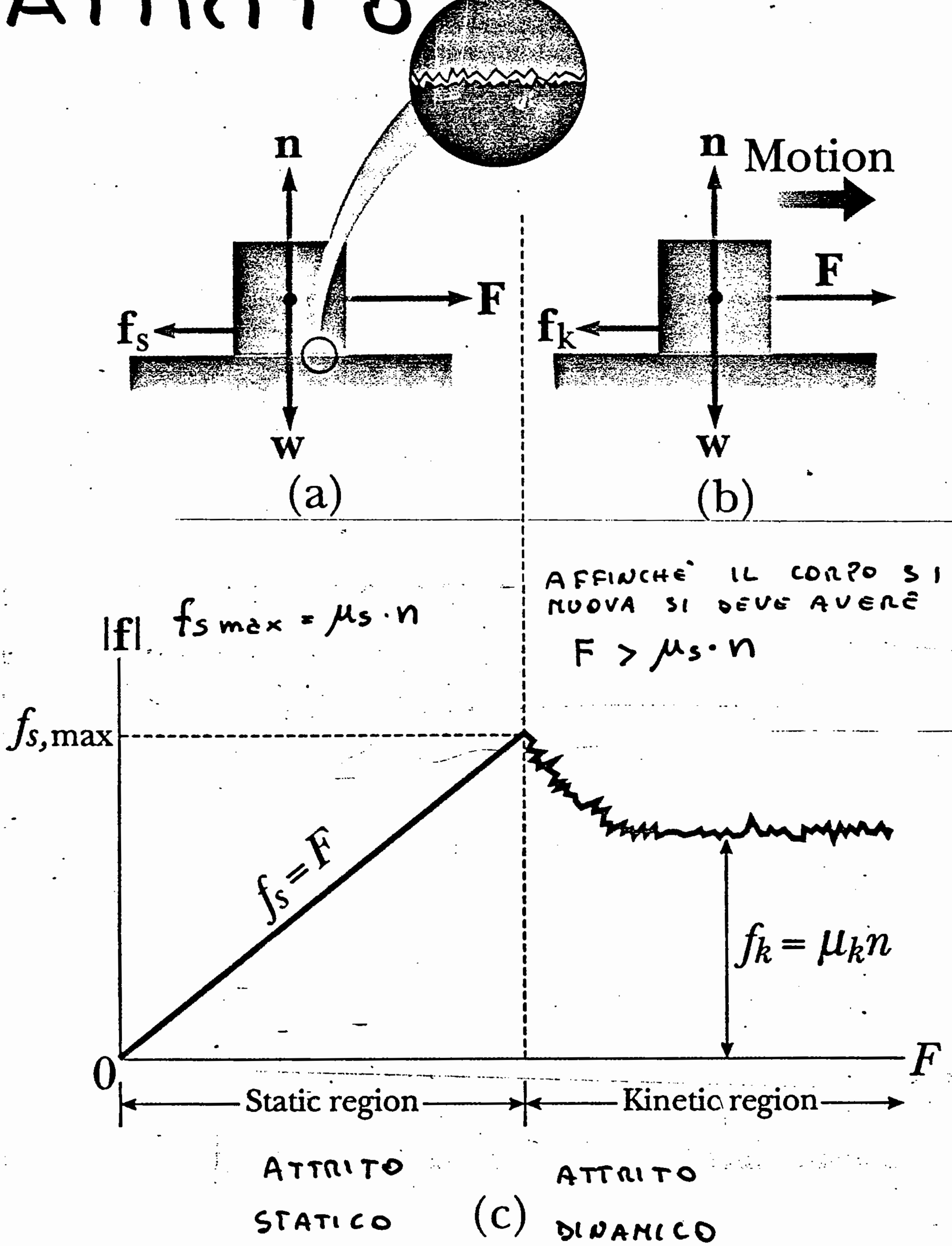


— CARRUCOLA

LE CARRUCOLE SONO IN GRADO DI CAMBIARE LE DIREZIONI DELLE FORZE



ATTRITO



$f_{s\,max} = \mu_s \cdot n$

AFFINCHÉ IL CORPO SI MUOVA SI DEVE AVERE

$F > \mu_s \cdot n$

ATTRITO STATICO

ATTRITO DINAMICO

UN CORPO PER MUOVERSI DEVE ROMPERE DELLE MICRO SALDATURE

Figura 5.1 ☞ pag. 115

Serway, *Principi di Fisica*

L'ATTRITO DIPENDE DALLE DUE SUPERFICI A CONTATTO

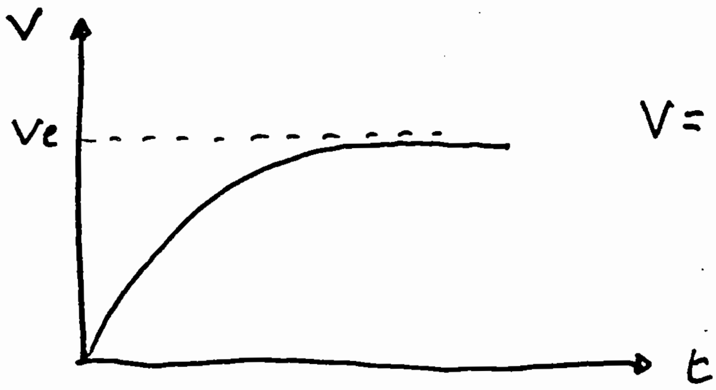
RESISTENZA DEL MEZZO

- UN CORPO CHE SI MUOVE IN UN MEZZO VISCOSO SUBISCE UNA RESISTENZA ESPRIMIBILE COME:

$$\vec{R} = -b\vec{v}$$

- L'EQUAZIONE DEL MOTO DI UN CORPO IN CADUTA LIBERA

$$mg - bv = ma \qquad \text{eq. differenziale}$$



$$V = \frac{mg}{b}\left(1 - e^{-\frac{bt}{m}}\right)$$

$$V_e = \frac{mg}{b}$$

$e = 2.73$

- AD ALTE VELOCITA' LA RESISTENZA E' PROPORZIONALE A v^2 NELL'ARIA SI PUO' SCRIVERE (FORMULA EMPIRICA)

$$D = \frac{1}{2} C \rho A v^2$$

C = COEFFICIENTE AERODINAMICO

ρ = DENSITA' DELL'ARIA

A = AREA EFFICACE DELLA SEZIONE TRASVERSALE

$$mg - \frac{1}{2} C \rho A v^2 = ma$$

$$mg - \frac{1}{2} C \rho A v_e^2 = 0$$

$$\Rightarrow \quad V_e = \sqrt{\frac{2mg}{C\rho A}}$$

- AFFINCHÉ UN CORPO PUNTIFORME (NON CONSIDERIAMO LE ROTAZIONI) RIMANGA IN EQUILIBRIO (OVVERO IN QUIETE IN UN OPPORTUNO SISTEMA DI RIFERIMENTO) SI DEVE AVERE:

$$\sum_{1}^{N} {}_i \vec{F}_i = 0 \quad ; \quad \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \cdots \vec{F}_i \cdots + \vec{F}_N = 0$$

CIOÈ LA SOMMA VETTORIALE DI TUTTE LE FORZE AGENTI SUL CORPO DEVE ESSERE NULLA

- SE LUNGO UNA DATA DIREZIONE LA SOMMA VETTORIALE È DIVERSA DA ZERO, IL CORPO INIZIERÀ AD ACCELERARE LUNGO QUELLA DATA DIREZIONE:

$$\sum_{1}^{N} {}_i F_x^i = m a_x \Rightarrow a_x = \frac{1}{m}\left(\sum_{1}^{N} {}_i F_x^i\right)$$

(DALLA CONOSCENZA DI a SI RISALE ALLA LEGGE DEL MOTO)

N. B. LA RISOLUZIONE DI GRAN PARTE DEGLI ESERCIZI DI DINAMICA CONSISTE NELL'APPLICAZIONE DI QUESTO PRINCIPIO

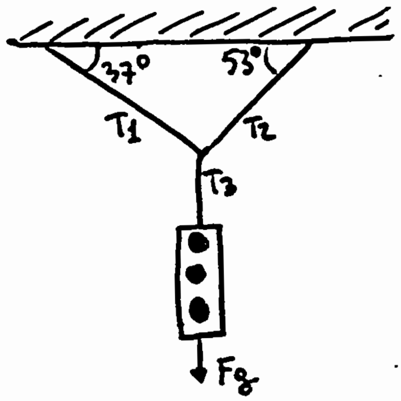
N. B. IL MOTO LUNGO I TRE ASSI CARTESIANI PUÒ ESSERE TRATTATO SEPARATAMENTE, CIOÈ IL CORPO PUÒ AVERE CONTEMPORANEAMENTE $a_x \neq a_y \neq a_z$.

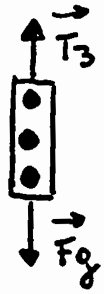
LA SCELTA DEI TRE ASSI CARTESIANI È LIBERA E VA FATTA CERCANDO DI SEMPLIFICARE LA SOLUZIONE DEL PROBLEMA, AD ESEMPIO FACENDO IN MODO CHE

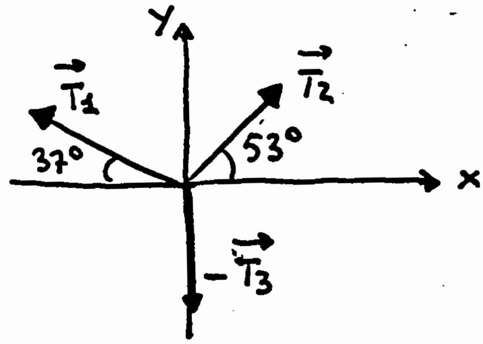
$$a_x \neq 0 \; ; \; a_y = 0 \; ; \; a_z = 0$$

SERWAY : ESEMPIO 4-2
SEMAFORO SOSPESO

UN SEMAFORO DI PESO 125 N PENDE DA UN CAVO LEGATO A DUE ALTRI CAVI TRATTENUTI DA UN SUPPORTO COME IN FIGURA. DETERMINARE LA TENSIONE DEI TRE CAVI







- AFFINCHÉ IL SEMAFORO NON CADA DOBBIAMO AVERE:

$$\vec{F}_g + \vec{T}_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{T}_3 = -\vec{F}_g \quad \Rightarrow |\vec{T}_3| = |\vec{F}_g| = \underline{125\ N}$$

- INOLTRE LA SOMMA VETTORIALE DELLE TRE TENSIONI DEVE ESSERE NULLA

$$\vec{T}_1 + \vec{T}_2 + (-\vec{T}_3) = 0$$

PROIETTIAMO SUI DUE ASSI:

$$\begin{cases} -|\vec{T}_1|\cos 37° + |\vec{T}_2|\cos 53° = 0 \\ |\vec{T}_1|\sin 37° + |\vec{T}_2|\sin 53° - |\vec{T}_3| = 0 \end{cases}$$

- DALLA PRIMA ABBIAMO:

$$|\vec{T}_2| = |\vec{T}_1| \frac{\cos 37°}{\cos 53°} = 1.33 \cdot |\vec{T}_1|$$

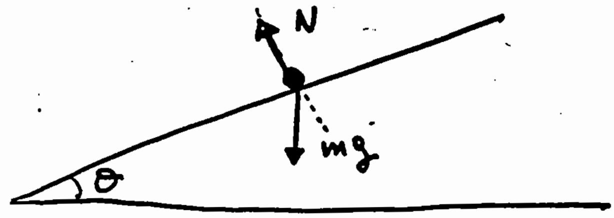
$$\Rightarrow |T_1|\sin 37° + (1.33 \cdot |\vec{T}_1|) \cdot \sin 53° - 125 = 0$$

$$|\vec{T}_1| = \frac{125}{\sin 37° + 1.33 \cdot \sin 53°} = \underline{75.1}\ N$$

$$|\vec{T}_2| = 1.33 \cdot |\vec{T}_1| = 1.33 \cdot 75.1 = \underline{99.9}\ N$$

CASSA SU UN PIANO INCLINATO LISCIO

UNA CASSA DI MASSA m È POSTA SU UN PIANO INCLINATO LISCIO FORMANTE UN ANGOLO θ CON L'ORIZZONTALE. TROVARE L'ACCELERAZIONE DELLA CASSA DOPO CHE VIENE ABBANDONATA.

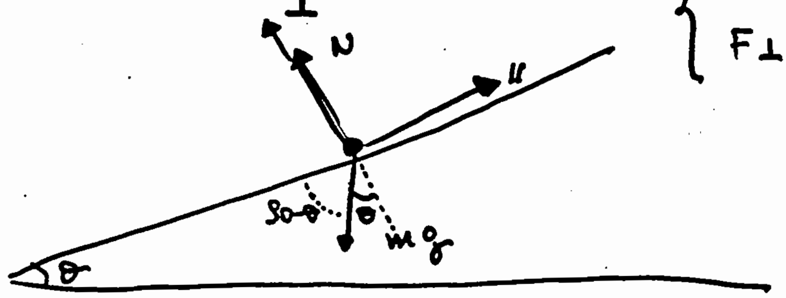


$\downarrow g$

[trattiamo la cassa come un punto materiale]

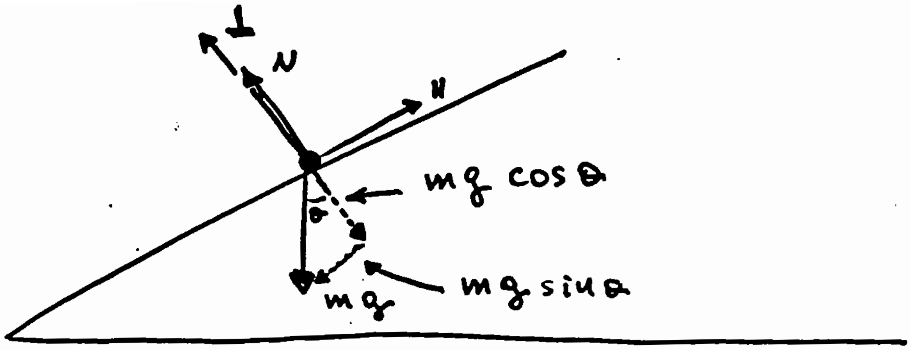
- SULLA CASSA AGISCONO SOLO DUE FORZE:
  - LA FORZA PESO $m\vec{g}$ DIRETTA VERSO IL BASSO
  - LA REAZIONE $\vec{N}$ DEL PIANO, ORTOGONALE AL PIANO STESSO, CHE IMPEDISCE AL CORPO DI SPROFONDARE NEL PIANO STESSO.
  - IL PIANO È LISCIO QUINDI NON VI È FORZA D'ATTRITO

- PROIETTIAMO TUTTE LE FORZE LUNGO UN ASSE PARALLELO AL PIANO INCLINATO ED UNO ORTOGONALE AL PIANO



$$\begin{cases} F_{\parallel} = -mg\sin\theta \\ F_{\perp} = N - mg\cos\theta \end{cases}$$

N. B. PER $\theta = 0$ ABBIAMO $F_{\parallel} = 0$ E $F_{\perp} = N - mg$



- LE PROIEZIONI DELLE FORZE SONO:

$$\begin{cases} F_\parallel = -mg\sin\theta \\ F_\perp = N - mg\cos\theta \end{cases}$$

- POSSIAMO APPLICARE ORA LA LEGGE DI NEWTON $\vec{F} = m\vec{a}$

$$\begin{cases} F_\parallel = m a_\parallel \Rightarrow -mg\sin\theta = m a_\parallel \\ F_\perp = m a_\perp \Rightarrow N - mg\cos\theta = m a_\perp \end{cases}$$

- SAPPIAMO CHE LA CASSA NON SPROFONDA DENTRO IL PIANO INCLINATO, QUINDI $a_\perp = 0$

[LA CASSA ERA FERMA E CONTINUA A RIMANERE FERMA LUNGO L'ASSE ⊥]

$$a_\perp = 0 \Rightarrow N - mg\cos\theta = 0 \Rightarrow \boxed{N = mg\cos\theta}$$

- LA REAZIONE NORMALE DEL PIANO VALE:

$$\boxed{N = mg\cos\theta}$$

- LUNGO L'ASSE PARALLELO AL PIANO LA CASSA SI MUOVE ED HA ACCELERAZIONE PARI A:

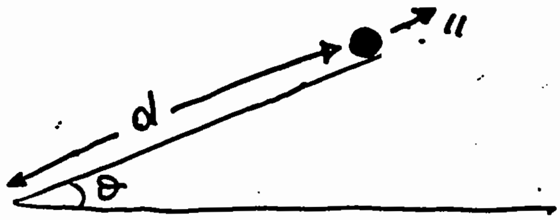
$$-\cancel{m}g\sin\theta = \cancel{m}a_\parallel$$ [le masse si semplificano]

$$\boxed{a_\parallel = -g\sin\theta}$$

N.B. IL SEGNO − DIPENDE DALL'ORIENTAZIONE SCELTA PER L'ASSE ∥

SERWAY ESEMPIO 4-3 [... CONTINUA]

SUPPONIAMO CHE LA CASSA VENGA ABBANDONATA DA FERMA ALLA SOMMITA' E LA DISTANZA DALLA CASSA AL FONDO SIA d. QUANTO IMPIEGA LA CASSA A RAGGIUNGERE IL FONDO E CON QUALE VELOCITA' VI ARRIVA?



- L'ACCELERAZIONE LUNGO IL PIANO INCLINATO E' COSTANTE E PARI A $a_{\parallel} = -g \sin\theta$

UTILIZZIAMO QUINDI LE FORMULE DEL MOTO UNIFORMEMENTE ACCELERATO

$$x - x_0 = v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$$

- NEL NOSTRO CASO ABBIAMO:

$v_0 = 0$; $x - x_0 = -d$ [abbiamo orientato l'asse in verso opposto al moto]

$$-d = -\frac{1}{2} g \sin\theta \, t^2 \Rightarrow \boxed{d = \frac{1}{2} g \sin\theta \, t^2}$$

- RICAVIAMO IL TEMPO t

$$t^2 = \frac{2d}{g \sin\theta} \Rightarrow \boxed{t = \sqrt{\frac{2d}{g\sin\theta}}}$$

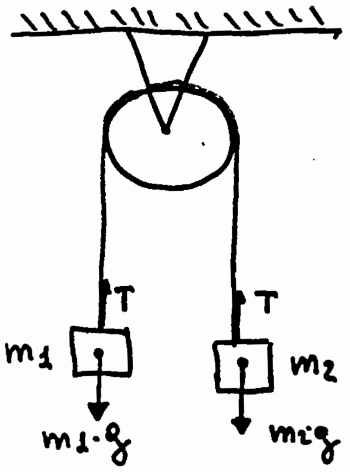
- PER LA VELOCITA' ABBIAMO:

$$v = at \Rightarrow -g\sin\theta \cdot \sqrt{\frac{2d}{g\sin\theta}} = -\sqrt{(g\sin\theta)^2 \cdot \frac{2d}{g\sin\theta}}$$

$$\Rightarrow \boxed{v = -\sqrt{2gd\sin\theta}}$$

N.B. la velocità è in verso opposto all'orientazione dell'asse

SERWAY : ESEMPIO 4-4
LA MACCHINA DI ATWOOD (CARRUCOLA)

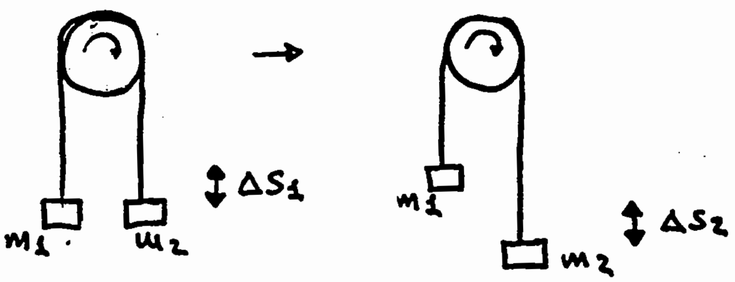


- IPOTESI: LA CORDA È INESTENSIBILE ED HA MASSA TRASCURABILE (RISPETTO A m_1 E m_2)

  $\Rightarrow$ LA TENSIONE T È LA STESSA LUNGO TUTTA LA CORDA

- IPOTESI: ANCHE LA CARRUCOLA È PRIVA DI MASSA (altrimenti dovremmo introdurre il momento d'inerzia)

- I DUE CORPI SONO COLLEGATI DALLA FUNE (INESTENSIBILE) QUINDI GLI SPOSTAMENTI SONO UGUALI

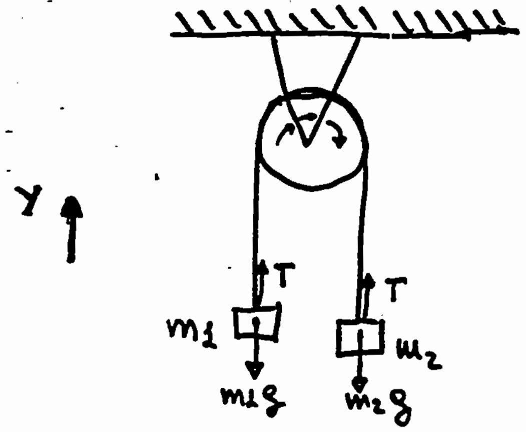


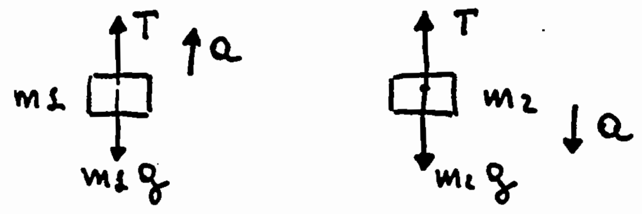
$$|\Delta S_1| = |\Delta S_2|$$
$$\Downarrow$$
$$|V_1| = |V_2|$$
$$\Downarrow$$
$$|a_1| = |a_2| = a$$

I DUE CORPI HANNO LA STESSA ACCELERAZIONE a DIRETTA IN VERSO OPPOSTO

$a_1 = a$; $a_2 = -a$

MACCHINA DI ATWOOD [...CONTINUA]





- SCRIVIAMO LA LEGGE DI NEWTON SEPARATAMENTE PER I DUE CORPI

$$\begin{cases} T - m_1 \cdot g = m_1 \cdot a_1 = m_1 a \\ T - m_2 g = m_2 a_2 = -m_2 a \end{cases} \qquad [a_1 = a \ ; \ a_2 = -a]$$

- SOTTRAIAMO LA SECONDA EQUAZIONE DALLA PRIMA PER TROVARE L'ACCELERAZIONE

- $(T - m_1 g) - (T - m_2 g) = m_1 a - (-m_2 a)$
- $m_2 g - m_1 g = m_1 a + m_2 a$

$$g(m_2 - m_1) = a(m_1 + m_2)$$

$$\boxed{a = \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} g}$$

- $m_2 = m_1 \Rightarrow a = 0$ I DUE CORPI RIMANGONO IN EQUILIBRIO. NON SI MUOVONO
- $m_2 > m_1 \Rightarrow a > 0$ m_1 VA VERSO L'ALTO È m_2 SI ABBASSA
- $m_2 < m_1 \Rightarrow a < 0 \Rightarrow a_1 < 0$ IL CORPO m_1 SI ABBASSA E m_2 SI ALZA

MACCHINA DI ATWOOD [... CONTINUA]

- CALCOLIAMO LA TENSIONE DELLA CORDA

$$\begin{cases} T - m_1 g = m_1 a \\ T - m_2 g = -m_2 a \end{cases} \qquad a = \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} g$$

INSERIAMO a NELLA PRIMA EQUAZIONE

$$T = m_1 g + m_1 a = m_1 g + m_1 \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} g =$$

$$= m_1 g + \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} g - \frac{m_1^2}{m_1 + m_2} g =$$

$$= g \left[\frac{m_1 (m_1 + m_2) + m_1 m_2 - m_1^2}{m_1 + m_2} \right] =$$

$$= g \left[\frac{\cancel{m_1^2} + m_1 m_2 + m_1 m_2 - \cancel{m_1^2}}{m_1 + m_2} \right] =$$

$$= \boxed{\frac{2 m_1 m_2}{m_1 + m_2} g}$$

- SE LE DUE MASSE SONO UGUALI SI HA:

$$T = \frac{2 m^2}{m + m} g = \frac{\cancel{2} m^{\cancel{2}}}{\cancel{2} \cancel{m}} g = \underline{m g}$$

PIANO ORIZZONTALE + CARRUCOLA

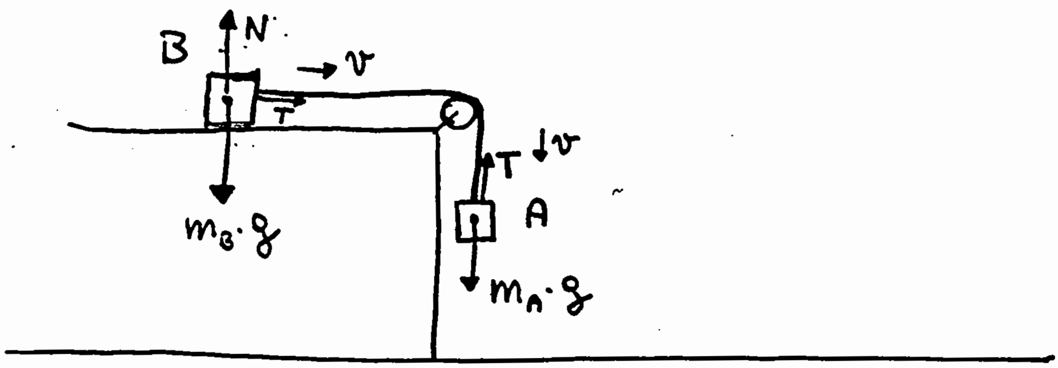
UN BLOCCO DI 6.00 kg POGGIA SU UN TAVOLO LISCIO. È COLLEGATO DA UN FILO DI MASSA TRASCURABILE A UN BLOCCO DI 2.00 kg, SOSPESO OLTRE IL BORDO DEL TAVOLO. SI TROVINO:

a) L'ACCELERAZIONE DI CIASCUN BLOCCO

b) LA TENSIONE NEL FILO DI COLLEGAMENTO

c) LA POSIZIONE DELLA MASSA A DOPO 0.400 s

d) LA VELOCITÀ DELLA MASSA A ALL'ISTANTE 0.400 s



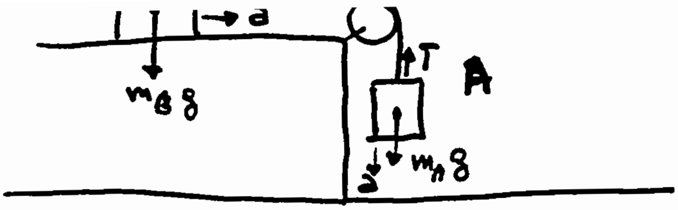
- NELLE NOSTRE APPROSSIMAZIONI (MASSA NULLA) LA CARRUCOLA CAMBIA SOLTANTO LE DIREZIONI DELLE FORZE

- IL FILO È INESTENSIBILE (NON È UNA MOLLA), QUINDI GLI SPOSTAMENTI DELLA MASSA A SONO UGUALI A QUELLI DELLA MASSA B

$$|\Delta \vec{S}_A| = |\Delta \vec{S}_B|$$

- QUINDI ANCHE IL MODULO DELL'ACCELERAZIONE DEI DUE BLOCCHI È LO STESSO

$$|\vec{a}_A| = |\vec{a}_B| = a$$

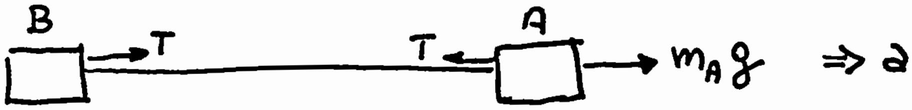


- IL PIANO È LISCIO, QUINDI NON VI SONO FORZE DI ATTRITO.

- PER IL CORPO B, SULL'ASSE VERTICALE, SI HA:

$$\boxed{m_B \cdot g = N}$$ (il corpo non sprofonda nel piano)

- DATO CHE LA CARRUCOLA CAMBIA SOLO LA DIREZIONE DELLE FORZE, MA IL MOTO AVVIENE LUNGO LA DIREZION DEL FILO, SI PUO' CONSIDERARE IL FILO COME RETTILI



- IL PROBLEMA È DIVENTATO QUINDI UN PROBLEMA UNIDIMENSIONALE

- SCRIVIAMO LA LEGGE DI NEWTON PER I DUE CORPI, TENENDO PRESENTE CHE LE ACCELERAZIONI SONO LE STESSE

$$\begin{cases} T = m_B \cdot a \\ m_A \cdot g - T = m_A \cdot a \end{cases}$$

due equazioni e due incognite
$\Rightarrow$ IL SISTEMA SI PUO' RISOLVERE

N.B. SE VI FOSSE ATTRITO TRA IL CORPO B E IL PIANO, PER IL CORPO B AVREMMO AVUTO:

$$T - F_a = m_B \cdot a \Rightarrow T - \mu_D \cdot N = m_B \cdot a \Rightarrow T - \mu_D \cdot m_B \cdot g = m_B \cdot a$$

- RISOLVIAMO IL SISTEMA

$$m_A g - m_B \cdot a = m_A \cdot a \quad \Rightarrow \quad m_A \cdot g = (m_A + m_B)\, a$$

$$\Rightarrow \boxed{a = g\,\frac{m_A}{m_A + m_B}} = 9.80\,\frac{2.00}{6.00+2.00} = \underline{2.45\ m/s^2}$$

- TROVIAMO LA TENSIONE DELLA CORDA

$$T = m_B \cdot a = 6.00 * 2.45 = \underline{14.7\ N}$$

- PER LO SPOSTAMENTO DELLA MASSA A ABBIAMO:

$$\Delta S = V_0 t + \frac{1}{2} a t^2 = \frac{1}{2} * 2.45 * 0.4^2 = 0.196\ m$$

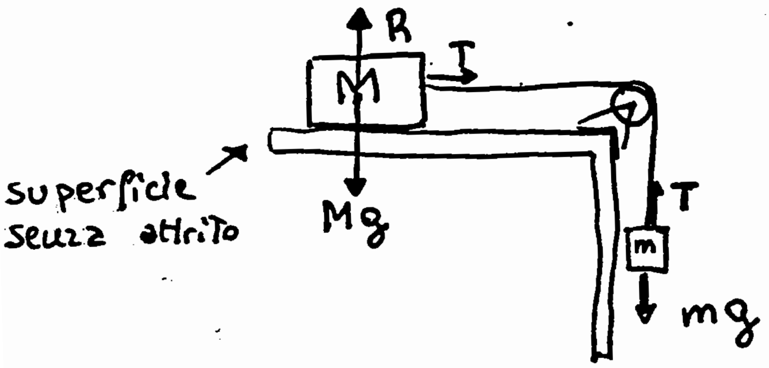
CIOE' IL BLOCCO SI ABBASSA DI 19.6 cm DOPO 0.4 s

- PER LA VELOCITA' SI HA:

$$v = V_0 + a t = 2.45 \cdot 0.4 = 0.980\ m/s$$

CIOE' LA VELOCITA' E' DIRETTA VERSO IL BASSO ED E' PARI A 0.980 m/s

PROBLEMA 5-5



TROVARE L'ACCELERAZIONE $\vec{a}$ DEL SISTEMA

$\downarrow$ (DIREZIONE POSITIVA)

- LA CARRUCOLA CAMBIA LA DIREZIONE DELLE FORZE MA NON IL MODULO

- LA FUNE È INESTENSIBILE.
  LA TENSIONE T DELLA CORDA SI TRASMETTE DA PUNTO A PUNTO DELLA CORDA

- LA REAZIONE R DEL TAVOLO COMPENSA LA FORZA $M\vec{g}$

- IL MOTO AVVIENE LUNGO LA DIREZIONE DELLA CORDA.
  È UN MOTO UNIDIMENSIONALE.

- $mg - T = ma \quad ; \quad T = Ma$
- L'ACCELERAZIONE a DI M E m È LA STESSA PERCHÉ LA FUNE È INESTENSIBILE
- SOMMIAMO LE DUE EQUAZIONI

$$mg - T + T = ma + Ma$$
$$mg = (m+M)\,a$$

$$\Rightarrow \quad a = \frac{m}{m+M}\, g$$

- $T = Ma = \dfrac{M \cdot m}{m+M}\, g = \dfrac{mg}{1 + \frac{m}{M}}$

- CHE SUCCEDE PER $M \gg m$?

ESERCIZI CONSIGLIATI

Attrito – piano inclinato – carrucole – etc…

- Serway (3° Edizione) – Cap. 4
  - 25 – 29 – 31 – 33
- Serway (3° Edizione) – Cap. 5
  - 1 – 3 – 5 – 7 – 9 – 11 – 31 – 33 - 41 -
- Halliday (5° Edizione) – Cap. 5
  - 25P – 43P – 49P
- Halliday (5° Edizione) – Cap. 6
  - 1E – 3E – 5E – 7E – 9P – 13P – 15P – 19P – 21P – 23P

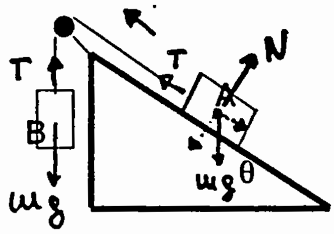
ESERCIZIO PIANO INCLINATO

) Due blocchi uguali di massa M sono connessi da una corda di massa trascurabile. Uno di essi è posto su di un piano inclinato e l'altro sospeso verticalmente tramite una carrucola (vedi figura). 1A

a) Se il piano inclinato è liscio, il blocco A sale o scende? giustificare la risposta.

b) Se l'angolo di inclinazione del piano è θ = 30 gradi e il piano è scabro, quale deve essere il valore del coefficiente di attrito dinamico affinché i blocchi si muovano con velocità costante ?

(7 punti)



$$\begin{cases} Mg - T = Ma & [\text{corpo B}] \\ T - Mg\sin\theta = Ma & [\text{corpo A}] \end{cases}$$

SOMMIAMO LE DUE EQUAZIONI:

$$Mg(1-\sin\theta) = 2Ma$$

$$a = \frac{g(1-\sin\theta)}{2} > 0 \Rightarrow \text{IL CORPO SALE}$$

CON ATTRITO

$$\begin{cases} Mg - T = Ma = 0 \Rightarrow T = Mg \\ T - Mg\sin\theta - \mu M g \cos\theta = Ma = 0 \end{cases}$$ [velocità costante

$$Mg - Mg\sin\theta - \mu Mg\cos\theta = 0$$

$$1 - \sin\theta - \mu\cos\theta = 0$$

$$\mu = \frac{1-\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{1-0.5}{\sqrt{3}/2} = 0.577$$

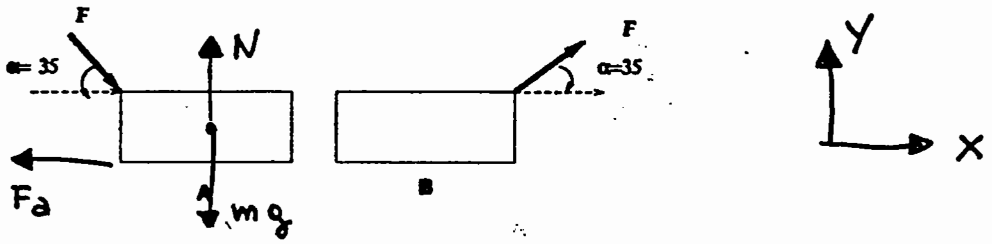
Esercizio 1 (8 punti)

Un blocco di 225 N deve essere fatto muovere su un pavimento scabro a velocità costante. Il coefficiente di attrito dinamico è $\mu_d =$ 0.30. Viene applicata una forza lungo una direzione che forma un angolo di 35° con l'orizzontale.

a) Quanto vale la forza se si spinge verso il blocco? (figura A)

b) Quanto vale invece se si tira verso l'alto? (figura B)

(Risultato: a) F=104.3 N ; b) F=68.1 N)



CASO A

PROIETTIAMO LE FORZE SULL'ASSE X E SULL'ASSE Y

$$\begin{cases} F_x = F\cos\alpha - F_a = m a_x = 0 & \text{(si muove di velocità costante)} \\ F_y = N - mg - F\sin\alpha = m a_y = 0 & \text{(il blocco non si muove lungo Y)} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad N = mg + F\sin\alpha \quad ; \quad F_a = \mu_d \cdot N$$

$$F_a = F\cos\alpha = \mu_d\,(mg + F\sin\alpha)$$

RISOLVENDO RISPETTO A F SI TROVA

$$F = \frac{\mu_d \cdot mg}{\cos\alpha - \mu_d \sin\alpha} = \frac{0.30 \cdot 225}{\cos 35° - 0.30 \cdot \sin 35°} = \underline{104.3\ N}$$

CASO B

NEL CASO B CAMBIA IL SEGNO DELLA PROIEZIONE DI F LUNGO Y

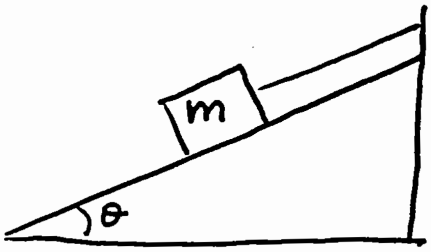
$$\begin{cases} F_x = F\cos\alpha - F_a = 0 \\ F_y = N - mg + F\sin\alpha = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad N = mg - F\sin\alpha$$

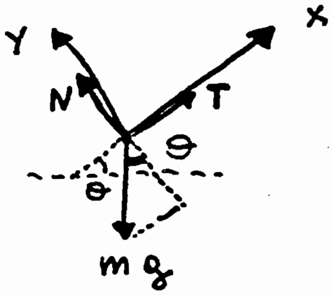
QUINDI ANALOGAMENTE SI TROVA

$$F = \frac{\mu_d \cdot mg}{\cos\alpha + \mu_d \sin\alpha} = \frac{0.30 \cdot 225}{\cos 35° + 0.30\ \sin 35°} = \underline{68.1\ N}$$

PROBLEMA 5-8

LA FIGURA MOSTRA UN BLOCCO DI MASSA $m = 15$ Kg TRATTENUTO DA UNA FUNE SU UN PIANO LISCIO INCLINATO. QUALE SARA' LA TENSIONE DELLA FUNE SE $\theta = 27°$? QUALE FORZA ESERCITA IL PIANO SUL BLOCCO?





- IN CONDIZIONE DI EQUILIBRIO LA SOMMA DELLE FORZE CHE AGISCONO SUL BLOCCO DI MASSA m DEVE ESSERE NULLA

$$\vec{T} + \vec{N} + m\vec{g} = 0$$

- PROIETTIAMO LE FORZE SU UN ASSE PARALLELO AL PIANO E PERPENDICOLARE AL PIANO

$$T - mg \sin\theta = 0 \qquad \text{componente } X$$
$$N - mg \cos\theta = 0 \qquad \text{componente } Y$$

$$\rightarrow \quad T = mg \sin\theta = 15 \times 9.8 \times \sin 27° = 67 \text{ N}$$

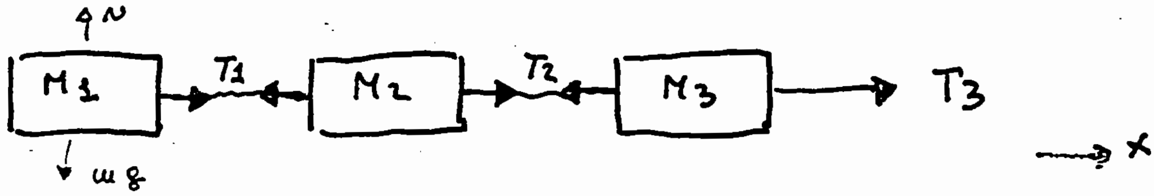
$$N = mg \cos\theta = 15 \times 9.8 \times \cos 27° = 131 \text{ N}$$

DINAMICA

TRE BLOCCHI SONO COLLEGATI COME MOSTRATO IN FIGURA E TRASCINATI SU UN PIANO ORIZZONTALE PRIVO DI ATTRITO DA UNA FORZA $T_3 = 6.5\ N$.

SE $M_1 = 1.2\ Kg$, $m_2 = 2.4\ Kg$ e $m_3 = 3.1\ Kg$, CALCOLARE:

a) L'ACCELERAZIONE DEL SISTEMA e B) LE TENSIONI T_1 e T_2



- LEGGE DI NEWTON PER I TRE CORPI:

$$\begin{cases} T_3 - T_2 = M_3\, a \\ T_2 - T_1 = M_2\, a \\ T_1 = M_1\, a \end{cases} \qquad \Rightarrow T_3 = T_1\left(1 + \frac{m_3 + m_2}{m_1}\right) \qquad \Rightarrow a = \frac{T_1}{M_1}$$

- RISOLVENDO IL SISTEMA

$$a = \frac{T_3}{M_1 + M_2 + M_3} = \frac{6.5}{6.7} = 0.97\ m/s^2$$

$$T_1 = a \cdot M_1 = T_3 \frac{M_1}{M_1 + M_2 + M_3} = 6.5\ \frac{1.2}{6.7} = 1.16\ N$$

$$T_2 = (m_1 + m_2)\, a = T_3 \frac{M_1 + M_2}{M_1 + M_2 + M_3} = 6.5\ \frac{3.6}{6.7} = 3.49\ N$$

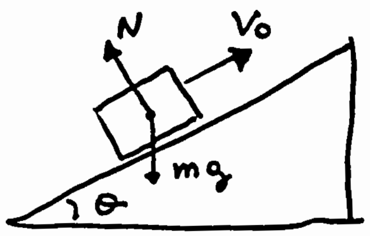
N.B.

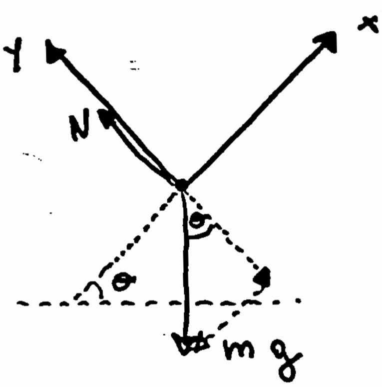
L'ACCELERAZIONE E' LA STESSA CHE SI AVREBBE CON UN CORPO SOLO DI MASSA $M_1 + M_2 + M_3$

- LE TENSIONI DIPENDONO DALLA MASSA CHE VIENE TRASCINATA

PROBLEMA

UN BLOCCO SU DI UN PIANO INCLINATO LISCIO CON INCLINAZIONE DI 20° POSSIEDE UNA VELOCITA' INIZIALE DI 5 m/s. DI QUANTO SCIVOLA IL BLOCCO LUNGO IL PIANO IN SALITA PRIMA DI ARRESTARSI ? 3.73 m





- SCOMPONIAMO LA FORZA DI GRAVITA' IN DUE COMPONENTI, UNA LUNGO IL PIANO ED UNA NORMALE AL PIANO

$$F_x = -mg\sin\theta$$

$$F_y = N - mg\cos\theta = 0 \Rightarrow N = mg\cos\theta$$

- IL MOTO AVVIENE SOLO LUNGO L'ASSE X CON ACCELERAZIONE a

$$a = \frac{F_x}{m} = -g\sin\theta = -9.8\sin 20° = -3.35\ m/s^2$$

- IL CORPO PERCORRERA' UNO SPAZIO UGUALE A :

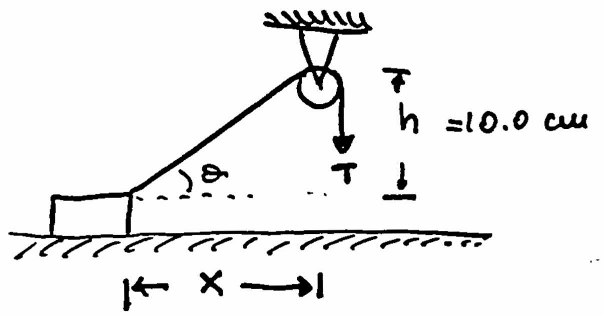
$$V^2 = V_0^2 + 2a(x - x_0)$$

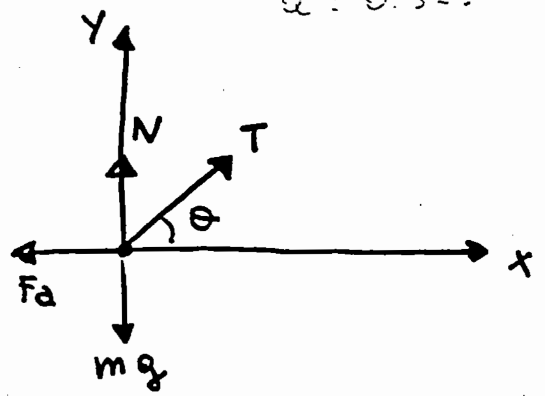
$$x - x_0 = \frac{V^2 - V_0^2}{2a} = \frac{0 - 5^2}{2\cdot(-3.35)} = 3.73\ m$$

ESERCIZIO (SERWAY 5.11)

UNA MASSA $M = 2.20$ Kg VIENE ACCELERATA SU UNA SUPERFICIE SCABRA PER MEZZO DI UNA FUNE E UNA PULEGGIA, COME IN FIGURA. LA TENSIONE DELLA FUNE È 10.0 N E LA PULEGGIA SI TROVA A 10.0 cm AL DI SOPRA DELLA PARTE SUPERIORE DEL BLOCCO. IL COEFFICIENTE DI ATTRITO DINAMICO È 0.400. CALCOLARE L'ACCELERAZIONE DEL BLOCCO QUANDO $x = 40.0$ cm.

$a = 0.525\ m/s^2$





- $F_a = -\mu_d \cdot N \qquad \tan\theta = \dfrac{h}{x}$

$$\begin{cases} N + T\sin\theta - mg = 0 & \text{proiezione sul piano } Y \\ T\cos\theta - \mu_d \cdot N = ma & \text{proiezione sul piano } X \end{cases}$$

$\Rightarrow N = mg - T\sin\theta$ [dipende dall'angolo θ]

$$T\cos\theta - \mu_d(mg - T\sin\theta) = ma$$

$$T\cos\theta - \mu_d mg + \mu_d T\sin\theta = ma$$

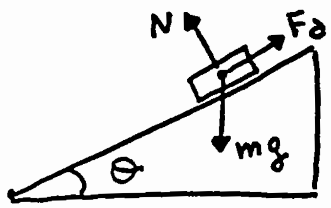
$$a = \frac{T}{m}(\cos\theta + \mu_d \sin\theta) - \mu_d \cdot g$$

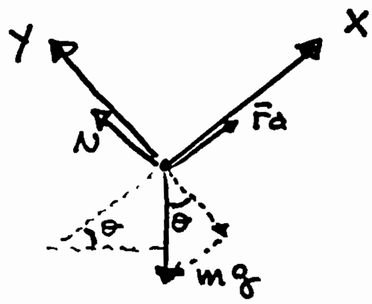
PER $x = 40$ cm SI HA $\tan\theta = \tan\frac{10}{40} = 0.25 \Rightarrow \theta = \arctan 0.25 = 14^\circ$

$$a = \frac{10.0}{2.20}(0.970 + 0.400 \cdot 0.242) - 0.400 \cdot 9.81 = 0.925\ m/s^2$$

PROBLEMA 6-1 (Halliday)

LA FIGURA MOSTRA UNA MONETA APPOGGIATA SU UN LIBRO CHE È STATO INCLINATO DI UN ANGOLO θ RISPETTO AL PIAN. ORIZZONTALE. PER SUCCESSIVE APPROSSIMAZIONI TROVEREMO CHE QUANDO θ È AUMENTATO FINO A $13°$ LA MONETA COMINCIA A SCIVOLARE LUNGO IL LIBRO. QUAL'È IL COEFFICIENTE DI ATTRITO STATICO TRA LA MONETA E IL LIBRO?





- $m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F_a} = 0$ (quando la moneta non scivola)

- PROIETTIAMO LE FORZE SU UN ASSE PARALLELO AL PIANO E SU UNO NORMALE

$$\begin{cases} N - mg\cos\theta = 0 \Rightarrow N = mg\cos\theta \\ F_a - mg\sin\theta = 0 \end{cases}$$

$$F_{a\,STATICO} = \mu_s \cdot N = \mu_s \cdot mg\cos\theta$$

- AFFINCHÉ VI SIA IL MOTO OCCORRE AVERE

$$mg\sin\theta > F_a$$

$$\cancel{mg}\sin\theta > \mu_s \cancel{mg}\cos\theta$$

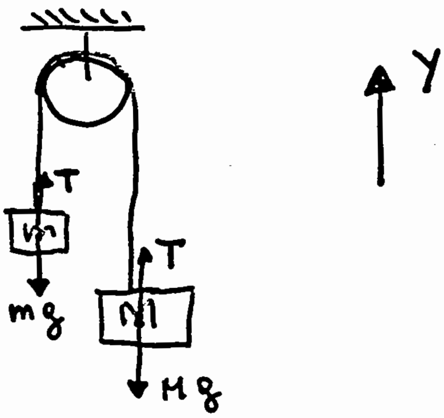
$$\Rightarrow \mu_s < \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \operatorname{tg}\theta$$

IN QUESTO CASO

$$\mu_s = \operatorname{tg} 13° = 0.23$$

PROBLEMA 5-10

LA FIGURA MOSTRA DUE BLOCCHI COLLEGATI DA UNA FUNE CHE PASSA ATTORNO A UNA CARRUCOLA PRIVA DI MASSA E DI ATTRITO. PONIAMO $m = 1.3$ Kg e $M = 2.8$ Kg. TROVARE LA TENSIONE DELLA FUNE E L'INTENSITA' DELL'ACCELERAZIONE COMUNE AI DUE BLOCCHI.



- LA FUNE E' INESTENSIBILE ⇒ GLI SPOSTAMENTI DEI DUE BLOCC SONO UGUALI IN MODULO MA HANNO VERSO OPPOSTO

$$\Delta Y_m = -\Delta Y_M \rightarrow V_m = -V_M \rightarrow a_m = -a_M$$

- $$\begin{cases} T - mg = m a_m = m a \\ T - Mg = M a_M = -M a \end{cases} \qquad \begin{aligned} a_m &= a \\ a_M &= -a \end{aligned}$$

- SOTTRAGGO LE DUE EQUAZIONI

$$(M-m)g = (M+m)a$$

$$\rightarrow \quad a = \frac{M-m}{M+m} g = \frac{2.8-1.3}{2.8+1.3} \cdot 9.8 = 3.6 \ m/s^2$$

$$\rightarrow \quad T = mg + ma = \ldots\ldots = \frac{2mM}{M+m} g = 17 N$$

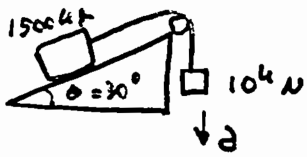
- SE $M \gg m \rightarrow$

$$a = \frac{\frac{M}{M} - \frac{m}{M}}{\frac{M}{M} + \frac{m}{M}} g = \frac{1 - \frac{m}{M}}{1 + \frac{m}{M}} g = g$$

$$T = \frac{2m}{1 + \frac{m}{M}} g = 2mg$$

PROBLEMA ($F = ma$)

UN'AUTO DI 1500 Kg DI MASSA VIENE SOLLEVATA DA UNA RAMPA DI CARICO INCLINATA DI 30° CON L'ORIZZONTALE. L'AUTO E' LEGATA TRAMITE UN CAVO CHE PASSA ATTRAVERSO UNA CARRUCOLA PRIVA DI ATTRITO AD UN CONTRAPPESO DI 10^4 N. TROVARE: a) LA TENSIONE DEL CAVO; b) L'ACCELERAZIONE DEL SISTEMA. c) QUALE MASSA DOVREBBE AVERE IL CONTRAPPESO PER FAR MUOVERE L'AUTO VERSO LA BASE DEL PIANO INCLINATO CON UN'ACCELERAZIONE DI $2\ m/s^2$? (SI TRASCURI L'ATTRITO).



- SCEGLIAMO COME POSITIVO IL VERSO IN CUI IL CONTRAPPESO SCENDE VERSO IL BASSO

- $m_p = \frac{10^4\ N}{g} = \frac{10^4\ N}{9.8} = 1020\ kg$

$$\begin{cases} m_p g - T = m_p a \\ T - mg \operatorname{sen}\theta = m a \end{cases} \Rightarrow m_p g - mg \operatorname{sen}\theta = (m_p + m) a$$

$$a = \frac{m_p g - mg \operatorname{sen}\theta}{m_p + m} = \frac{10^4 - 1500 \cdot 9.8 \cdot 0.5}{1020 + 1500} = 1.05\ m/s^2$$

$$T = m_p g - m_p a = m_p (g - a) = 1020\,(9.8 - 1.05) = 8930\ N$$

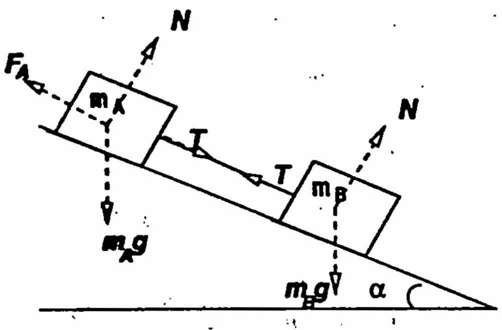
quando l'auto scende verso il basso l'accelerazione è negativa

$$m_p = m \frac{a + g \operatorname{sen}\theta}{g - a} = 1500 \cdot \frac{-2 + 9.8 \cdot 0.5}{9.8 + 2} = 369\ kg$$

Prova scritta di Fisica del 5 Luglio 2000

1. Due corpi di massa $m_A = 20\ Kg$ e $m_B = 10\ Kg$ sono collegati da una fune inestensibile priva di massa come mostrato in figura. Essi scivolano lungo un piano inclinato avente l'angolo $\alpha = 30°$. Il corpo A, situato più in alto rispetto al corpo B, presenta un coefficiente di attrito dinamico pari a 0.25 mentre il corpo B scivola invece senza attrito.
In queste condizioni si calcoli :

a) L'accelerazione dei due corpi durante la caduta.
b) La tensione della corda.
c) Assumendo che anche il corpo A scivoli senza attrito, determinare la tensione della corda in queste condizioni.



Sul corpo A agisce una forza di attrito che tende a rallentare il corpo mentre sul corpo B non è presente questo effetto, per cui il corpo A tenderebbe ad avere un'accelerazione minore del corpo B. Ma dato che i due corpi sono vincolati dalla corda, essi si muovono con la stessa accelerazione e sulla corda è presente una tensione T come mostrato in figura.
Troviamo le forze parallele al piano inclinato che agiscono sui due corpi. Assumiamo come verso positivo quello del moto dei corpi lungo il piano.

Corpo B: $\quad F_\parallel = m_B \cdot g \cdot \sin\alpha - T = m_B \cdot a$
Corpo A: $\quad F_\parallel = m_A \cdot g \cdot \sin\alpha + T - F_a = m_A \cdot a$

F_a è la forza di attrito pari a: $F_a = \mu_d \cdot N = \mu_d \cdot m_A \cdot g \cdot \cos\alpha$

Sommando le due equazioni si elimina la tensione della corda T:

$m_B \cdot g \cdot \sin\alpha + m_A \cdot g \cdot \sin\alpha - F_a = (m_A + m_B) \cdot a$

quindi l'accelerazione a è uguale a: $a = g \cdot \sin\alpha - \mu_d \cdot g \cdot \cos\alpha \frac{m_A}{m_A + m_B}$

Numericamente: $a = 9.8 \cdot \sin 30 - 0.25 \cdot 9.8 \cdot \cos 30 \frac{20}{20+10} = 3.48\ m/s^2$

La tensione T si ricava dall'equazione del moto del corpo B:

$$T = m_B \cdot (g \cdot \sin\alpha - a) = 10 \cdot (9.8 \cdot \sin 30 - 3.48) = 14.2\ N$$

Nel caso in cui anche il corpo A scivoli senza attrito, i due corpi avrebbero la stessa accelerazione anche senza il vincolo della corda, quindi la tensione su quest'ultima sarebbe zero, come si può anche verificare mettendo $\mu_d = 0$ nelle equazioni precedenti.

LA MOLLA

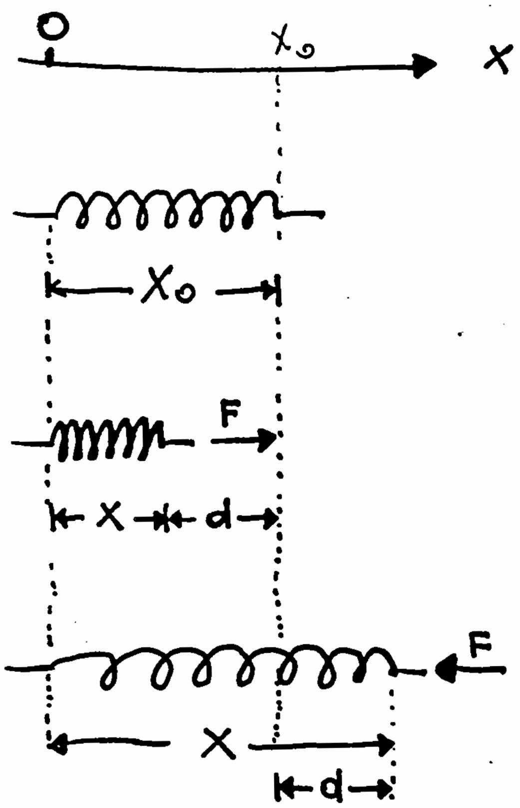
- QUALSIASI OGGETTO, SOTTOPOSTO AD UNA SOLLECITAZIONE TENDE A TORNARE NELLO STATO INIZIALE.
  QUANDO LA SOLLECITAZIONE E' TROPPO FORTE, LA DEFORMAZIONE E' PERMANENTE.

- LA MOLLA E' UN OGGETTO IDEALE, CHE RISPONDE AD UNA SOLLECITAZIONE ESTERNA CON UNA FORZA DEL TIPO:

$$\vec{F} = -K\,\vec{d} \qquad [\text{legge di Hooke}]$$

- $\vec{d}$ E' LA DEFORMAZIONE DELLA MOLLA (ALLUNGAMENTO O ACCORCIAMENTO RISPETTO AD UNA POSIZIONE DI RIPOSO)

- K E' UNA COSTANTE CARATTERISTICA DI OGNI MOLLA, (COSTANTE ELASTICA) $[K] = [F][S]^{-1}$



molla in posizione di riposo

molla compressa

$$F = -Kd = -K\underbrace{(X - X_0)}_{<0} > 0$$

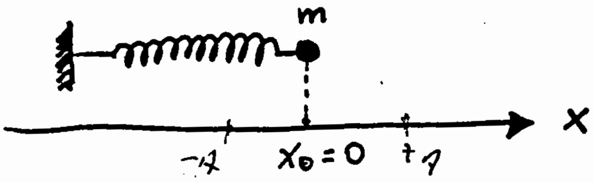
molla allungata

$$F = -Kd = -K\underbrace{(X - X_0)}_{>0} < 0$$

Eq. DEL MOTO DELLA MOLLA

- FORZA DELLA MOLLA: $F = -kx$

- APPLICHIAMO UNA MASSA m AD UN'ESTREMITA' DELLA MOLLA



- SE SPOSTIAMO LA MASSA DALLA SUA POSIZIONE DI RIPOSO E LA LASCIAMO ANDARE, QUESTA COMINCERA' A MUOVERSI

- $F = ma \Rightarrow -kx = ma$

$$-kx = m\frac{d^2x}{dt^2}$$ [equazione differenziale]

- PROVIAMO UNA SOLUZIONE DEL TIPO:

$$x = A\,\text{sen}(\omega t + \varphi)$$

— A = ampiezza massima ; φ = fase iniziale

— ω = pulsazione $\left[\omega = \frac{2\pi}{T}\right]$

- VERIFICHIAMO SE E' UNA SOLUZIONE

$$v = \frac{dx}{dt} = \omega A \cos(\omega t + \varphi)$$

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 A\,\text{sen}(\omega t + \varphi)$$

- SOSTITUIAMO NELL'EQUAZIONE $-kx = ma$

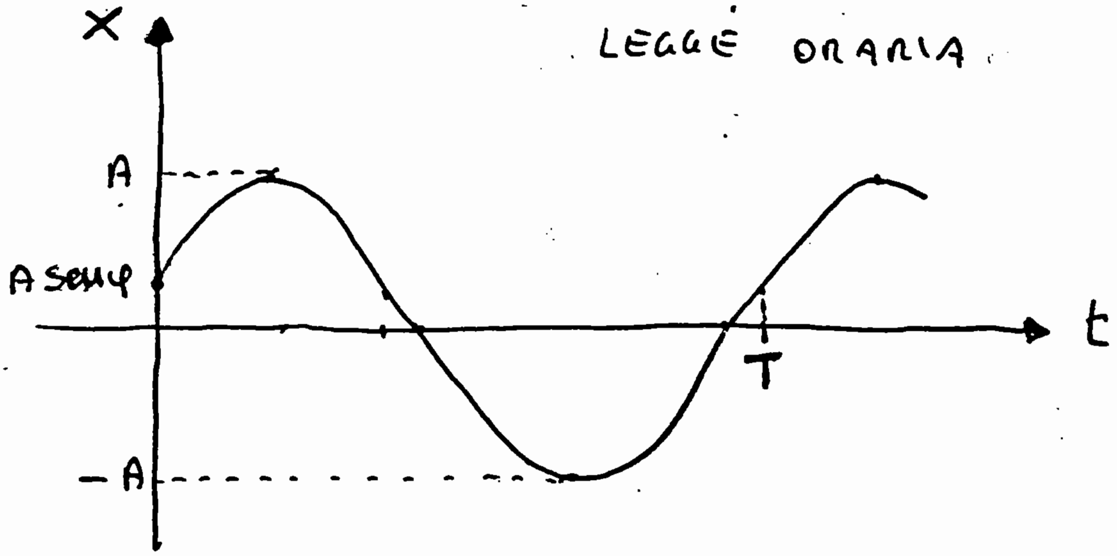
$$-k\cancel{A}\,\cancel{\text{sen}}(\omega t + \varphi) = -m\omega^2\cancel{A}\,\cancel{\text{sen}}(\omega t + \varphi)$$

$$\Rightarrow \omega^2 = \frac{k}{m} \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$ [Pulsazione angolare]

1

MOTO ARMONICO

UN MOTO DEL TIPO $X = A \operatorname{sen}(\omega t + \varphi)$ SI CHIAMA MOTO ARMONICO



- IL VALORE MASSIMO DELLA FUNZIONE SI HA QUANDO

  $\operatorname{sen}(\omega t + \varphi) = 1$, OVVERO $(\omega t + \varphi) = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n = 0, 1, 2,$

- IL MINIMO SI HA PER

  $\operatorname{sen}(\omega t + \varphi) = -1$, OVVERO $(\omega t + \varphi) = \frac{3}{2}\pi + 2\pi n$, $n = 0, 1, 2, \ldots$

- LA FUNZIONE VALE ZERO QUANDO

  $\operatorname{sen}(\omega t + \varphi) = 0$, OVVERO $(\omega t + \varphi) = 0 + n\pi$, $n = 0, 1, 2, \ldots$

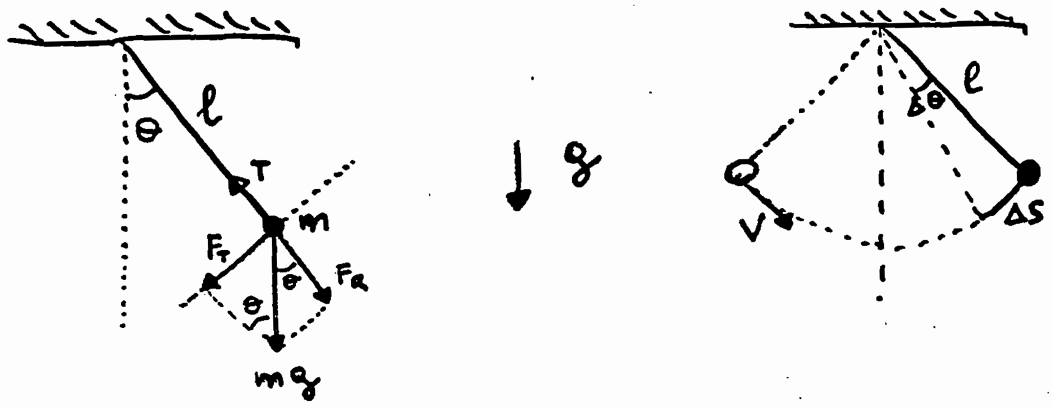
- IL PERIODO T DELLA FUNZIONE VALE

  $$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

- NEL CASO DELLA MOLLA $T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$

- LE DUE COSTANTI A e φ CHE COMPAIONO NELLA LEGGE ORARIA DIPENDONO DALLE CONDIZIONI INIZIALI

IL PENDOLO SEMPLICE



$$\Delta S = \ell\, \Delta\theta$$

$$V = \ell \frac{d\theta}{dt}$$

- UNA MASSA m È APPESA AD UN FILO INESTENSIBILE, PERFETTAMEN FLESSIBILE, DI MASSA TRASCURABILE E DI LUNGHEZZA ℓ

- LA MASSA OSCILLA SOTTO L'AZIONE DELLA FORZA DI GRAVITA' mg

$$F_R = mg\cos\theta \quad ; \quad F_T = -mg\sin\theta$$

- $$F_R - T = 0 \quad \Rightarrow \quad T = mg\cos\theta$$
  $$F_T = m\frac{dV}{dt} \quad \Rightarrow \quad -\cancel{m} g \sin\theta = \cancel{m}\,\ell \frac{d^2\theta}{dt^2}$$

- FACCIAMO L'APPROSSIMAZIONE DI PICCOLI ANGOLI
  $\Rightarrow \quad \sin\theta \simeq \theta$ [θ misurato in radianti]

- $$-g\,\theta = \ell \frac{d^2\theta}{dt^2} \qquad \left[-kx = m\frac{d^2x}{dt^2} \right]$$

- LA SOLUZIONE DELL'EQUAZIONE DIFFERENZIALE È:

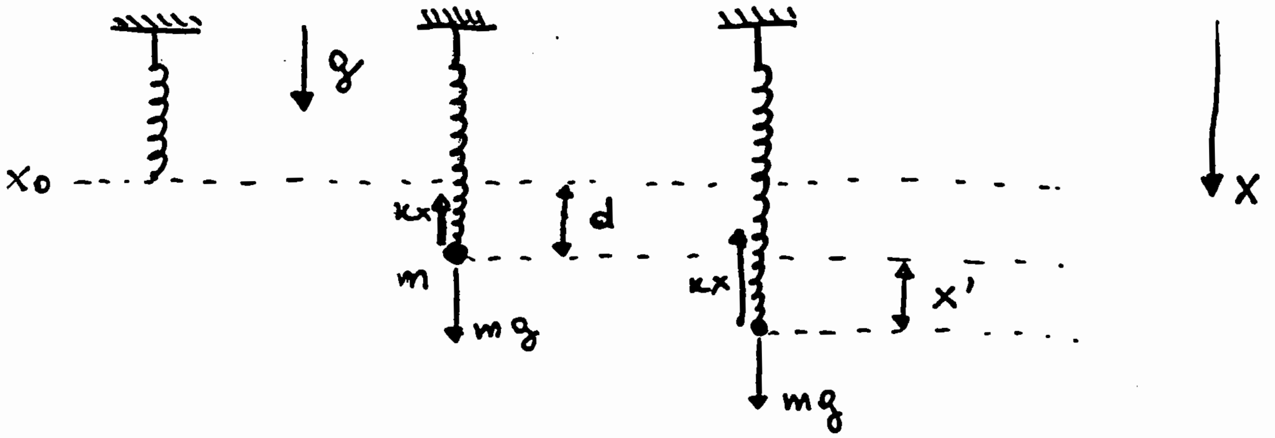
  $$\theta(t) = A\sin(\omega t + \varphi)$$

  - $\omega = \sqrt{\frac{g}{\ell}}$

$\Rightarrow$ $\boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}}$ periodo di oscillazione del pendolo

N.B. non dipende dalla massa m

MOLLA VERTICALE



- PRENDIAMO UNA MASSA m APPESA AD UNA MOLLA IN UN PIANO VERTICALE
- LA MASSA È SOGGETTA ALLA FORZA ELASTICA E ALLA FORZA PESO
- NELLA POSIZIONE DI EQUILIBRIO SI HA:

$$mg = kd \quad \Rightarrow \quad d = \frac{mg}{k}$$

- SPOSTIAMO ORA LA MASSA RISPETTO AL PUNTO d

$$-kX + mg = ma$$

$$X = x' + d$$ [cambiamo l'origine del sistema di riferimento

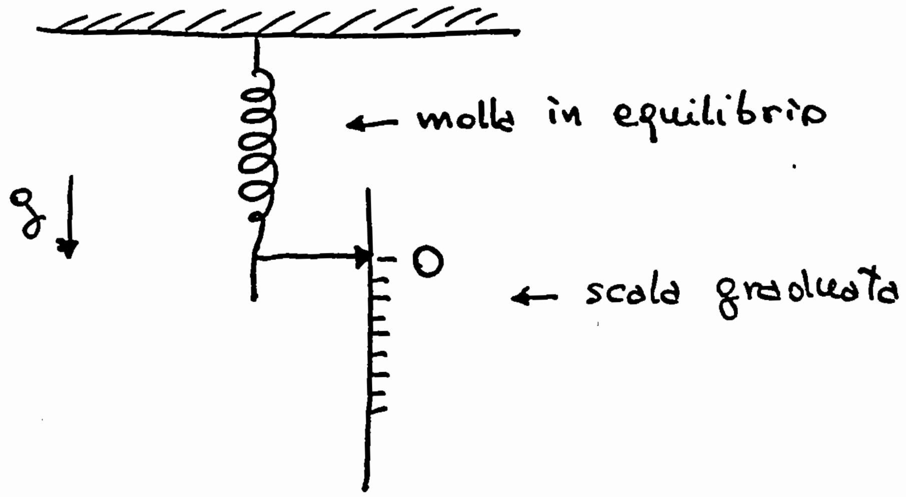
$$-k(x'+d) + mg = ma$$

$$-kx' \underbrace{-kd + mg}_{=0} = ma$$

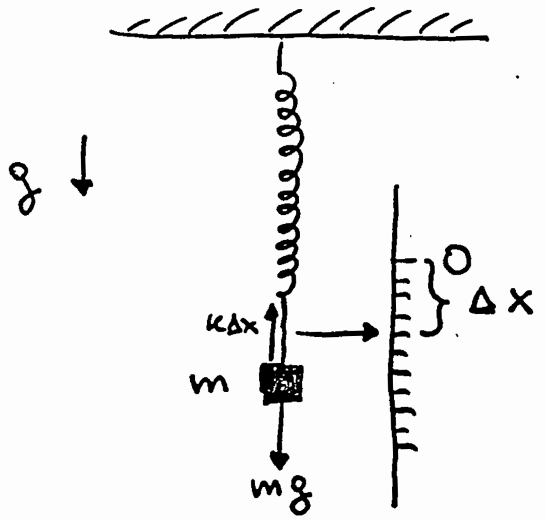
$$-kx' = ma$$

- ABBIAMO UN MOTO ARMONICO INTORNO AL NUOVO PUNTO DI EQUILIBRIO d

DINAMOMETRO



- APPENDIAMO UNA MASSA m ALLA MOLLA



– SUL CORPO IN EQUILIBRIO AGISCONO DUE FORZE: LA FORZA PESO E LA FORZA DI RICHIAMO ELASTICA DELLA MOLLA

$$mg - k\Delta x = 0 \quad \Rightarrow \quad mg = k\Delta x$$

$$\Rightarrow \boxed{m = \frac{k}{g}\Delta x}$$

- LA MASSA m È DIRETTAMENTE PROPORZIONALE ALLO SPOSTAMENTO Δx DELL'AGO.

LA SCALA GRADUATA PUÒ ESSERE TARATA IN Kg ANZICHÉ IN m

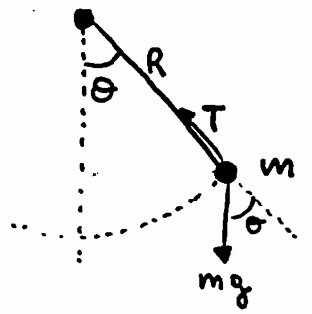
ESERCIZI CONSIGLIATI

Forza elastica e oscillazioni

- Serway (3° Edizione) – Cap. 12
  - 1 – 3 – 5 – 7 – 9 – 11 – 23
- Halliday (5° Edizione) – Cap. 16
  - 1E – 5E – 7E – 11E – 13P – 17P – 19P – 41E

PROBLEMA

UN PENDOLO SEMPLICE, DI MASSA $m = 1\ kg$, TENUTO FERMO NELLA POSIZIONE $\theta_0 = 45°$, VIENE AD UN CERTO ISTANTE LASCIATO LIBERO. DETERMINARE IN FUNZIONE DELL'ANGOLO CON LA VERTICALE IL VALORE DELLA REAZIONE NEL PUNTO DI AGGANCIO.



- LA REAZIONE DEL GANCIO È UGUALE IN MODULO ALLA TENSIONE T DEL FILO
- PROIETTIAMO LE FORZE LUNGO UNA DIREZIONE PARALLELA AL FILO (ED UNA DIREZIONE ORTOGONALE AL FILO ($\perp$)

$$F_\perp = -mg\,\text{sen}\,\theta$$

$$F_\parallel = T - mg\cos\theta$$

- LA FORZA PARALLELA È RESPONSABILE DELL'ACCELERAZIONE CENTRIPETA, MENTRE LA FORZA ORTOGONALE È RESPONSABILE DELL'ACCELERAZIONE TANGENZIALE.

$$\begin{cases} F_\parallel = m\dfrac{v^2}{R} = m\omega^2 R & \left[v = \omega R\ ;\ \omega = \dfrac{d\theta}{dt}\right] \\ F_\perp = m a_\perp = m\ddot{\theta} R & \left[a = \dfrac{dv}{dt} = \dot{\omega} R = \ddot{\theta} R\right] \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} T - mg\cos\theta = m\dfrac{v^2}{R} & \Rightarrow T = mg\cos\theta + m\dfrac{v^2}{R} \\ -mg\,\text{sen}\,\theta = mR\ddot{\theta} & \Rightarrow R\ddot{\theta} + g\,\text{sen}\,\theta = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} T = mg\cos\theta + m\dfrac{v^2}{R} \\ \ddot{\theta} + \dfrac{g}{R}\,\mathrm{sen}\,\theta = 0 \end{cases}$$

NELL'APPROSIMAZIONE DI PICCOLE OSCILLAZIONI SI HA:

$$\mathrm{sen}\,\theta \simeq \theta \quad ; \quad \cos\theta \simeq 1$$

QUINDI SI AVREBBE

$$\begin{cases} T = mg + m\dfrac{v^2}{R} \\ \ddot{\theta} + \dfrac{g}{R}\,\theta = 0 \end{cases}$$ ← equazione del moto armoni

ESEMPIO:

$\theta = 10° = 0.1745$ rad ; sen $10° = 0.1736$; cos $10° = 0.9848$

$\theta = 45° = 0.7854$ rad ; sen $45° = 0.7071$; cos $45° = 0.7071$

QUINDI 45° E' UN ANGOLO TROPPO GRANDE PER APPLICARE L'APPROSSIMAZIONE DI PICCOLE OSCILLAZIONI

- LA DIPENDENZA DI V DALL'ANGOLO SI RICAVA CON LA CONSERVAZIONE DELL'ENERGIA

$$U(\theta_0) = mgR(1-\cos\theta_0) \quad \rightarrow \quad U(0) = 0$$

$$mgR(1-\cos\theta_0) = mgR(1-\cos\theta) + \frac{1}{2}mv^2$$

$$\Rightarrow \quad v^2(\theta) = 2gR(\cos\theta - \cos\theta_0)$$

$$T = mg\cos\theta + 2mg(\cos\theta - \cos\theta_0) = mg(3\cos\theta - 2\cos\theta_0$$

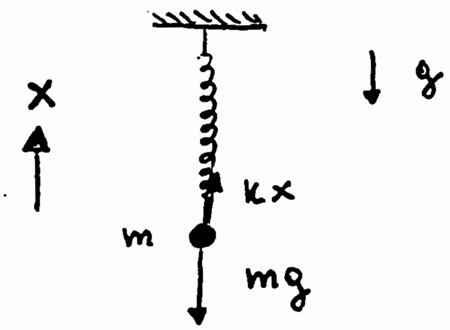
$\theta = \theta_0 \qquad T = mg\cos\theta_0 = 1\cdot 9.8\cdot\cos 45° = 6.9\ N$

$\theta = 0 \qquad T = mg(3-2\cos\theta_0) = 1\cdot 9.8\,(3-2) = 9.8\ N$

PROBLEMA : MOTO ARMONICO

UNA MASSA DI 0.300 kg VIENE SOSPESA AD UNA MOLLA VERTICALE, CHE, PER EFFETTO DELLA SOLLECITAZIONE, SI ALLUNGA DI 10.0 cm. POI LA MASSA VIENE ABBASSATA DI ALTRI 5.00 cm E QUINDI VIENE LASCIATA LIBERA. SI TROVINO: a) LA COSTANTE ELASTICA K, b) LA PULSAZIONE, c) LA FREQUENZA ν, d) IL PERIODO T, e) LA VELOCITA' MASSIMA DELLA MASSA OSCILLANTE, f) L'ACCELERAZIONE MASSIMA DELLA MASSA OSCILLANTE, g) LA FORZA DI RICHIAMO MASSIMA, i) LE EQUAZIONI DEL SPOSTAMENTO, DELLA VELOCITA' E DELL'ACCELERAZIONE A UN ISTANTE ARBITRARIO t. ; h) v per $x = 2.0$ cm

[a) $k = 29.4$ N/m ; b) $\omega = 9.90$ rad/s ; c) $\nu = 1.58$ Hz ; d) $T = 0.633$ s
e) 0.495 m/s ; f) 4.90 m/s^2 ; g) 1.47 N ; h) $\pm$ 0.454 m/s



- FORZA DI RICHIAMO DELLA MOLLA : $F = -kx$

a) $kx - mg = m\ddot{x}$

IN CONDIZIONI DI EQUILIBRIO $\ddot{x} = 0$

$\Rightarrow kx = mg$

$$k = \frac{mg}{x} = \frac{0.300 \cdot 9.8}{0.10} = 29.4 \ \frac{N}{m}$$

- LA MOLLA OSCILLA INTORNO ALLA NUOVA POSIZIONE DI EQUILIBRIO.

- EQUAZIONE DEL MOTO

$$-kx = m\ddot{x} \quad ; \quad \ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0$$

L' EQUAZIONE SI PUO' SCRIVERE COME:

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0$$

ω E' LA PULSAZIONE DEL MOTO ARMONICO.

IN QUESTO CASO SI HA:

b) $\omega^2 = \frac{k}{m} \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{29.4}{0.3}} = 9.90$ rad/s

c) $\omega = 2\pi\nu \Rightarrow \nu = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{9.90}{2\pi} = 1.58$ Hz

d) • $T = \frac{1}{\nu} = \frac{2\pi}{\omega} \Rightarrow T = \frac{1}{1.58} = 0.633$ s

e) LA SOLUZIONE DELL' EQUAZIONE DIFFERENZIALE E':

$x = A\cos(\omega t + \varphi)$ A = ampiezza massima ; φ = fase iniz

$v = \dot{x} = -\omega A \sin(\omega t + \varphi)$ ωA = velocità massima

$V_{max} = \omega \cdot A = 9.90 * 0.05 = 0.495$ m/s

f) $\ddot{x} = a = -\omega^2 A\cos(\omega t + \varphi)$ $\omega^2 A$ = accelerazione massima

$a_{max} = \omega^2 A = \frac{k}{m}A = 9.90^2 \cdot 0.05 = 4.90$ m/s^2

g) $f_{max} = kA = 29.4 * 0.05 = 1.47$ N

h) CONSERVAZIONE DELL' ENERGIA:

$$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kA^2 \Rightarrow v^2 + \frac{k}{m}x^2 = \frac{k}{m}A^2$$

$$v = \omega\sqrt{A^2 - x^2} = 9.90 \cdot \sqrt{0.05^2 - 0.02^2} = 0.454 \text{ m/s}$$

i) DETERMINIAMO LA FASE φ

$t = 0$ $x(t=0) = A\cos\varphi \Rightarrow \varphi = 0$

$x = A\cos\omega t$; $v = -\omega A\sin\omega t$; $a = -\omega^2 A\cos\omega t$

) Un cubetto di ghiaccio privo di attrito oscilla nel minimo di una conca sferica di raggio R. Nell'approssimazione di piccole oscillazioni, si determini :

a) il periodo di oscillazione, T

$T = Rg$; ☐ $T = Rg$;

☐ $T = 2\pi\sqrt{\frac{R}{g}}$; ☒ $T = 2\pi\sqrt{\frac{R}{g}}$; ☐ $T = 2\pi\sqrt{\frac{g}{R}}$.

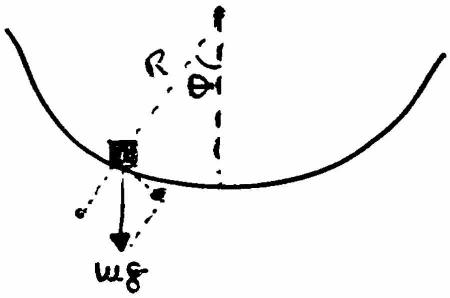
b) se si raddoppia la massa del cubetto, il periodo T

☐ dimezza; ☐ aumenta; ☒ non varia; ☐ raddoppia.

c) se si quadruplica il raggio della conca, il periodo T

☐ non varia; ☐ dimezza; ☒ raddoppia; ☐ quadruplica.

(7 punti)



$$-mg\sin\theta = ma \quad ; \quad V = \dot{\theta}R \quad ; \quad a = \ddot{\theta}R$$

$$-g\sin\theta = \ddot{\theta}R \Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{g}{R}\sin\theta = 0$$

PICCOLE OSCILLAZIONI $\sin\theta \simeq \theta$

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{R}\theta = 0$$

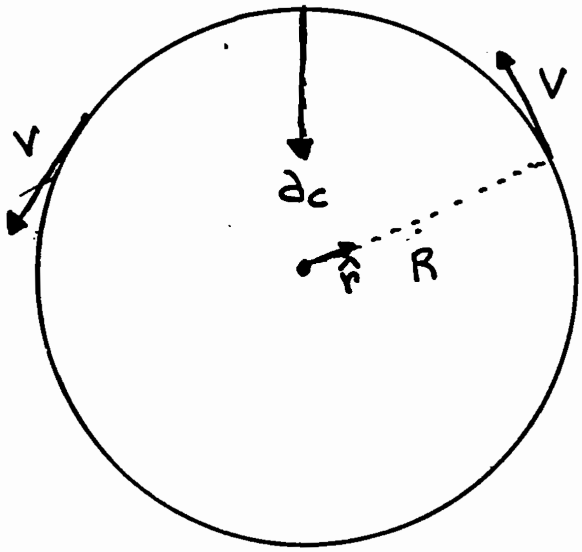
$\Rightarrow \omega^2 = \frac{g}{R} \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{g}{R}}$ [Pulsazione angolare del moto armonico

a) $T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{R}{g}}$; $f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{R}}$

b) IL PERIODO NON DIPENDE DALLA MASSA

c) SE $R \rightarrow 4R \Rightarrow T \rightarrow 2T$ (RADDOPPIA)

MOTO CIRCOLARE UNIFORME



CAMBIA LA DIREZION
MA NON IL MODULO
DELLA VELOCITA'

- L'ACCELERAZIONE È DIRETTA VERSO IL CENTRO DELLA CIRCONFERENZA (ACCELERAZIONE CENTRIPETA)

$$\vec{a}_c = -\frac{v^2}{R}\hat{r} = -\omega^2 R\hat{r} \qquad \left(\omega = \frac{v}{R} \text{ velocità angolare}\right)$$

- SE VI È UN'ACCELERAZIONE DEVE ESISTERE ANCHE UNA FORZA RESPONSABILE DELLA STESSA, CHE SI CHIAMA FORZA CENTRIPETA

$$\boxed{\vec{F}_c = m\vec{a}_c = -m\frac{v^2}{R}\hat{r} = -m\omega^2 R\hat{r}}$$

ESEMPI: SASSO LEGATO AD UNA CORDA ⇒ TENSIONE DELLA CORDA

TERRA CHE RUOTA INTORNO AL SOLE ⇒ FORZA GRAVITAZIONALE

AUTOMOBILE IN CURVA ⇒ ATTRITO DELLE RUOTE CON L'ASFALTO

N.B. OGNI QUAL VOLTA UN CORPO CAMBIA DIREZIONE DELLA VELOCITA' È PRESENTE UNA FORZA CENTRIPETA PARI A:

$$F = m\frac{v^2}{R} \qquad (R = \text{raggio di curvatura della traiettoria})$$

FORZE APPARENTI : FORZA CENTRIFUGA

- SUPPONETE DI SALIRE SU UNA GIOSTRA
  - VISTI DALL'ESTERNO (CIOÈ DA UN SISTEMA DI RIFERIMENTO INERZIALE) VOI STATE PERCORRENDO UNA TRAIETTORIA CIRCOLARE.
    LA FORZA CENTRIPETA È DATA DALLA "FORZA MUSCOLARE" CON LA QUALE STRINGETE UN QUALCHE SOSTEGNO.
    (se mollate la presa partite per la tangente)
  - SE VOI CONFRONTATE IL VOSTRO MOTO RISPETTO ALLA GIOSTRA (AD ESEMPIO SIETE SEDUTI SU UN ELEFANTINO BLU) VOI SIETE IMMOBILI, QUINDI NON C'È ACCELERAZIONE, PERÒ VI SENTITE SPINTI VERSO L'ESTERNO (IN DIREZIONE RADIALE) DA UNA FORZA MISTERIOSA CHE CHIAMATE FORZA CENTRIFUGA
- LA FORZA CENTRIFUGA È UNA FORZA APPARENTE (NEL SENSO CHE NON C'È UNA SORGENTE) E COMPARE QUANDO USATE COME RIFERIMENTO PER IL VOSTRO MOTO LA GIOSTRA, PERCHÉ LA GIOSTRA NON È UN SISTEMA DI RIFERIMENTO INERZIALE, CIOÈ NON SI MUOVE DI MOTO RETTILINEO UNIFORME RISPETTO AD UN ALTRO SISTEMA DI RIFERIMENTO INERZIALE, MA HA ESSA STESSA UN'ACCELERAZIONE (STA RUOTANDO)

FORZE APPARENTI

- NEI SISTEMI DI RIFERIMENTO NON INERZIALI COMPAIONO LE FORZE APPARENTI, CHE VALGONO:

$$\vec{F}_{APPARENTE} = -m\,\vec{a}_{SISTEMA}$$

ESEMPIO:

$$\vec{F}_{CENTRIFUGA} = -m\vec{a}_{CENTRIPETA} = -m\left(-\frac{v^2}{R}\right)\hat{r} = m\frac{v^2}{R}\hat{r}$$

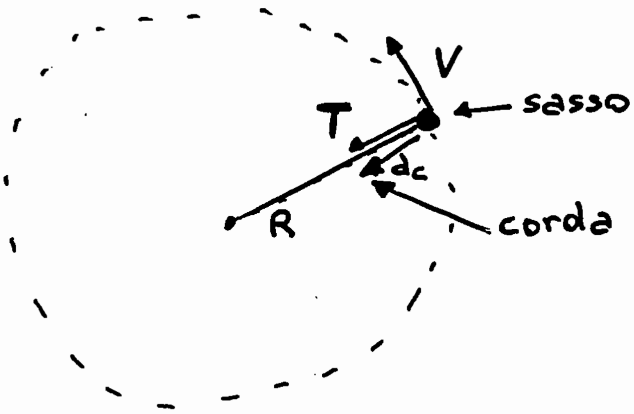
$\Rightarrow$ LA FORZA CENTRIFUGA È RADIALE ED È DIRETTA VERSO L'ESTERNO

N. B. LE FORZE APPARENTI SONO UNA MANIFESTAZIONE DEL PRINCIPIO DI INERZIA, CIOÈ CHE UN CORPO NON SOGGETTO A FORZE TENDE A PROSEGUIRE NEL SUO MOTO RETTILINEO UNIFORME

N. B. <u>NON ESISTE L'ACCELERAZIONE CENTRIFUGA!</u>

- LA TERRA NON È UN SISTEMA INERZIALE PERCHÈ STA RUOTANDO, QUINDI SE LA USIAMO COME SISTEMA DI RIFERIMENTO DOBBIAMO TENER CONTO DELLA FORZA CENTRIFUGA $m\omega^2 R$. RICORDATE IL CALCOLO DI g?

FORZA CENTRIPETA E CENTRIFUGA



- SISTEMA INERZIALE (io vedo il sasso che ruota)
  - L'UNICA FORZA CHE AGISCE SUL SASSO È LA TENSIONE T DELLA CORDA (diretta verso il centro)

ABBIAMO: $$\underline{T = m a_c = m \frac{v^2}{R}} \qquad (\vec{f} = m\vec{a})$$

- SISTEMA NON INERZIALE (ovvero a cavallo del sasso)
  - IN QUESTO SISTEMA IL SASSO È FERMO
  - COMPARE UNA FORZA APPARENTE (FORZA CENTRIFUGA)

$$\vec{F}_{apparente} = -m\vec{a}_{sistema}$$

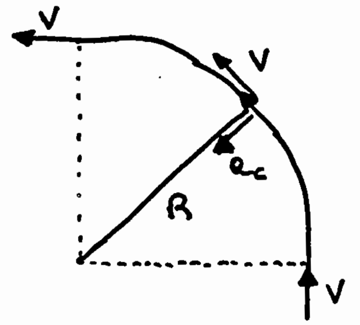
$$F_{CENTRIFUGA} = m\frac{v^2}{R} \quad \text{(diretta verso l'esterno)}$$

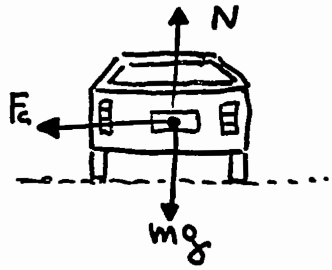
- IL SASSO È FERMO, QUINDI LA SOMMA DELLE FORZE AGENTI SUL SASSO DEVE ESSERE NULLA

$$\vec{T} + \vec{F}_{CENTRIFUGA} = 0 \Rightarrow T - m\frac{v^2}{R} = 0 \Rightarrow \underline{T = m\frac{v^2}{R}}$$

- COME SI VEDE LE DUE EQUAZIONI FINALI SONO IDENTICHE. PER LA SOLUZIONE DEI PROBLEMI SI PUÒ SCEGLIERE IL PROCEDIMENTO CHE SI PREFERISCE (E CHE SI È CAPITO MEGLIO 😉).

AUTOMOBILE IN CURVA SU STRADA ORIZZONTALE SCABRA





- L'AUTOMOBILE FA UNA CURVA $\Rightarrow$ ACCELERAZIONE CENTRIPETA $\Rightarrow$ FORZA CENTRIPETA

- LA FORZA CENTRIPETA È FORNITA DALLA FORZA DI ATTRITO STATICO TRA LE RUOTE E L'ASFALTO

$$a_c = m \frac{V^2}{R} \qquad \begin{cases} R = \text{raggio di curvatura della "curva"} \\ V = \text{velocità dell'automobile} \end{cases}$$

$$F_c = \mu_s \cdot N = \mu_s \cdot m g \quad (\text{N.B. } \mu_s \text{ è sempre } < 1)$$

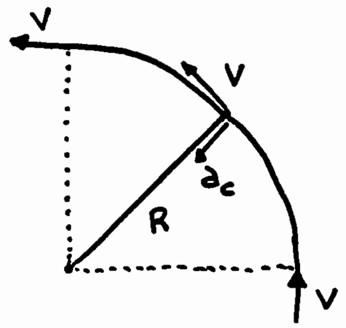
$$\Rightarrow F_c = m \cdot a_c \Rightarrow \mu_s \cdot \cancel{m} g = \cancel{m} \frac{V^2}{R}$$

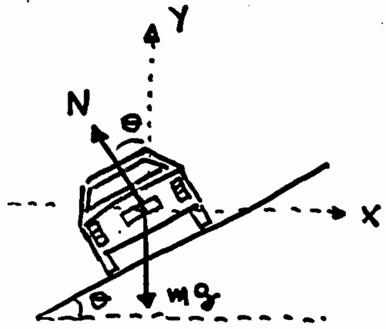
- POSSIAMO RICAVARE IL VALORE MASSIMO PER V AL DI LÀ DEL QUALE L'ATTRITO NON RIESCE A FORNIRE LA FORZA CENTRIPETA NECESSARIA E L'AUTOMOBILE PARTE PER LA TANGENTE :-c !

$$V^2_{max} \leq R \cdot \mu_s \cdot g \Rightarrow \boxed{V_{max} \leq \sqrt{\mu_s R g}}$$

- COSA SUCCEDE NEL CASO DI STRADE GHIACCIATE QUANDO $\mu_s \simeq 0$? A COSA SERVONO LE CATENE ?

AUTOMOBILE IN CURVA SU STRADA SOPRAELEVATA LISCIA





- LA STRADA È LISCIA, QUINDI NON ABBIAMO LA FORZA DI ATTRITO TRA LE RUOTE E L'ASFALTO

- PROIETTIAMO LA FORZA NORMALE $\vec{N}$ E LA FORZA DI GRAVITÀ $m\vec{g}$ SU DUE ASSI VERTICALE E ORIZZONTALE

$$\begin{cases} F_Y = N\cos\theta - mg = 0 & \text{(l'automobile non cambia quota)} \\ F_X = -N\sin\theta = m a_c = -m\dfrac{v^2}{R} \end{cases}$$

- DALLA PRIMA EQUAZIONE $N = \dfrac{mg}{\cos\theta}$

- DALLA SECONDA EQUAZIONE $\cancel{m} g \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta} = \cancel{m} \dfrac{v^2}{R}$

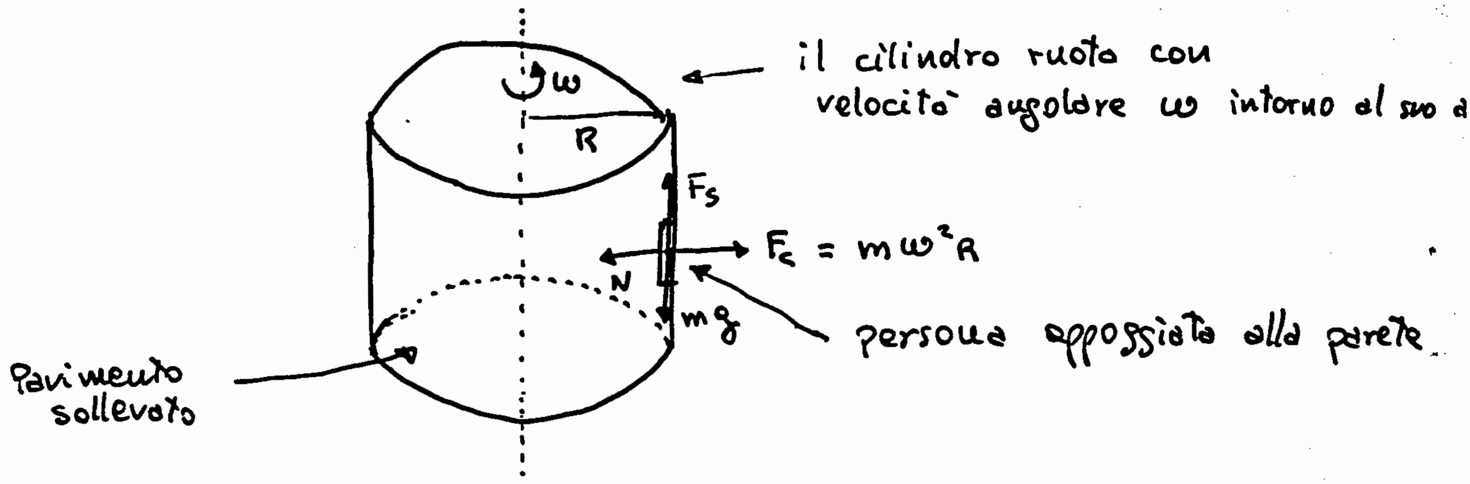
- QUINDI POSSIAMO METTERE IN RELAZIONE L'ANGOLO DI SOPRAELEVAZIONE DELLA STRADA CON LA VELOCITÀ DI PERCORRENZA E CON IL RAGGIO

$$\tan\theta = \frac{v^2}{Rg} \Rightarrow \theta = \arctan\frac{v^2}{Rg}$$

OPPURE

$$\boxed{v = \sqrt{Rg\tan\theta}} \qquad \boxed{R = \frac{v^2}{g\tan\theta}}$$

CILINDRO ROTANTE AL LUNA PARK



- STUDIAMO IL PROBLEMA NEL SISTEMA NON INERZIALE, CIOÈ IL CORPO È IMMOBILE RISPETTO ALLA PARETE DEL CILINDRO

- AFFINCHÉ IL CORPO NON SCIVOLI LUNGO LA PARETE VERTICALE DOBBIAMO AVERE:

$$F_s \geq mg$$

- SAPPIAMO CHE:

$$F_s = \mu_s \cdot N \Rightarrow \boxed{\mu_s \cdot N \geq mg}$$

- LA NORMALE N SI RICAVA DALL'EQUILIBRIO DELLE FORZE SUL PIANO ORIZZONTALE (da notare che la normale forma un'angolo di 90° con mg)

$$N = F_c = m\omega^2 R \Rightarrow \underline{F_s = \mu_s m \omega^2 R}$$

- QUINDI DOBBIAMO AVERE:

$$\mu_s \cancel{m} \omega^2 R \geq \cancel{m} g$$

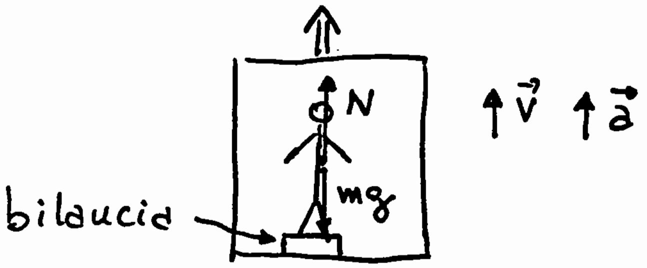
$$\boxed{\mu_s \geq \frac{g}{\omega^2 R}}$$

- IL VALORE MINIMO DI ROTAZIONE DEL CILINDRO VALE:

$$\boxed{\omega_{minimo} = \sqrt{\frac{g}{\mu_s \cdot R}}}$$

ASCENSORE IN ACCELERAZIONE

- MISURIAMO IL PESO DI UNA PERSONA IN UN ASCENSORE CHE SI MUOVE DI MOTO UNIFORMEMENTE ACCELERATO VERSO L'ALTO



- SULLA PERSONA AGISCE LA FORZA PESO mg DIRETTA VERSO IL BASSO E LA FORZA NORMALE N DIRETTA VERSO L'ALTO ESERCITATA DAL PIANO DELL'ASCENSORE, TRAMITE LA BILANCIA

- **LA BILANCIA MISURA QUINDI LA FORZA NORMALE N !!**

- SCRIVIAMO LA SECONDA LEGGE DI NEWTON $\vec{F} = m\vec{a}$

$$N - mg = ma$$ (la persona accelera verso l'alto)

$$\Rightarrow \boxed{N = mg + ma}$$ (la bilancia misura un peso maggiore)

- SE L'ASCENSORE DECELLERA, L'ACCELERAZIONE È DIRETTA VERSO IL BASSO E IL PESO SEMBRA DIMINUIRE

$$N - mg = -ma \Rightarrow \underline{N = mg - ma}$$

- PRENDENDO L'ASCENSORE COME SISTEMA DI RIFERIMENTO, COMPARE UNA FORZA APPARENTE $-m\vec{a}$, DIRETTA VERSO IL BASSO NEL PRIMO CASO E DIRETTA VERSO L'ALTO NEL SECONDO CASO.

SERWAY - FISICA RAGIONATA 5
AZIONE E REAZIONE

UN CAVALLO TIRA UNA SLITTA CON UNA FORZA ORIZZONTALE, PROCURANDOLE UN'ACCELERAZIONE. LA TERZA LEGGE DI NEWTON DICE CHE LA SLITTA ESERCITA SUL CAVALLO UNA FORZA UGUALE E OPPOSTA. STANDO COSÌ LE COSE, COME PUÒ LA SLITTA ESSERE ACCELERATA? SOTTO QUALI CONDIZIONI IL SISTEMA (CAVALLO-SLITTA) SI MUOVE CON VELOCITÀ COSTANTE?

- LE DUE FORZE (AZIONE E REAZIONE) CHE INTERVENGONO NELLA TERZA LEGGE DI NEWTON AGISCONO SU CORPI DIVERSI

- NELLA SECONDA LEGGE DI NEWTON

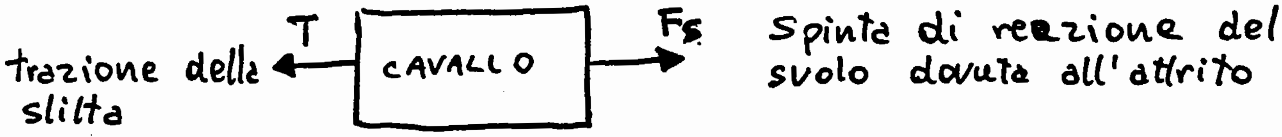
$$\sum_{i=1}^{N} \vec{f}_i = m\vec{a}$$

BISOGNA CONSIDERARE TUTTE E SOLO LE FORZE CHE AGISCONO SUL CORPO DI MASSA m

- CONSIDERIAMO IL CAVALLO:
CON LE ZAMPE SPINGE IL SUOLO ALL'INDIETRO.
IL SUOLO REAGISCE SPINGENDO IL CAVALLO IN AVANTI
N.B. SE NON VI È ATTRITO TRA GLI ZOCCOLI ED IL SUOLO, IL CAVALLO NON SI MUOVE

AZIONE E REAZIONE

- CAVALLO



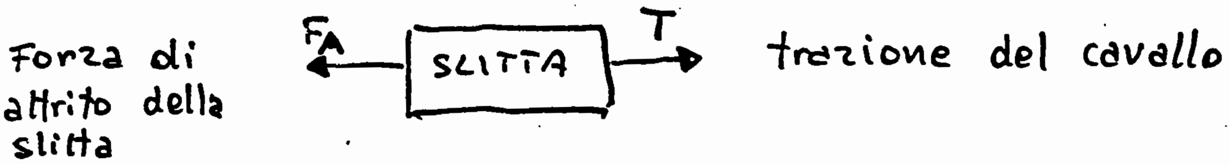
- $|\vec{F_S}|$ = FORZA CON LA QUALE LE ZAMPE DEL CAVALLO SPINGONO IL SUOLO
(N.B. conta solo la componente orizzontale per il moto)

- SECONDA LEGGE DI NEWTON

$$F_S - T = m_c a \qquad [\, m_c = \text{massa del cavallo} \,]$$

$\Rightarrow \begin{cases} F_S = T \Rightarrow a = 0 & \text{IL CAVALLO SI MUOVE CON VELOCITA' COSTANTE} \\ F_S > T \Rightarrow a > 0 & \text{IL CAVALLO accelera in AVANTI} \\ F_S < T \Rightarrow a < 0 & \text{IL CAVALLO ACCELERA INDIETRO} \end{cases}$

- SLITTA



- SECONDA LEGGE DI NEWTON APPLICATA ALLA SLITTA

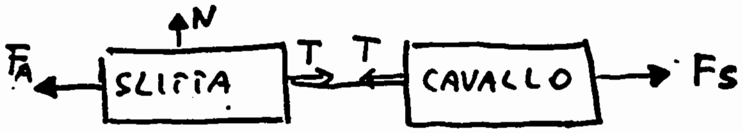
$$T - F_S = m_s a \qquad [\, m_s = \text{massa della slitta} \,]$$

$\Rightarrow \begin{cases} T = F_A \Rightarrow a = 0 & \text{LA VELOCITA' DELLA SLITTA E' COSTANTE (OPPURE NULLA)} \\ T > F_A \Rightarrow a > 0 & \text{LA SLITTA ACCELERA IN AVANTI} \end{cases}$

$T < F_A \Rightarrow a < 0$ LA SLITTA ACCELERA ALL'INDIETRO [TENDE A FERMARSI]

AZIONE E REAZIONE : ESEMPIO
CAVALLO PIÙ SLITTA

- μ_s = COEFFICENTE ATTRITO STATICO SLITTA-SUOLO = 0.5
- μ_D = " " DINAMICO " " = 0.4
- m_s = MASSA DELLA SLITTA = 100 kg
- m_c = MASSA DEL CAVALLO = 500 kg
- F_s = FORZA DEL CAVALLO = 800 N



- IPOTESI : FUNE PRIVA DI MASSA ~~ATTRITO~~ ⇒ LA TENSIONE È LA STESSA IN TUTTI I PUNTI DELLA FUNE

- IPOTESI : FUNE INESTENSIBILE ⇒ GLI SPOSTAMENTI DEL CAVALLO SONO UGUALI AGLI SPOSTAMENTI DELLA SLITTA ⇒ L'ACCELERAZIONE DEL CAVALLO È UGUALE A QUELLA DELLA SLITTA

- FORZA DI ATTRITO DELLA SLITTA

$$F_{A_s} = \mu_s \cdot N = \mu_s \cdot m_s \cdot g \qquad \text{[Forza di attrito statico]}$$

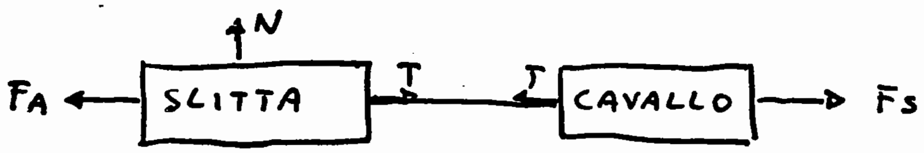
$$F_{Ad} = \mu_D \cdot N = \mu_d \cdot m_s \cdot g \qquad \text{[Forza di attrito dinamico]}$$

- LEGGE DI NEWTON PER IL CAVALLO E LA SLITTA

$$\begin{cases} F_s - T = m_c \cdot a \\ T - F_a = m_s \cdot a \end{cases}$$

- LE INCOGNITE SONO T E a (TENSIONE DELLA CORDA E ACCELERAZIONE DEL SISTEMA)

AZIONE E REAZIONE: ESEMPIO



$$\begin{cases} F_S - T = m_c \cdot a \\ T - F_a = m_s \cdot a \end{cases}$$

- SOMMIAMO LE DUE EQUAZIONI PER ELIMINARE T

$$F_S - \cancel{T} + \cancel{T} - F_a = m_c \cdot a + m_s \cdot a = (m_c + m_s)\, a$$

$$a = \frac{F_S - F_a}{m_c + m_s}$$

- LA SLITTA SI METTE IN MOTO SE $F_S > F_{a_S}$

$$F_S > \mu_s \cdot m_s \cdot g = 0.5 \cdot 100 \cdot 9.8 = 490\ N$$

$F_S = 800\ N \Rightarrow$ LA SLITTA SI MUOVE.

- PER TROVARE L'ACCELERAZIONE USIAMO L'ATTRITO DINAMICO

$$a = \frac{F_S - F_{A_D}}{m_c + m_s} = \frac{F_S - \mu_D \cdot m_s \cdot g}{m_c + m_s} = \frac{800 - 0.4 \cdot 100 \cdot 9.8}{500 + 100} = 0.68\ m/s^2$$

- TROVIAMO ORA LA TENSIONE DELLA FUNE USANDO, AD ESEMPIO, LA PRIMA EQUAZIONE

$$F_S - T = m_c \cdot a \Rightarrow T = F_S - m_c \cdot a =$$

$$= 800 - 500 \cdot 0.68 = \underline{460\ N}$$

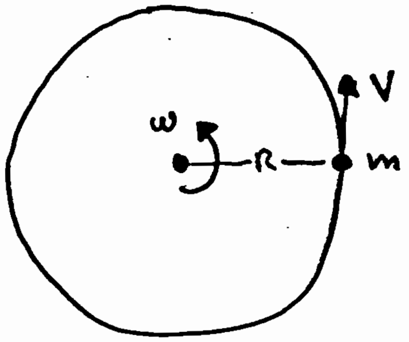
ESERCIZI CONSIGLIATI

Forza centripeta e forze apparenti

- Serway (3° Edizione) – Cap. 5
  - 13 – 15 – 17 – 21 – 47 – 49 – 51 – 53 – 55
- Halliday (5° Edizione) – Cap. 6
  - 35E – 37P – 39P – 41P

PROBLEMA
IL DISCO ROTANTE

UN BAMBINO SIEDE ALLA DISTANZA DI 1.50 m DAL CENTRO DI UN DISCO DI LEGNO IN ROTAZIONE. IL COEFFICIENTE DI ATTRITO STATICO TRA IL DISCO E IL BAMBINO È 0.30. QUANTO VALE LA VELOCITÀ ANGOLARE MASSIMA DEL DISCO PRIMA CHE IL BAMBINO COMINCI A SCIVOLARE VIA DAL DISCO?



$\omega = 1.40$ rad/s

$V = 2.1$ m/s

- IL DISCO ROTANTE È UN SISTEMA DI RIFERIMENTO NON INERZIALE. AFFINCHÈ IL BAMBINO RUOTI SOLIDARMENTE CON IL DISCO, CIOÈ SI MUOVA DI MOTO CIRCOLARE UNIFORME, DEVE ESSERCI UNA FORZA CENTRIPETA. QUESTA È DATA DALLA FORZA DI ATTRITO STATICO.

$F_c = m a_c$; $F_a = -\mu_s \cdot m g$; $a_c = -\frac{V^2}{R} = -\omega^2 R$; $\omega = \frac{V}{R}$

QUANDO LA FORZA DI ATTRITO NON RIESCE PIÙ A FORNIRE LA FORZA CENTRIPETA NECESSARIA, IL BAMBINO SI STACCA DAL DISCO.

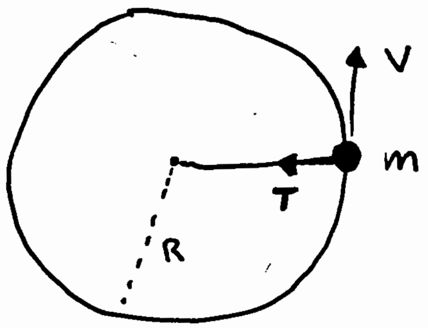
$$-\mu_s m g = -m \omega^2 R$$

$$\Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{g \cdot \mu_s}{R}} = \sqrt{\frac{9.8 \cdot 0.3}{1.5}} = 1.40 \text{ rad/s}$$

$$V = \omega R = 1.40 \cdot 1.5 = 2.1 \text{ m/s}$$

ESERCIZIO

UNA PALLA DI MASSA $m = 0.5$ kg E' ATTACCATA ALL' ESTREMITA' DI UNA CORDA LA CUI LUNGHEZZA E' 1.5 m. LA PALLA GIRA RAPIDAMENTE SU UNA CIRCONFERENZA ORIZZONTALE. SE LA CORDA PUO' SOPPORTARE UNA TENSIONE MASSIMA DI 50 N, QUAL E' LA MASSIMA VELOCITA' CHE LA PALLA PUO' AVERE PRIMA CHE LA CORDA SI SPEZZI ?



- LA TENSIONE T DELLA CORDA E' LA FORZA CENTRIPETA CHE PRODUCE IL MOTO CIRCOLARE UNIFORME DELLA MASSA m

$$a = \frac{V^2}{R}$$

$$T = m\,a = m\,\frac{V^2}{R}$$

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$$

DA CUI SI PUO' RICAVARE V

$$V = \sqrt{\frac{T \cdot R}{m}}$$

$$V_{max} = \sqrt{\frac{T_{max} \cdot R}{m}} = \sqrt{\frac{50 \cdot 1.5}{0.5}} = 12.2 \ m/s$$

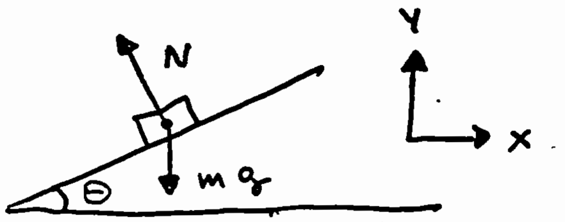
$$\omega = \frac{V}{R} \Rightarrow \omega_{max} = \frac{V_{max}}{R} = \frac{12.2}{\cancel{1}.5} = \frac{24.4}{3} \frac{rad}{s} = 8.1 \frac{rad}{s}$$

- 2π rad = 1 giro

$$\omega = 24.4 \frac{rad}{s} = 24.4 \ \frac{1}{2\pi} (giri) \cdot \frac{1}{1/60 \ (min)} = 24.4 \cdot \frac{60}{2\pi} = 233 \ \frac{giri}{minuto}$$

ESERCIZIO

UN INGEGNERE DESIDERA PROGETTARE UNA CORSIA D'USCITA, IN CURVA, PER UN'AUTOSTRADA, IN MODO TALE CHE L'AUTO NON DEBBA BASARSI SULL'ATTRITO PER COMPIERE LA CURVA SENZA SBANDARE. SI SUPPONGA CHE UN'AUTO, IN GENERE, FACCIA LA CURVA CON UNA VELOCITA' DI 13.4 m/s E CHE IL RAGGIO DELLA CURVA SIA 50 m. DI QUALE ANGOLO DOVREBBE ESSERE SOPRAELEVATA LA CURVA?



NON C'È ATTRITO

- SCOMPONIAMO LE FORZE LUNGO L'ASSE X E L'ASSE Y

$$\begin{cases} N\cos\theta - mg = m a_y \\ -N\sin\theta = m a_x \end{cases} \Rightarrow N = \frac{mg}{\cos\theta}$$

LUNGO L'ASSE Y L'AUTO NON SI MUOVE, QUINDI $a_y = 0$

LUNGO L'ASSE X L'ACCELERAZIONE a_x DEVE ESSERE PARI ALL'ACCELERAZIONE CENTRIPETA CHE CONSENTE ALLA MACCHINA DI COMPIERE LA CURVA

$$a_x = -\frac{V^2}{R}$$

$$\Rightarrow \frac{mg}{\cos\theta} \cdot \sin\theta = m\frac{V^2}{R}$$

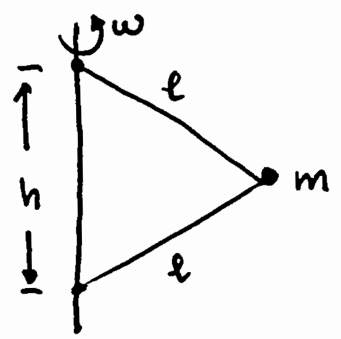
$$\operatorname{tg}\theta = \frac{V^2}{Rg} = \frac{13.4^2}{50 \cdot 9.8} = 0.366$$

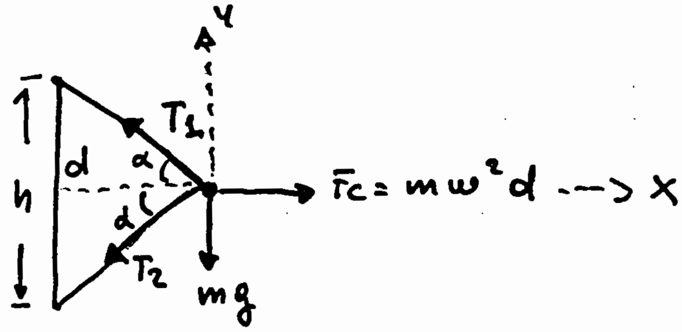
$$\theta = \operatorname{arctg} 0.366 = 20.1^\circ$$

N.B. $13.4\ \frac{m}{s} = 13.4 \cdot 3.6 = 48\ km/h$

ESERCIZIO

UNA PALLA DI MASSA $m = 2,5$ Kg È ATTACCATA MEDIANTE DUE FUNI DI UGUALE LUNGHEZZA $\ell = 1$ m A DUE PUNTI DI UNA SBARRA CILINDRICA VERTICALE DI SEZIONE TRASCURABILE, È DISTANZA RECIPROCA $h = 1.5$ m. L'INTERO SISTEMA RUOTA CON VELOCITA' ANGOLARE $\omega = 60$ giri/minuto ATTORNO ALL'ASSE DELLA SBARRA. TROVARE LA FORZA CHE CIASCUNA FUNE ESERCITA SULLA PALLA.





SULLA PALLA AGISCONO 4 FORZE, IN CONDIZIONE DI EQUILIBRIO LA SOMMA VETTORIALE DEVE ESSERE NULLA

- PROIEZIONE SULL'ASSE X

$$m\omega^2 d - T_1 \cos\alpha - T_2 \cos\alpha = 0$$

- PROIEZIONE SULL'ASSE Y

$$T_1 \sin\alpha - T_2 \sin\alpha - mg = 0$$

$$\sin\alpha = \frac{h}{2} \cdot \frac{1}{\ell} \quad ; \quad d = \ell \cdot \cos\alpha$$

$$m\omega^2 \ell \cancel{\cos}\alpha = (T_1 + T_2) \cancel{\cos}\alpha$$

$$(T_1 - T_2) \frac{h}{2\ell} = mg$$

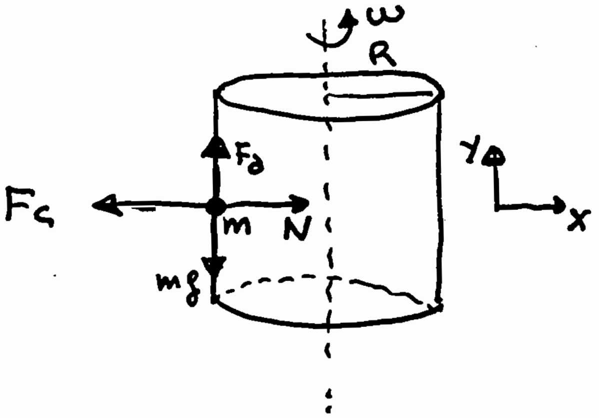
$[\omega = 2\pi \text{ rad/sec}]$

RISOLVENDO IL SISTEMA SI HA:

$$T_1 = m\ell \left(\frac{g}{h} + \frac{\omega^2}{2}\right) = 2.5 \cdot 1 \cdot \left(\frac{9.8}{1.5} + \frac{(2\pi)^2}{2}\right) = 65.7 \text{ N}$$

$$T_2 = T_1 - \frac{2mg\ell}{h} = m\ell\left(\frac{\omega^2}{2} - \frac{g}{h}\right) = 2.5 \cdot 1 \cdot \left(\frac{(2\pi)^2}{2} - \frac{9.8}{1.5}\right) = 33.0 \text{ N}$$

UN DIVERTIMENTO DA LUNA PARK CONSISTE IN UN GRANDE CILIN. VERTICALE CHE RUOTA ATTORNO AL SUO ASSE, TANTO VELOCEMENTE CHE UNA PERSONA, AL SUO INTERNO, E' BLOCCATA CONTRO LA PARETE, QUANDO IL PAVIMENTO E' TOLTO. IL COEFFICIENTE DI ATTRITO STATICO TRA LA PERSONA E LA PARETE E' $\mu_s = 0.4$. TROVARE IL MASSIMO PERIODO DI ROTAZIONE PER EVITARE CHE LA PERSONA CADA QUANDO $R = 4\,m$.



$$F_a = \mu_s \cdot N$$

$$F_c = m\omega^2 R$$

$$\omega = \frac{V}{R} = \frac{2\pi}{T}$$

- APPLICHIAMO $\vec{F} = m\vec{a}$ SCOMPONENDO LE FORZE NELLE PROIEZIONI LUNGO X E LUNGO Y

$$\begin{cases} N - F_c = m a_x \\ F_a - mg = m a_y \end{cases}$$

[affinchè il corpo non cada dobbiamo avere $a_x = 0$ e $a_y = 0$]

$$\Rightarrow \quad N = F_c = m\omega^2 R$$

$$mg = F_a = \mu_s \cdot N = \mu_s \cdot m\omega^2 R = \mu_s m R \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2$$

$$\Rightarrow \quad T = 2\pi\sqrt{\frac{R\mu_s}{g}}$$

- AFFINCHE' IL CORPO NON CADA $mg < F_{a\,max}$

$$\Rightarrow \quad T < 2\pi\sqrt{\frac{R\cdot\mu_s}{g}} = 2\pi\sqrt{\frac{4\cdot 0.4}{9.8}} = 2.54\ s$$

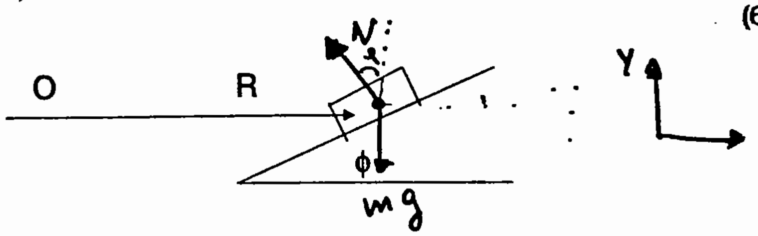
$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{2.54} = 2.47\ rad/s$$

$$\omega = 2.47\,\frac{rad}{s} = 2.47\cdot\frac{60}{2\pi}\,\frac{giri}{minuto} = 23.6\,\frac{giri}{minuto}$$

$$f = \frac{1}{T} = 0.39\,\frac{giri}{secondo} \Rightarrow 0.39\cdot 60 = 23.6\,\frac{giri}{minuto}$$

) Una macchina si trova a percorrere una curva di raggio R=300 m, inclinata rispetto all'orizzontale di un angolo ϕ= 5 gradi. Si assuma che non sia presente nessuna forza di attrito. Quale è la velocità con cui la macchina deve entrare in curva affinché non scivoli lungo il piano inclinato, rimanendo sempre alla stessa distanza dal centro della curva ? (N.B. si tenga presente che, nella figura, la velocità della macchina è ortogonale al foglio) 2A

(6 punti)



NON C'E' ATTRITO

PROIETTIAMO LE DUE FORZE LUNGO X E LUNGO Y

$$\begin{cases} N\cos\theta - mg = m a_y = 0 \quad \Rightarrow \quad N = \dfrac{mg}{\cos\theta} \\ -N\sin\theta = m a_x \end{cases}$$

$a_x = -\dfrac{V^2}{R}$ [ACCELERAZIONE CENTRIPETA]

$$-N\sin\theta = -m\frac{v^2}{R}$$

$$-\frac{mg}{\cos\theta}\sin\theta = -m\frac{v^2}{R}$$

$$\Rightarrow V^2 = Rg\,\mathrm{tg}\,\theta \quad \Rightarrow \quad V = \sqrt{Rg\,\mathrm{tg}\,\theta} = \sqrt{300\cdot 9.8\cdot \mathrm{tg}\,5} = 16.0\ \frac{m}{s}$$

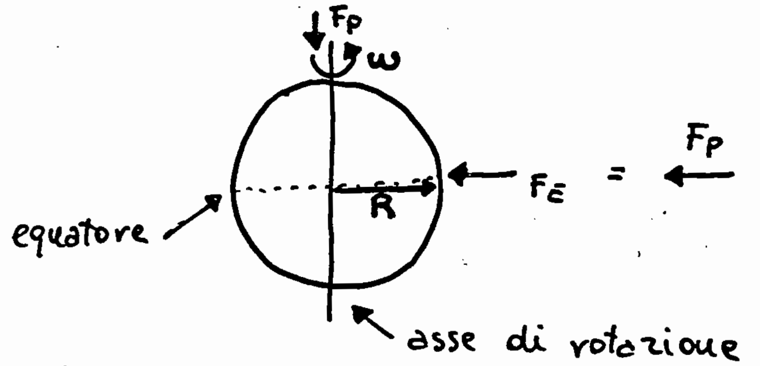
ESERCIZI CONSIGLIATI

Gravitazione

- Serway (3° Edizione) – Cap. 11
  - 1 – 3 – 5 – 7 – 11
- Halliday (5° Edizione) – Cap. 14
  - 1E – 3E – 5E – 7E – 9P – 11P – 15E – 21P

ESERCIZIO SULLA LEGGE DI GRAVITAZIONE

ESPLORANDO IL PIANETA EGABBAC, CHE ORBITA INTORNO ALLA STELLA TORRAC, SI USA UN DINAMOMETRO PER MISURARE IL PESO APPARENTE F_i DI UNA REPLICA DEL CHILOGRAMMO CAMPIONE. NEL POLO SI HA $F_P = 12.8$ N E ALL'EQUATORE SI HA $F_E = 10.1$ N. IL PERIODO DI ROTAZIONE DI EGABBAC INTORNO AL SUO ASSE E' $8.7 \cdot 10^3$ s. DETERMINARE LA MASSA DEL PIANETA E IL SUO RAGGIO.



$$F_E = F_P - m\omega^2 R$$

- UN CORPO SULLA SUPERFICIE DI UN PIANETA E' SOGGETTO A DUE FORZE

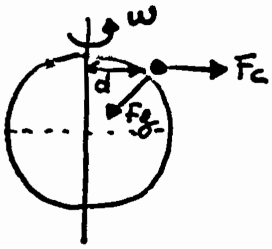
  - LA FORZA DI GRAVITA' DIRETTA VERSO IL CENTRO DEL PIANETA E' PARI A:

$$F_g = \underbrace{G}_{\text{costante di gravitazione universale}} \frac{\overbrace{m}^{\text{massa del corpo}} \overbrace{M}^{\text{massa del pianeta}}}{\underbrace{R^2}_{\text{raggio del pianeta}}}$$

  - LA FORZA CENTRIFUGA DIRETTA ORTOGONALMENTE ALL'ASSE DI ROTAZIONE DEL PIANETA E DIRETTA VERSO L'ESTERNO PARI A:

$$F_c = m\,\omega^2 d \rightarrow \text{distanza dall'asse di rotazione}$$

$\omega \rightarrow$ pulsazione $= \frac{2\pi}{T}$; T = periodo di rotazione



N.B. LA FORZA CENTRIFUGA E' NULLA AL POLO E MASSIMA ALL'EQUATORE

ESERCIZIO GRAVITAZIONE [... CONTINUA]

- QUINDI AL POLO SI HA:

$$F_P = m\frac{GM}{R^2} \Rightarrow 1\cdot\frac{GM}{R^2} = 12.8\ N \qquad [m = 1\,Kg]$$

- ALL'EQUATORE SI HA:

$$F_E = m\frac{GM}{R^2} - m\omega^2 R = 1\cdot\left[\frac{GM}{R^2} - \omega^2 R\right] = 10.1\ N$$

- TROVIAMO ω DAL PERIODO DI ROTAZIONE

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{8.7\cdot10^3} = 7.2\cdot10^{-4}\ \frac{rad}{s} \qquad \left[\begin{array}{l}\text{TERRA: } T = 86400\ s \\ \omega = 7.3\cdot10^{-5}\ rad/s\end{array}\right.$$

- RICAVIAMO LA FORZA CENTRIFUGA $m\omega^2 R$

$$F_E = F_P - \omega^2 R \Rightarrow \underline{\omega^2 R} = F_P - F_E = 12.8 - 10.1 = \underline{2.7\ N}$$

- DA QUI RICAVIAMO IL RAGGIO DEL PIANETA

$$\underline{R} = \frac{F_c}{\omega^2} = \frac{2.7}{(7.2\cdot10^{-4})^2} = \underline{5.21\cdot10^6\ m} \qquad [\text{TERRA: } R = 6.37\cdot10^6\,m]$$

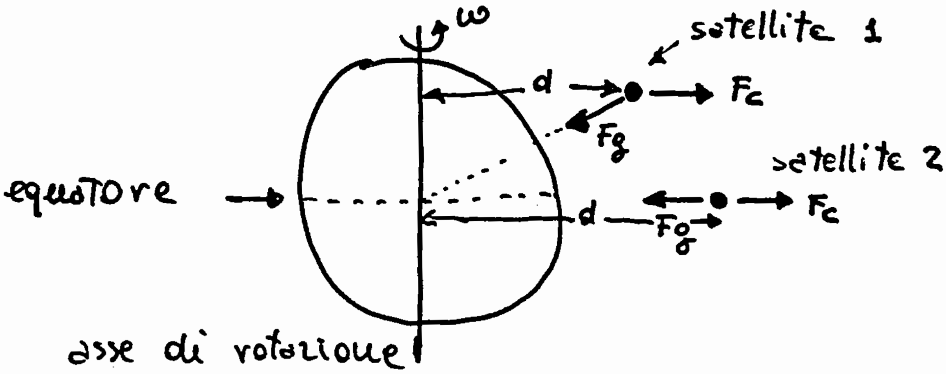
- DALLA CONOSCENZA DEL RAGGIO E DELLA FORZA PESO AL POLO RICAVIAMO LA MASSA DEL PIANETA

$$F_P = G\frac{M}{R^2} \Rightarrow M = \frac{F_P\cdot R^2}{G} = \frac{12.8\cdot(5.21\cdot10^6)^2}{6.67\cdot10^{-11}} = 5.21\cdot10^{24}\,kg$$

$$[\text{TERRA: } M = 5.97\cdot10^{24}\,Kg]$$

ORBITA GEOSTAZIONARIA

TROVARE A QUALE DISTANZA DAL CENTRO DELLA TERRA (E QUALE DEVE ESSERE IL PIANO DELL'ORBITA) DEVE VIAGGIARE UN SATELLITE, AFFINCHE' RISPETTO ALLA TERRA ESSO RISULTI IMMOBILE (SATELLITE PER TELECOMUNICAZIONI)



$$F_c = m\omega^2 d$$

- SUL SATELLITE AGISCONO DUE FORZE, LA FORZA DI GRAVITA' E LA FORZA CENTRIFUGA
- AFFINCHE' IL SATELLITE APPAIA IMMOBILE RISPETTO ALLA TERRA (SISTEMA NON INERZIALE) LA FORZA DI GRAVITA' DEVE ESSERE COMPENSATA DALLA FORZA CENTRIFUGA
  QUESTO E' POSSIBILE SOLO PER I SATELLITI LA CUI ORBITA COINCIDE CON IL PIANO DELL'EQUATORE.
- AFFINCHE' APPAIANO IMMOBILI RISPETTO ALLA TERRA IL LORO PERIODO DI ROTAZIONE DEVE ESSERE UGUALE A QUELLO DELLA TERRA [24 ORE] $\Rightarrow \left[\omega = 7.3\cdot 10^{-5}\ rad/s\right]$

$$\Rightarrow \quad F_g = F_c \quad \Rightarrow \quad G\frac{\cancel{m}M}{d^2} = \cancel{m}\omega^2 d \quad \Rightarrow \quad d^3 = \frac{GM}{\omega^2}$$

$$d = \left(\frac{GM}{\omega^2}\right)^{1/3} = \left(\frac{6.67\cdot 10^{-11}\cdot 5.97\cdot 10^{24}}{(7.3\cdot 10^{-5})^2}\right)^{1/3} = \underline{42.1\cdot 10^{6}\ m}$$

RISPETTO ALLA SUPERFICIE TERRESTRE SI HA:

$$R = d - R_T = 42.1\cdot 10^6 - 6.37\cdot 10^6 \simeq 36\cdot 10^3\ km$$

Esercizio 2 (Esempio di un quiz) (7 punti)

a) Quanto vale la velocità angolare a cui la Terra dovrebbe ruotare affinché la forza centripeta all'equatore sia uguale al peso di un corpo ivi situato?
b) Se la terra ruotasse a questa velocità, quanto varrebbe la durata di un giorno?
c) Se un uomo che pesa ordinariamente 900 N stesse in piedi su una bilancia pesapersone situata sull'equatore, quale sarebbe l'indicazione della bilancia?
($M_T = 5.98 \cdot 10^{24}$ Kg ; $R_T = 6.37 \cdot 10^6$ m ; G $= 6.67 \cdot 10^{-11}\ m^3 \cdot s^{-2} \cdot Kg^{-1}$)
Mettere una croce sulla risposta esatta

a) ☐ $\omega = \frac{1}{R_T} \cdot \sqrt{GM_T}$; ☒ $\omega = \sqrt{\frac{g}{R_T}}$; ☐ $\omega = 2\pi \frac{m}{M_T}\sqrt{\frac{g}{R_T}}$; ☐ $\omega = 30$ giri/min. ;

☐ **altro risultato:**

• LA FORZA CENTRIFUGA DEVE UGUAGLIARE LA FORZA PESO

$$m\omega^2 R_T = mg$$

$$\omega^2 = \frac{g}{R_T} \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{g}{R_T}} = \sqrt{\frac{9.8}{6.37 \cdot 10^6}} = 1.24 \cdot 10^{-3}$$

b) ☐ T= 6 ore; ☐ T= 1 min. ; ☒ T= $5.1 \cdot 10^3$ s ; ☐ T= 3 giorni ;

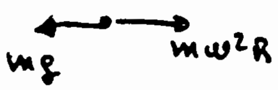
☐ **Altro risultato:**

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{1.24 \cdot 10^{-3}} = 5.1 \cdot 10^3 \text{ s}$$

c) ☐ P= 900 N ; ☒ P= 0 ; ☐ P= 20 N ; ☐ P= 10^4 N ;

☐ **altro risultato:**

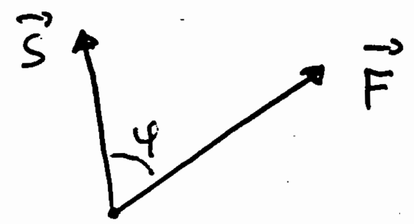
DATO CHE LA FORZA PESO E LA FORZA CENTRIFUGA SI BILANCIANO,
LA BILANCIA PESERA' ZERO.



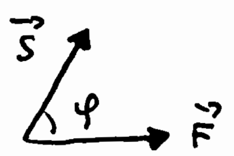
LAVORO

IN FISICA IL LAVORO NON HA LO STESSO SIGNIFICATO DI QUELLO IN USO NELLA VITA QUOTIDIANA

$$L = \vec{F} \cdot \vec{S} = F S \cos \varphi$$



- $\vec{S}$ È LO SPOSTAMENTO DEL PUNTO DI APPLICAZIONE DELLA FORZA $\vec{F}$. SE, PER ESEMPIO, LA FORZA $\vec{F}$ È APPLICATA AD UN PUNTO MATERIALE, S È LO SPOSTAMENTO DEL PUNTO.
- IL LAVORO È NULLO QUANDO:
  - LA FORZA È NULLA
  - LO SPOSTAMENTO È NULLO
  - L'ANGOLO TRA LA FORZA E LO SPOSTAMENTO È DI $90°$, CIOÈ FORZA E SPOSTAMENTO SONO PERPENDICOLARI
- IL LAVORO PUÒ ESSERE POSITIVO O NEGATIVO
  - $\cos \varphi > 0 \Rightarrow L$ POSITIVO



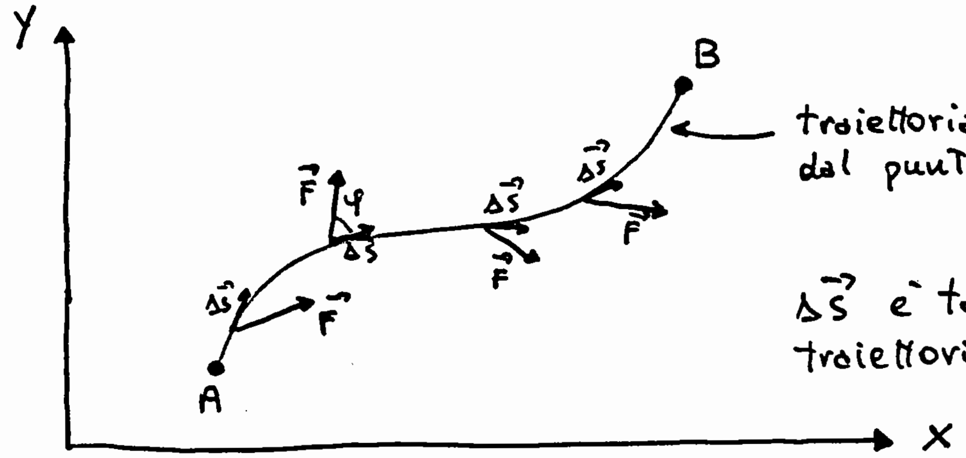
  - $\cos \varphi < 0 \Rightarrow L$ NEGATIVO

- IL LAVORO SI MISURA IN $N \cdot m$ = JOULE J

$$1\,J = kg \cdot m^2\, s^{-2}$$

LAVORO

CALCOLIAMO IL LAVORO DI UNA FORZA VARIABILE CHE AGISCE SU UN CORPO CHE SI SPOSTA DA UN PUNTO A FINO A B



- DIVIDIAMO LA TRAIETTORIA IN TANTI SPOSTAMENTI ELEMENTARI $\vec{\Delta s}$

$$\Rightarrow \quad \Delta L_i = \vec{F_i} \cdot \vec{\Delta S_i} = F_i \, \Delta S_i \cos\varphi$$

- IL LAVORO TOTALE PER ANDARE DA A a B È LA SOMMA DEI LAVORI ELEMENTARI

$$L_{AB} = \sum_{1}^{n} {}_i \, \vec{F_i} \cdot \vec{\Delta S_i}$$

- SE $\Delta \vec{S_i} \to 0 \Rightarrow \sum_i$ DIVENTA UN INTEGRALE DI LINEA

$$L_{AB} = \lim_{\Delta s \to 0} \sum_{i}^{n} \vec{F_i} \cdot \vec{\Delta S_i} = \int_A^B \vec{F} \cdot \vec{ds} = \int_A^B F \, ds \cos\varphi$$

$$dL = \vec{F} \cdot \vec{ds} \qquad \text{lavoro elementare}$$

- SE CONSIDERIAMO $\vec{F}$ COSTANTE E UNIFORME, CIOÈ NON DIPENDE DAL TEMPO E DALLO SPAZIO, ABBIAMO:

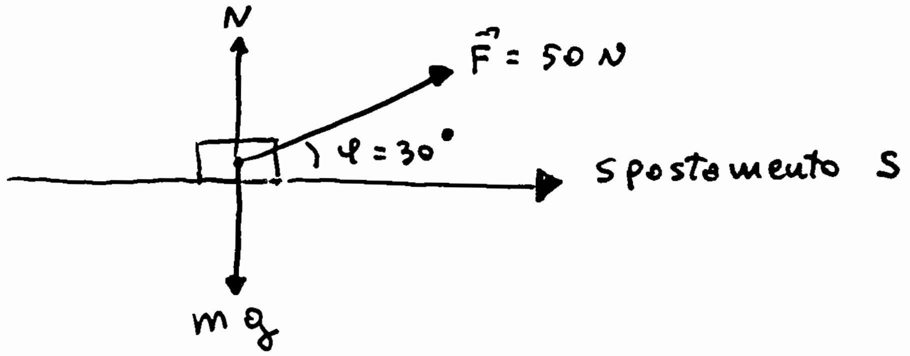
$$\underline{L_{AB}} = \int_A^B \vec{F} \cdot \vec{ds} = \vec{F} \cdot \int_A^B \vec{ds} = \vec{F} \cdot \vec{AB} = \underline{\vec{F} \cdot \vec{S}}$$

- NOI FAREMO ESEMPI CON QUESTO TIPO DI FORZE

ESEMPIO 6.1 (SERWAY)

UN UOMO TIRA UN ASPIRAPOLVERE CON UNA FORZA DI MODULO $F = 50\ N$ A UN ANGOLO DI $30°$. L'ASPIRAPOLVERE VIENE TIRATO PER UNA DISTANZA DI $3{,}0\ m$.

CALCOLARE IL LAVORO SVOLTO DALLA FORZA DI $50\ N$.



- LAVORO FORZA PESO

$$L_{mg} = m\vec{g} \cdot \vec{S} = mg \cdot S \cdot \cos 90° = 0$$

- LAVORO FORZA DI REAZIONE

$$L_N = \vec{N} \cdot \vec{S} = N \cdot S \cdot \cos 90° = 0$$

- LAVORO FORZA F

$$L_F = \vec{F} \cdot \vec{S} = F S \cos \varphi = 50 \cdot 3 \cdot \cos 30° = 130\ J$$

– COMPIE LAVORO SOLO LA PROIEZIONE DELLA FORZA LUNGO LO SPOSTAMENTO

N.B. SE FOSSE STATA PRESENTE UNA FORZA DI ATTRITO, QUESTA AVREBBE COMPIUTO LAVORO, PERCHE' E' SEMPRE NELLA DIREZIONE DELLO SPOSTAMENTO.

IL LAVORO SAREBBE STATO NEGATIVO O POSITIVO?

TEOREMA DELL'ENERGIA CINETICA

DIMOSTRIAMO IL TEOREMA NEL CASO DI UNA FORZA COSTANTE ED UNIFORME, MA ESSO E' VALIDO PER QUALSIASI TIPO DI FORZA

N.B. STIAMO SEMPRE CONSIDERANDO UN PUNTO MATERIALE

PRENDIAMO UN PUNTO DI MASSA m CHE SI STA MUOVENDO SOTTO L'AZIONE DI UNA FORZA $\vec{F}$.

LA FORZA E LO SPOSTAMENTO HANNO LA STESSA DIREZIONE

$$L_{AB} = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{s} \Rightarrow \vec{F} \cdot \vec{S} = FS = (ma)s$$

- DATO CHE SI TRATTA DI UN MOTO UNIFORMEMENTE ACCELERATO (F COSTANTE $\Rightarrow$ a = COSTANTE) ABBIAMO

$$a = \frac{V_B - V_A}{t} \qquad S = \overline{V} \cdot t = \frac{1}{2}(V_A + V_B) \cdot t$$

$$L_{AB} = m\left(\frac{V_B - V_A}{t}\right)\frac{1}{2}(V_A + V_B)t$$

$$L_{AB} = \frac{1}{2} m V_B^2 - \frac{1}{2} m V_A^2$$

- $\frac{1}{2} m V^2$ VIENE CHIAMATA ENERGIA CINETICA DEL CORPO

$$L_{AB} = K_B - K_A = \Delta K \qquad \left[K = \frac{1}{2} m v^2\right]$$

IL LAVORO SVOLTO E' UGUALE ALLA VARIAZIONE DI ENERGIA CINETICA DEL CORPO

ENERGIA CINETICA

UN CORPO DI MASSA m IN MOTO A VELOCITA' v POSSIEDE UN ENERGIA CINETICA PARI A

$$K = \frac{1}{2} m v^2$$

AD UNA VARIAZIONE DI ENERGIA CINETICA DEL CORPO CORRISPONDE UN TRASFERIMENTO DI ENERGIA TRA IL CORPO E L'AMBIENTE ESTERNO

- SE K AUMENTA $\Rightarrow$ IL CORPO RICEVE ENERGIA
- SE K DIMINUISCE $\Rightarrow$ IL CORPO CEDE ENERGIA
- LO SCAMBIO DI ENERGIA SI IDENTIFICA CON UN LAVORO FATTO SUL CORPO (K AUMENTA) O RICEVUTO DAL CORPO (K DIMINUISCE)

$$\Delta K = L$$

- L SI IDENTIFICA CON IL LAVORO MECCANICO $\vec{F} \cdot \vec{s}$.
- N.B. IN CASI COMPLESSI (AD ESEMPIO ATTRITO) NON E' SEMPRE POSSIBILE CALCOLARE ESPLICITAMENTE IL LAVORO, MA VALE SEMPRE $L = \Delta K$

LAVORO COMPIUTO DA PIÙ FORZE

SE PIÙ DI UNA FORZA AGISCE SU UN CORPO, DOVREMO CALCOLARE IL LAVORO COMPIUTO DALLA FORZA RISULTANTE.

$$L_{TOTALE} = (\Sigma \vec{F}) \cdot \vec{S} =$$

$$= \vec{F_1} \cdot \vec{S} + \vec{F_2} \cdot \vec{S} + \dots + \vec{F_n} \cdot \vec{S} =$$

$$= L_1 + L_2 + \dots + L_n$$

- IL TEOREMA DELL'ENERGIA CINETICA DICE CHE:

$$L_{TOT} = \Delta K = K_{FINALE} - K_{INIZIALE}$$

$$L_1 + L_2 + \dots + L_n = \Delta K$$

- SE CONOSCIAMO ΔK E SAPPIAMO CALCOLARE TUTTI I LAVORI, TRANNE UNO, POSSIAMO SCRIVERE:

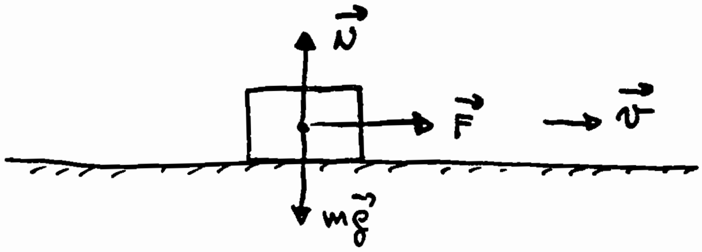
$$L_n = \Delta K - L_1 - L_2 - \dots - L_{n-1}$$

ESEMPIO:

IL LAVORO COMPIUTO DALLA FORZA DI ATTRITO SI RICAVA DI SOLITO COME DIFFERENZA

SERWAY ESEMPIO 6-5

UN BLOCCO DI 6.0 Kg, INIZIALMENTE FERMO, È TIRATO DA UNA FORZA COSTANTE DI 12 N DIRETTA LUNGO UN ASSE ORIZZONTALE SU UNA SUPERFICIE ORIZZONTALE LISCIA. TROVARE LA VELOCITÀ DEL BLOCCO DOPO CHE SI È SPOSTATO DI 3.0 m.



- IL PIANO È LISCIO, QUINDI NON VI È FORZA DI ATTRITO
- PER TROVARE LA VELOCITÀ USIAMO IL TEOREMA DELL'ENERGIA CINETICA

$$L = \Delta K = K_f - K_i$$

- L È IL LAVORO FATTO DA TUTTE LE FORZE CHE AGISCONO SUL BLOCCO.
  - LA FORZA DI GRAVITÀ $m\vec{g}$ E LA REAZIONE DEL PIANO NON COMPIONO LAVORO PERCHÉ SONO ORTOGONALI ALLO SPOSTAMENTO

- CALCOLIAMO IL LAVORO DELLA FORZA $\vec{F}$

$$L = \vec{F} \cdot \vec{s} = F \cdot s = 12 \cdot 3 = 36 \text{ J}$$

- $\Delta K = K_f - K_i = \frac{1}{2} m v_f^2 - 0 = L$

$$\Rightarrow v_f^2 = \frac{2L}{m} \Rightarrow v_f = \sqrt{\frac{2L}{m}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 36}{6}} = \underline{3.5 \text{ m/s}}$$

N.B. ACCELERAZIONE DEL BLOCCO $= \frac{F}{m} = \frac{12}{6} = 2.0 \text{ m/s}^2$

- LA VELOCITÀ FINALE SI PUÒ ANCHE TROVARE USANDO LE FORMULE DEL MOTO UNIFORMEMENTE ACCELERATO

POTENZA

- DA UN PUNTO DI VISTA PRATICO E' IMPORTANTE CONOSCERE NON SOLO IL LAVORO SVOLTO SU UN OGGETTO, MA ANCHE LA RAPIDITA CON CUI IL LAVORO E' SVOLTO.

- SI DEFINISCE POTENZA LA RAPIDITA' CON CUI VIENE SVOLTO IL LAVO

- POTENZA MEDIA :

$$\bar{P} = \frac{L}{\Delta t}$$

- POTENZA ISTANTANEA

$$P = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{L}{\Delta t} = \frac{dL}{dt}$$

- LA POTENZA PUO' ANCHE ESSERE ESPRESSA COME (F COSTANTE):

$$P = \frac{dL}{dt} = \frac{d(\vec{F} \cdot \vec{s})}{dt} = \vec{F} \cdot \frac{d\vec{s}}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v}$$

- L'UNITA' DI MISURA DELLA POTENZA E' IL WATT

$$1\ W = 1\ \frac{J}{s}$$

- NEL SISTEMA BRITANNICO DEGLI INGEGNERI SI USA IL CAVALLO VAPO

$$1\ Cv = 735.5\ W = 0.74\ Kw$$

- NELLA PRATICA SI MISURA L'ENERGIA IN Kwh

$$L = P \cdot t$$

$$1\ Kwh = 1000\ W \cdot 3600\ s = 3.60 \cdot 10^6\ J$$

N.B.

NELLA BOLLETTA DELL'ENEL SI PAGA L'ENERGIA E NON LA POTENZA

ESEMPIO 6.8 (Serway)

UN ASCENSORE DI MASSA 1000 kg HA UNA PORTATA MASSIMA DI 800 kg. UNA FORZA D'ATTRITO COSTANTE $f = 4000$ N RITARDA IL SUO MOTO VERSO L'ALTO. a) QUALE DEVE ESSERE LA MINIMA POTENZA EROGATA DAL MOTORE PER FAR SALIRE L'ASCENSORE CON UNA VELOCITÀ COSTANTE DI 3,00 m/s? b) QUALE POTENZA DEVE EROGARE IL MOTORE IN OGNI ISTANTE PER AVERE UN'ACCELERAZIONE VERSO L'ALTO DI 1,0 m/s²

- DATO CHE $a = 0$ SI DEVE AVERE:

$$T - f - mg = 0$$

T: tensione delle corde fornite dal motore

$$T = f + mg =$$
$$= 4.0 \cdot 10^3 + 1.8 \cdot 10^3 \cdot 9.8 = 2.16 \cdot 10^4 \text{ N}$$

- RICAVIAMO LA POTENZA

$$P = \vec{T} \cdot \vec{v} = T v = 2.16 \cdot 10^4 \cdot 3.00 = 6.48 \cdot 10^4 \text{ W} =$$
$$= 64.8 \text{ kW}$$

- ACCELERAZIONE COSTANTE

$$T - f - mg = ma$$
$$T = m(a+g) + f =$$
$$= 1.8 \cdot 10^3 \cdot (1.0 + 9.8) + 4 \cdot 10^3 = 2.34 \cdot 10^4 \text{ N}$$

- SUPPONIAMO CHE IL PALAZZO SIA ALTO 30 m E CHE L'ASCENSORE PARTA DA FERMO. TROVIAMO LA VELOCITÀ MASSIMA A CUI CORRISPONDERÀ LA POTENZA MASSIMA

$$V_{MAX} = \sqrt{2 \cdot a \cdot h} = \sqrt{2 \cdot 1 \cdot 30} = 7.75 \text{ m/s}$$

$$P_{MAX} = T \cdot V_{MAX} = 2.34 \cdot 10^4 \cdot 7.75 = 18 \cdot 10^4 \text{ W} = 180 \text{ kW}$$

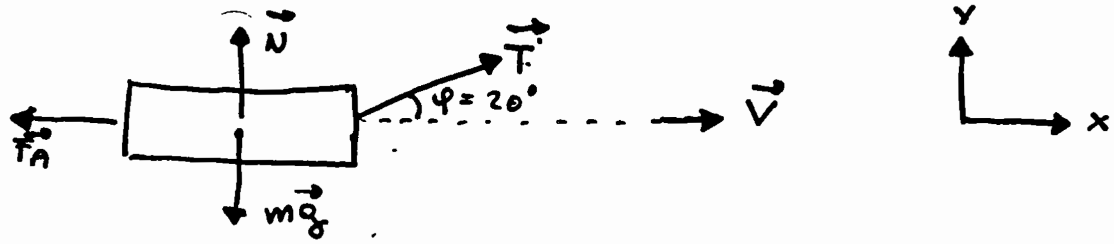
ESERCIZI CONSIGLIATI

Lavoro ed energia cinetica

- Serway (3° Edizione) – Cap. 6
  - 1 – 3 – 5 – 7 – 9 – 11 – 13 – 19 – 21 – 23 – 25 – 29 – 31 – 33 – 35 – 37 – 39 – 43 – 53 – 55 – 57
- Halliday (5° Edizione) – Cap. 7
  - 1E – 3E – 5P – 7E – 9E – 11P – 13P – 15E – 17P – 19P – 21E – 23P – 25E – 29E – 31P – 33P

SERWAY 6-25

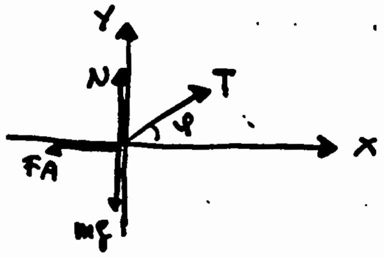
UN CARRELLO CARICO DI MATTONI HA UNA MASSA TOTALE DI 18.0 Kg ED È TRAINATO A UNA VELOCITA' COSTANTE DA UNA FUNE. LA FUNE È INCLINATA DI 20.0° SULL'ORIZZONTALE E IL CARRELLO SI MUOVE A UNA DISTANZA DI 20.0 cm SULLA SUPERFICIE ORIZZONTALE. IL COEFFICIENTE DI ATTRITO DINAMICO TRA CARRELLO E SUPERFICIE È 0.5. a) QUAL'È LA TENSIONE DELLA FUNE? b) QUANTO LAVORO COMPIE LA FUNE SUL CARRELLO? c) QUAL'È L'ENERGIA DISSIPATA PER ATTRITO?



- IL CARRELLO SI MUOVE A VELOCITA' COSTANTE, QUINDI SI HA:

$$\sum_i \vec{f}_i = \vec{T} + m\vec{g} + \vec{F}_A + \vec{N} = 0$$

- PROIETTIAMO LE FORZE SUGLI ASSI X E Y



$$\boxed{F_A = \mu_D \cdot N}$$

- ASSE X : $T \cdot \cos\varphi - F_A = T\cos\varphi - \mu_D \cdot N = 0$
- ASSE Y : $T\sin\varphi + N - mg = 0$
- ABBIAMO DUE INCOGNITE: LA TENSIONE T E LA REAZIONE DEL PIANO $\vec{N}$

SERWAY 6-25 [... CONTINUA ...]

$$\begin{cases} T\cos\varphi - \mu_D \cdot N = 0 \\ T\sin\varphi + N - mg = 0 \end{cases}$$

- RICAVIAMO N DALLA SECONDA EQUAZIONE

$$N = mg - T\sin\varphi \quad [\text{si noti che } N < mg]$$

- INSERIAMO N NELLA PRIMA EQUAZIONE

$$T\cos\varphi - \mu_D \cdot (mg - T\sin\varphi) = T\cos\varphi - \mu_D mg + \mu_D T\sin\varphi = 0$$

$$\Rightarrow T(\cos\varphi + \mu_D \sin\varphi) = \mu_D \cdot mg$$

$$\Rightarrow T = \frac{\mu_D \cdot mg}{\cos\varphi + \mu_D \cdot \sin\varphi} = \frac{0.5 \cdot 18 \cdot 9.8}{\cos 20 + 0.5 \cdot \sin 20} = \underline{79.4\ N}$$

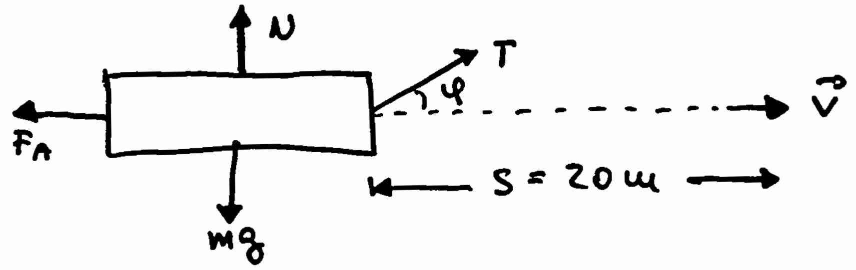
- LA TENSIONE DELLA FUNE E' DI 79.4 N

- DA NOTARE CHE SE $T\sin\varphi \geq mg \Rightarrow N \leq 0$.
QUESTO VUOL DIRE CHE LA COMPONENTE VERTICALE DELLA TENSIONE E' SUFFICIENTE A TENERE SOLLEVATO IL BLOCCO SENZA CHE IL PIANO DEBBA ESERCITARE UNA FORZA DI REAZIONE NORMALE.

→ SI NOTI BENE CHE STIAMO TRATTANDO IL CARRELLO COME UN PUNTO MATERIALE. NELLA VITA REALE LE COSE SONO DIVERSE ED OCCORRE CONSIDERARE ANCHE I MOMENTI DELLE FORZE.

$$T = \frac{mg}{\sin\varphi} = \frac{18 \cdot 9.8}{\sin 20} = \underline{516\ N}$$

SERWAY 6.5 [... CONTINUA ...]



- CALCOLIAMO ORA IL LAVORO DELLA TENSIONE T PER UNO SPOSTAMENTO DI 20 m

$$L_T = \vec{T} \cdot \vec{S} = T S \cos \varphi = 79.4 * 20 * \cos 20 = \underline{1.49 \text{ kJ}}$$

- LA FORZA NORMALE $\vec{N}$ E LA FORZA DI GRAVITA' mg NON COMPIONO LAVORO PERCHE' SONO ORTOGONALI ALLO SPOSTAMENTO.

- CALCOLIAMO IL LAVORO FATTO DALLA FORZA DI ATTRITO

$$N = mg - T \sin \varphi = 18 \cdot 9.8 - 79.4 \cdot \sin 20 = \underline{149.2 \text{ N}}$$

$$F_a = \mu_D \cdot N = 0.5 \cdot 149.2 = \underline{74.6 \text{ N}}$$

$$L_A = \vec{F_A} \cdot \vec{S} = F_a \cdot S \cdot \cos 180° = -F_a \cdot S = -74.6 \cdot 20 = \underline{-1.49 \text{ kJ}}$$

- DA NOTARE CHE IL LAVORO DELLA FORZA DI ATTRITO E' UGUALE (IN MODULO) AL LAVORO DELLA TENSIONE T. QUINDI TUTTO IL LAVORO DELLA TENSIONE DELLA FUNE VIENE DISSIPATO IN CALORE

$$L_{TOTALE} = \left(\Sigma_i \vec{f_i}\right) \cdot \vec{S} \Rightarrow \text{(nel nostro caso)} \quad 0 \cdot \vec{S} = 0$$

la somma delle forze è nulla

$$\Rightarrow \vec{T} \cdot \vec{S} + m\vec{g} \cdot \vec{S} + \vec{F_a} \cdot \vec{S} + \vec{N} \cdot \vec{S} = 0$$

$$\Rightarrow \vec{T} \cdot \vec{S} + 0 + \vec{F_a} \cdot \vec{S} + 0 = 0$$

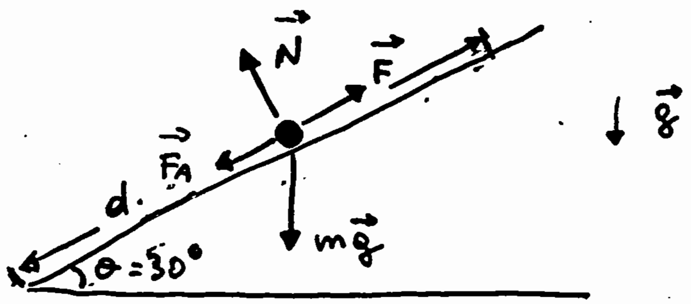
$$\Rightarrow \boxed{\vec{F_a} \cdot \vec{S} = -\vec{T} \cdot \vec{S}}$$

ESERCIZIO SUL LAVORO

UN BLOCCO DI MASSA 10 Kg SI TROVA ALLA BASE DI UN PIANO INCLINATO SCABRO FORMANTE UN ANGOLO DI 30° CON L'ORIZZONTALE. IL BLOCCO VIENE FATTO RISALIRE LUNGO IL PIANO PER UNA DISTANZA DI 5m A VELOCITA' COSTANTE DA UNA FORZA $\vec{F}$ PARALLELA AL PIANO STESSO. SAPENDO CHE IL COEFFICIENTE DI ATTRITO DINAMICO TRA IL PIANO E IL BLOCCO E' DI 0.4, TROVARE:

a) IL VALORE DELLA FORZA $\vec{F}$

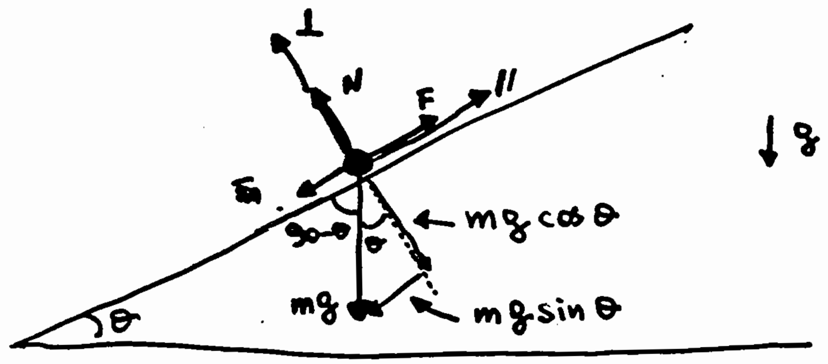
b) IL LAVORO COMPIUTO DALLE SINGOLE FORZE AGENTI SUL BLOCCO.



- SUL BLOCCO AGISCONO QUATTRO FORZE

  - LA FORZA DI GRAVITA' $m\vec{g}$ DIRETTA VERSO IL BASSO
  - LA REAZIONE $\vec{N}$ DEL PIANO ORTOGONALE AL PIANO
  - LA FORZA DI ATTRITO DINAMICO $|\vec{F_A}| = \mu_D \cdot |\vec{N}|$ PARALLELA AL PIANO E DIRETTA IN VERSO OPPOSTO AL MOTO
  - LA FORZA $\vec{F}$ PARALLELA AL PIANO E DIRETTA NEL VERSO DEL MOTO DEL BLOCCO

ESERCIZIO SUL LAVORO [...CONTINUA...]



- DATO CHE IL BLOCCO SI MUOVE A VELOCITA' COSTANTE SI HA:

$$\sum_i \vec{F}_i = 0$$

$$\vec{F} + \vec{F}_A + \vec{N} + m\vec{g} = 0 \qquad [F_A = \mu_D N]$$

- PROIETTIAMO LE FORZE SU UN ASSE PARALLELO AL PIANO (//) ED UN ASSE ORTOGONALE AL PIANO (⊥)

$$\begin{cases} F - F_A - mg\sin\theta = 0 & \text{(asse parallelo)} \\ N - mg\cos\theta = 0 & \text{(asse perpendicolare)} \end{cases}$$

$\Rightarrow \quad N = mg\cos\theta = 10 \cdot 9.8 \cdot \cos 30° = 84.9\ N$

$\Rightarrow \quad F = mg\sin\theta + F_a = mg\sin\theta + \mu_D \cdot mg\cos\theta =$

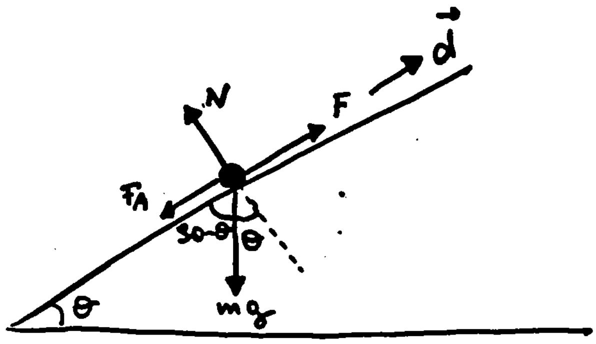
$= mg(\sin\theta + \mu_D \cdot \cos\theta) =$

$= 10 \cdot 9.8 \cdot (\sin 30° + 0.4 \cdot \cos 30°) = \underline{82.9\ N}$

N.B. SENZA ATTRITO ($\mu_D = 0$) AVREMMO AVUTO:

$F = mg\sin\theta = 10 \cdot 9.8 \cdot \sin 30° = 49.0\ N$

ESERCIZIO SUL LAVORO [CONTINUA]



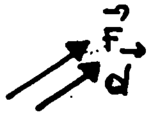
- CALCOLIAMO IL LAVORO DELLE SINGOLE FORZE

$$L = \vec{F} \cdot \vec{S} = |\vec{F}| \cdot |\vec{S}| \cos \varphi$$

- LO SPOSTAMENTO DEL BLOCCO È $d = 5\,m$
- VALUTIAMO L'ANGOLO φ (ANGOLO TRA SPOSTAMENTO E FORZA) PER LE QUATTRO FORZE

FORZA $\vec{F}$

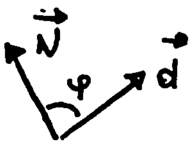
LO SPOSTAMENTO È PARALLELO ALLA FORZA



$\Rightarrow \varphi = 0$

FORZA $\vec{N}$

LO SPOSTAMENTO È ORTOGONALE ALLA FORZA



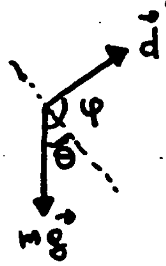
$\Rightarrow \varphi = 90°$

FORZA $\vec{F_A}$

LO SPOSTAMENTO È IN VERSO OPPOSTO ALLA FORZA

$\Rightarrow \varphi = 180°$

FORZA $m\vec{g}$



$\Rightarrow \varphi = 90° + \theta$

ESERCIZIO SUL LAVORO [... CONTINUA]

- POSSIAMO ORA TROVARE IL LAVORO

$$L = \vec{F} \cdot \vec{S} = |\vec{F}| \cdot |\vec{S}| \cdot \cos \varphi$$

- FORZA $\vec{F}$

$$L = F d \cos \varphi = mg(\sin\theta + \mu_d \cos\theta) \cdot d \cdot \cos 0° =$$

$$= 82.95 * 5 * 1 = \underline{414.7 \text{ J}}$$

- FORZA $\vec{N}$

$$L = N d \cos \varphi = mg \cos\theta \cdot d \cdot \cos 90° = 84.9 \cdot 5 \cdot 0 = \underline{0 \text{ J}}$$

- FORZA $\vec{F_A}$

$$L = \mu_d \cdot mg \cdot \cos\theta \cdot d \cdot \cos 180° = -\mu_d \cdot mg \cdot \cos\theta \cdot d =$$

$$= -0.4 \cdot 10 \cdot 9.8 \cdot \cos 30° \cdot 5 = -33.9 \cdot 5 = \underline{-169.7 \text{ J}}$$

[il lavoro della forza di attrito è negativo]

- FORZA $m\vec{g}$

$$L = mg \cdot d \cdot \cos(90 + \theta) = -mg \cdot d \cdot \sin\theta =$$

$$= -10 \cdot 9.8 \cdot 5 \cdot \sin 30° = \underline{-245 \text{ J}}$$ [N.B. $\cos(90+\alpha) = -\sin\alpha$]

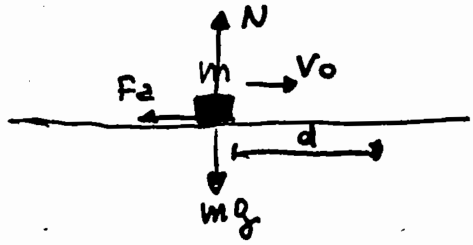
[il lavoro delle forza di gravità è negativo per un corpo che sale]

N. B. $L_F = -(L_{F_A} + L_{F_g})$

$$414.7 \text{ J} = -(-169.7 - 245.0) \text{ J}$$

ESERCIZIO

UNA CASSA STRISCIA SU UN PAVIMENTO ORIZZONTALE A UNA VELOCITA' INIZIALE DI 2.5 m/s. SI ARRESTA DOPO AVER STRISCIATO PER 1.4 m. SI TROVI IL COEFFICIENTE DI ATTRITO DINAMI



$N = mg$

- $F_a = -\mu_d \cdot m g$

- L'ACCELERAZIONE DEL BLOCCO (NEGATIVA) VALE:

$$a = \frac{F_a}{m} = -\mu_d \cdot g$$

- SUPPONIAMO L'ACCELERAZIONE COSTANTE, AVREMO:

$$V^2 = V_0^2 + 2a \cdot d = 0$$

$$a = -\frac{V_0^2}{2 \cdot d} = \frac{-2.5^2}{2 \cdot 1.4} = -2.23 \ m/s^2$$

$$\mu_d = -\frac{a}{g} = -\frac{-2.23}{9.81} = 0.228$$

- USIAMO IL TEOREMA DELL'ENERGIA CINETICA

$$L = \Delta K = K_{fin.} - K_{iniz.}$$

$$L = \vec{F} \cdot \vec{s} = -F_a \cdot d = 0 - \frac{1}{2} m V_0^2$$

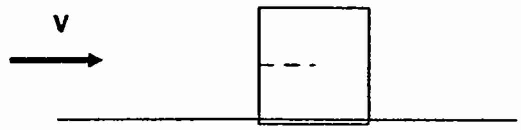
$$\Rightarrow F_a = \frac{1}{2} m \frac{V_0^2}{d} = \mu_d \cdot m g$$

$$\mu_d = \frac{1}{2} \frac{V_0^2}{d \cdot g}$$

- ABBIAMO RITROVATO LA STESSA FORMULA

) Dopo quale distanza si ferma un proiettile di massa m=3 g, che colpisce un muro di legno posto su piano orizzontale (vedi figura) se la forza frenante è costante di valore 10 N e la velocità iniziale del proiettile rispetto al piano è v= 30 m/s ? 3A
Si trascurino scambi di energia termica e si assuma il muro immobile.

(6 punti)



DAL TEOREMA DELL' ENERGIA CINETICA SI HA

$$L = \Delta K = K_{FIN} - K_{IN} = 0 - \frac{1}{2} m v^2$$

$$L = \vec{F_a} \cdot \vec{s} = - F_a \cdot s$$

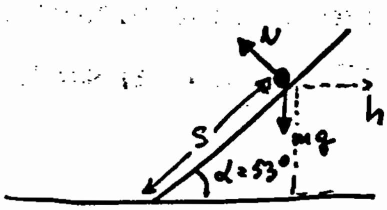
$$\Rightarrow \quad - F_a \cdot s = - \frac{1}{2} m v^2$$

$$\Rightarrow \quad s = \frac{1}{F_a} \cdot \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{2} \cdot 0.003 \cdot 30^2 = 13.5 \text{ cm}$$

Esercizio 3 (7 punti)

Un blocco di 1.50 Kg si muove lungo una superficie orizzontale liscia alla velocità di 2.0 m/s. Poi incontra un piano inclinato liscio che forma un angolo di 53° con l'orizzontale.
a) Quanto vale lo spazio che il blocco percorre all'insù lungo il piano inclinato prima di arrestarsi?
b) Immaginando che il piano inclinato sia scabro e che il coefficiente di attrito dinamico μ_d sia 0.40, trovare di nuovo lo spazio percorso lungo il piano inclinato.

(Risultato: a) s=25.6 cm ; b) s=19.6cm)



CASO A: NON C'È ATTRITO

SI CONSERVA L'ENERGIA MECCANICA

$$K = \frac{1}{2} m v^2 = U_g = mgh$$

$$\Rightarrow h = \frac{v^2}{2g} = \frac{2^2}{2 \cdot 9.8} = 20.4 \text{ cm}$$

• LA DISTANZA PERCORSA LUNGO IL BLOCCO VALE:

$$S = \frac{h}{\sin\alpha} = \frac{20.4}{\sin 53°} = \underline{25.6 \text{ cm}}$$

CASO B: C'È ATTRITO

FORZA DI ATTRITO $F_a = \mu d \cdot N = \mu d \cdot mg \cos\alpha$

CALCOLIAMO IL LAVORO DELLA FORZA DI ATTRITO E DELLA FORZA PESO SONO ENTRAMBI NEGATIVI

$$L = \vec{F_a} \cdot \vec{S} + m\vec{g} \cdot \vec{S} = -F_a S - mg \sin\alpha\, S = -(\mu d\, mg \cos\alpha + mg \sin\alpha) \cdot S$$

IL LAVORO DEVE ESSERE UGUALE ALLA VARIAZIONE DI ENERGIA CINETICA

$$\Delta K = K_{FIN} - K_{IN} = 0 - \frac{1}{2} m v^2$$

$$-mg(\mu d \cos\alpha + \sin\alpha) S = -\frac{1}{2} m v^2$$

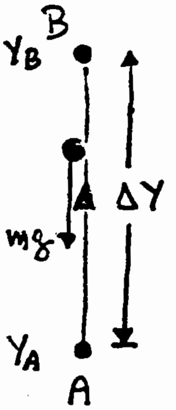
$$\Rightarrow S = \frac{v^2}{2g} \frac{1}{\mu d \cos\alpha + \sin\alpha} = \frac{2^2}{2 \cdot 9.8} \frac{1}{0.4 \cdot \cos 53° + \sin 53°} = \underline{19.6 \text{ cm}}$$

FORZE CONSERVATIVE E FORZE NON CONSERVATIVE

- PER SPIEGARE LA DIFFERENZA TRA I DUE TIPI DI FORZE, CALCOLIAMO COME ESEMPIO IL LAVORO FATTO SU UN PERCORSO CHIUSO DALLA FORZA DI GRAVITA' E DALLA FORZA DI ATTRITO DINAMICO.

- PER SEMPLICITA' PRENDIAMO UN PERCORSO UNIDIMENSIONALE; UN CORPO VA DAL PUNTO A AL PUNTO B E POI TORNA INDIETRO AL PUNTO A

FORZA DI GRAVITA'



$$L_{AB} = \vec{F}_g \cdot \vec{s} = -mg\,\Delta Y$$

(Il lavoro è negativo)

torniamo indietro

$$L_{BA} = \vec{F}_g \cdot \vec{s} = mg \cdot \Delta Y$$

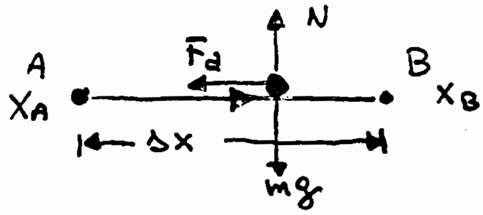
(il lavoro è positivo)

LAVORO TOTALE =

$$L_{AB} + L_{BA} = -mg\,\Delta Y + mg\,\Delta Y = 0$$

IL LAVORO È NULLO

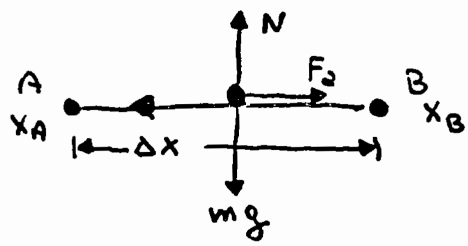
FORZA DI ATTRITO



$$L_{AB} = \vec{F}_a \cdot \vec{s} = -F_a \cdot \Delta X$$

(Il lavoro è negativo)

torniamo indietro



$$L_{AB} = \vec{F}_a \cdot \vec{s} = -F_a \cdot \Delta X$$

(il lavoro è negativo)

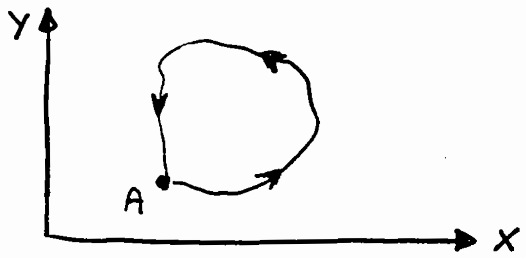
LAVORO TOTALE =

$$L_{AB} + L_{BA} = -F_a\,\Delta X - F_a\,\Delta X = -2F_a\,\Delta X \neq 0$$

IL LAVORO È DIVERSO DA ZERO

FORZE CONSERVATIVE E FORZE NON CONSERVATIVE

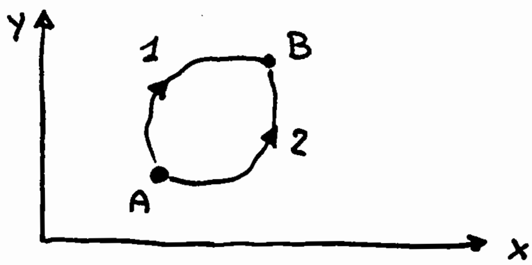
- IL RISULTATO PRECEDENTE SI PUÒ GENERALIZZARE DICENDO CONDIZIONE NECESSARIA E SUFFICIENTE AFFINCHÉ UNA FORZA SIA CONSERVATIVA È CHE IL LAVORO COMPIUTO SU UN PERCORSO CHIUSO QUALSIASI È NULLO.



$$L = \oint \vec{F} \cdot d\vec{s} = 0$$

[integrale ciclico]

- COME CONSEGUENZA DISCENDE CHE PER UNA FORZA CONSERVATIVA IL LAVORO PER ANDARE DA UN PUNTO $\underline{A}$ AD UN PUNTO $\underline{B}$ NON DIPEND DAL PERCORSO FATTO, MA SOLO DAI DUE PUNTI $\underline{A}$ E $\underline{B}$



$$L_1 = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{s} \quad ; \quad L_2 = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{s}$$

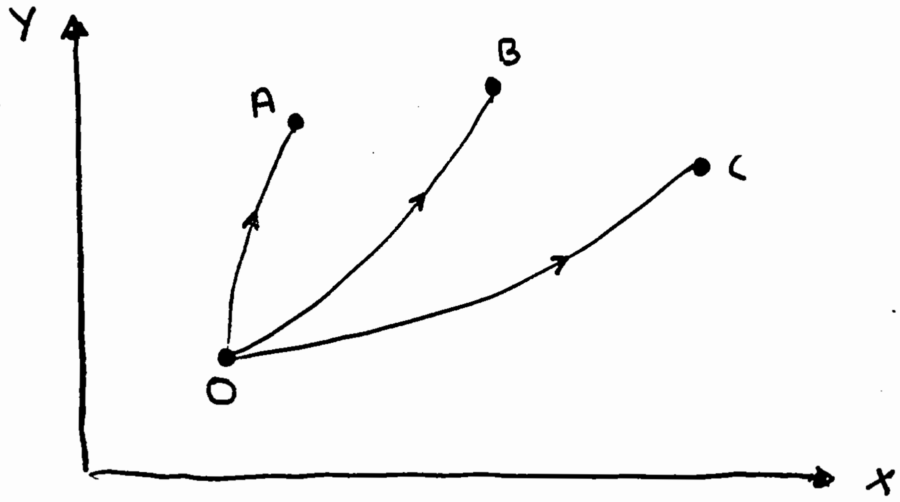
$$\Rightarrow \underline{L_1 = L_2}$$

- LE DUE CONDIZIONI SONO EQUIVALENTI E SONO AMBEDUE NECESSARIE E SUFFICIENTI PER IDENTIFICARE UN CAMPO DI FORZE CONSERVATIVE

- SE INVECE ESSE NON SONO VERIFICATE, ALLORA IL CAMPO DI FORZE È NON CONSERVATIVO E, COME VEDREMO, SI AVRÀ UNA NON CONSERVAZIONE DELL'ENERGIA MECCANICA DA PARTE DI UN CORPO CHE SI MUOVE SOTTOPOSTO A QUESTA FORZA.

ENERGIA POTENZIALE

- PRENDIAMO UN CAMPO DI FORZE CONSERVATIVO, AD ESEMPIO IL CAMPO GRAVITAZIONALE



- IMMAGINIAMO DI COMPIERE VARI PERCORSI PARTENDO SEMPRE DA UN PUNTO COMUNE O. CALCOLIAMO IL LAVORO:

$$L_{OA} = \int_O^A \vec{F} \cdot d\vec{s}$$

$$L_{OB} = \int_O^B \vec{F} \cdot d\vec{s}$$

$$L_{OC} = \int_O^C \vec{F} \cdot d\vec{s}$$

[IL LAVORO NON DIPENDE DAL PERCORSO, MA SOLO DAL PUNTO O E DAL PUNTO DI ARRIVO]

- CALCOLIAMO DI NUOVO IL LAVORO PER ANDARE DA A a B PASSANDO PER IL PUNTO INTERMEDIO O

$$L_{AB} = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_A^O \vec{F} \cdot d\vec{s} + \int_O^B \vec{F} \cdot d\vec{s} =$$

$$= -\int_O^A \vec{F} \cdot d\vec{s} + \int_O^B \vec{F} \cdot d\vec{s} =$$

$$= -L_{OA} + L_{OB}$$

$$\left[\text{N.B.} \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{s} = -\int_B^A \vec{F} \cdot d\vec{s} \right]$$

ENERGIA POTENZIALE

$$L_{AB} = -\int_O^A \vec{F} \cdot d\vec{s} + \int_O^B \vec{F} \cdot d\vec{s}$$

DEFINIAMO NELLO SPAZIO UNA FUNZIONE SCALARE CHIAMAT ENERGIA POTENZIALE.

E' L'ENERGIA ASSOCIATA ALLA CONFIGURAZIONE DI UN SISTEMA DI CORPI CHE ESERCITANO FORZE TRA LORO.

$$U(\vec{r}) = -\int_O^r \vec{F} \cdot d\vec{s}$$

[LAVORO FATTO DA UNA FORZA OPPOSTA A QUELLA DEL CAMPO]

$$\Rightarrow \quad L_{AB} = -\int_O^A \vec{F} \cdot d\vec{s} + \int_O^B \vec{F} \cdot d\vec{s} = U(A) - U(B)$$

- CONOSCENDO LA FUNZIONE U DEFINITA IN TUTTO LO SPAZIO SI PUO' CALCOLARE IL LAVORO SENZA ESEGUIRE L'INTEGRALE

- SE INVECE DI CALCOLARE IL LAVORO DAL PUNTO O, SCEGLIAMO UN ALTRO PUNTO DI RIFERIMENTO O', L'ENERGIA POTENZIALE CAMBIA DI UN VALORE COSTANTE

$$U'(\vec{r}) = -\int_{O'}^r \vec{F} \cdot d\vec{s} = -\int_{O'}^O \vec{F} \cdot d\vec{s} - \int_O^r \vec{F} \cdot d\vec{r} = C + U(\vec{r})$$

LA COSTANTE NON HA SIGNIFICATO FISICO PERCHE' SOLO LE DIFFERENZE DI ENERGIA POTENZIALE SONO MISURABILI

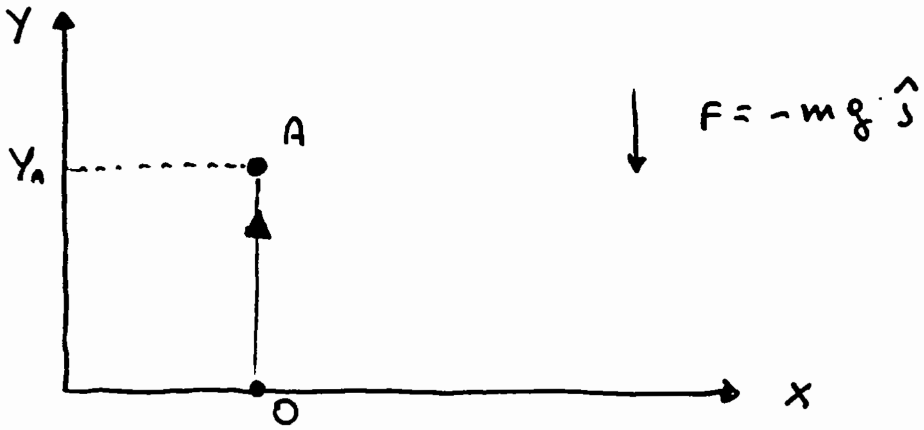
$$L = \Delta U = U(A) - U(B)$$

- L'ENERGIA POTENZIALE E' DEFINITA A MENO DI UNA COSTANTE

(N.B. RICORDATE QUESTA PARTE QUANDO FAREMO IL POTENZIALE ELETTRICO)

ENERGIA POTENZIALE GRAVITAZIONALE

- CONSIDERIAMO IL CAMPO GRAVITAZIONALE IN VICINANZA DELLA SUPERFICIE TERRESTRE



- SCEGLIAMO COME PUNTO DI RIFERIMENTO UN PUNTO SULLA SUPERFICIE TERRESTRE A CUI CORRISPONDE $Y = 0$

- CALCOLIAMO L'ENERGIA POTENZIALE COME:

$$U(\vec{r}) = -\int_0^r (-mg\hat{j}) \cdot d\vec{s} = \int_0^Y mg\,dy = mgY$$

$$U(Y) = mgY$$

- L'ENERGIA POTENZIALE DIPENDE SOLO DALLA COORDINATA Y

N.B. $F = -\frac{dU}{dY} = -mg$

- CONOSCENDO $U(\vec{r})$ SI PUÒ RICAVARE IL CAMPO DI FORZ[E]

ENERGIA MECCANICA

- CONSIDERIAMO UN CORPO CHE SI MUOVE IN UN CAMPO DI FORZE CONSERVATIVO:

- IL LAVORO FATTO DAL CAMPO VALE:

$$L_{AB} = U(A) - U(B)$$

- DAL TEOREMA DELL'ENERGIA CINETICA SAPPIAMO ANCHE CHE

$$L_{AB} = \Delta K = K_B - K_A$$

- METTENDO INSIEME LE DUE EQUAZIONI

$$U(A) - U(B) = L_{AB} = K_B - K_A$$

- RIORDINANDO SI HA:

$$U(A) + K_A = U(B) + K_B$$

LA SOMMA DELL'ENERGIA POTENZIALE E DELL'ENERGIA CINETICA SI CHIAMA ENERGIA MECCANICA.
IN ASSENZA DI FORZE NON CONSERVATIVE L'ENERGIA MECCANICA SI CONSERVA

- NEL CASO DEL CAMPO GRAVITAZIONALE SI HA:

$$E = U(A) + K_A = mgy + \frac{1}{2}mv^2$$

CONSERVAZIONE DELL'ENERGIA

- IN FISICA RIVESTONO UNA NOTEVOLE IMPORTANZA LE LEGGI DI CONSERVAZIONE.
  SI CERCA SEMPRE DI TROVARE IN UN DATO PROCESSO QUALE GRANDEZZA VIENE CONSERVATA, CIOE' RIMANE SEMPRE LA STESSA DURANTE LO SVOLGERSI DEL PROCESSO.

- ENERGIA MECCANICA $E = U + K$

ESEMPIO : SASSO LANCIATO DA UN PALAZZO ALTO h CON VELOCITA' INIZIALE NULLA.
[trascuriamo la resistenza dell'aria]

$E_{INIZIALE}$: mgh [tutta energia potenziale]

$E_{INTERMEDIA}$: $mgy + \frac{1}{2}mv^2$ [energia potenziale + energia cinetica]

E_{FINALE} : $\frac{1}{2}mv_f^2$ [solo energia cinetica]

$\underline{E}$ SI CONSERVA DURANTE TUTTO IL PROCESSO, ALLORA

$$mgh = \frac{1}{2}mv_f^2$$

DOMANDA : IL SASSO VIENE LANCIATO QUESTA VOLTA CON VELOCITA' INIZIALE V_0 VERSO L'ALTO, E POI SEMPRE CON VELOCITA' V_0 MA DIRETTA VERSO IL BASSO. LA VELOCITA' CON CUI TOCCA IL SUOLO SARA' MAGGIORE NEL PRIMO O NEL SECONDO CASO?

CONSERVAZIONE DELL'ENERGIA

ALTRO ESEMPIO: ATTRITO

- UN CORPO SI MUOVE IN UN PIANO ORIZZONTALE CON ATTRITO. LA VELOCITA' INIZIALE È V_0; LA VELOCITA' FINALE È ZERO.

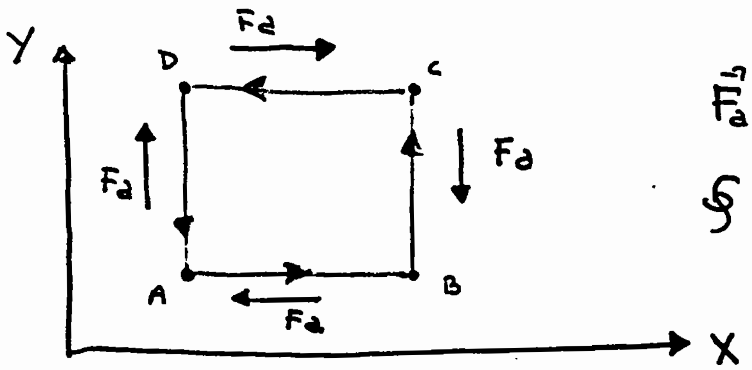
$$E_{INIZIALE} = U + K = mgy + \frac{1}{2} m V_0^2$$

$$E_{FINALE} = U + K = mgy + 0$$

$$\Longrightarrow \quad E_{INIZ.} \neq E_{FIN.}$$

- L'ENERGIA MECCANICA NON SI È CONSERVATA. PERCHÉ? DURANTE IL MOTO HANNO AGITO DELLE FORZE NON CONSERVATIVE, IN QUESTO CASO SI TRATTA DELLE FORZE DI ATTRITO.

- UNA FORZA È CONSERVATIVA QUANDO $\oint \vec{F} \cdot d\vec{s} = 0$
VEDIAMO NEL CASO DELL'ATTRITO.



$$\vec{F_a} \cdot \vec{s} = -F_a \cdot s$$

$$\oint \vec{F_a} \cdot d\vec{s} < 0$$

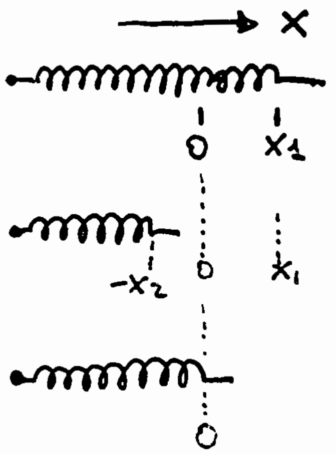
- LA FORZA DI ATTRITO È SEMPRE OPPOSTA ALLA VELOCITA', E QUINDI ALLO SPOSTAMENTO.
- LA FORZA DI ATTRITO COMPIE SEMPRE UN LAVORO NEGATIVO

- IN PRESENZA DI FORZE NON CONSERVATIVE NON SI CONSERVA PIÙ L'ENERGIA MECCANICA. VEDREMO CHE AGGIUNGENDO UN ALTRO INGREDIENTE (CALORE) SI RISTABILISCE LA CONSERVAZIONE DELL'ENERGIA (CHE NON SI CHIAMERÀ PIÙ ENERGIA MECCANICA)

LA FORZA DELLA MOLLA (FORZA ELASTICA) È CONSERVATIVA?

- PER VALUTARLO CALCOLIAMO $\oint \vec{F} \cdot d\vec{s}$ E VEDIAMO SE È UGUALE A ZERO.

– SCEGLIAMO COME ORIGINE DEL SISTEMA DI RIFERIMENTO IL PUNTO DI RIPOSO DELLA MOLLA, ALLORA SI HA $X_0 = 0$



1) ALLUNGHIAMO LA MOLLA FINO A X_1

2) POI COMPRIMIAMO LA MOLLA FINO A $-X_2$

3) POI LA RIPORTIAMO NELLA POSIZIONE DI RIPOSO

– CALCOLIAMO IL LAVORO LUNGO LE TRE FASI:

1) $$L_1 = \int_0^{X_1} \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_0^{X_1} -kx\,dx = -\frac{1}{2}x^2 k \Big|_0^{X_1} = -\frac{1}{2}k X_1^2 + 0$$

2) $$L_2 = \int_{X_1}^{-X_2} \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_{X_1}^{-X_2} -kx\,dx = -\frac{1}{2}k x^2 \Big|_{X_1}^{-X_2} = -\frac{1}{2}k X_2^2 + \frac{1}{2}k X_1^2$$

3) $$L_3 = \int_{-X_2}^{0} \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_{-X_2}^{0} -kx\,dx = -\frac{1}{2}k x^2 \Big|_{-X_2}^{0} = -0 + \frac{1}{2}k X_2^2$$

– SOMMIAMO I TRE LAVORI

$$\oint \vec{F} \cdot d\vec{s} = L_1 + L_2 + L_3 = -\frac{1}{2}k X_1^2 - \frac{1}{2}k X_2^2 + \frac{1}{2}k X_1^2 + \frac{1}{2}k X_2^2 = 0$$

$\Rightarrow$ LA FORZA ELASTICA È CONSERVATIVA, QUINDI SI PUÒ DEFINIRE UN'ENERGIA POTENZIALE ELASTICA.

ENERGIA POTENZIALE ELASTICA

- LA FORZA ELASTICA E' CONSERVATIVA => ENERGIA POTENZIAL

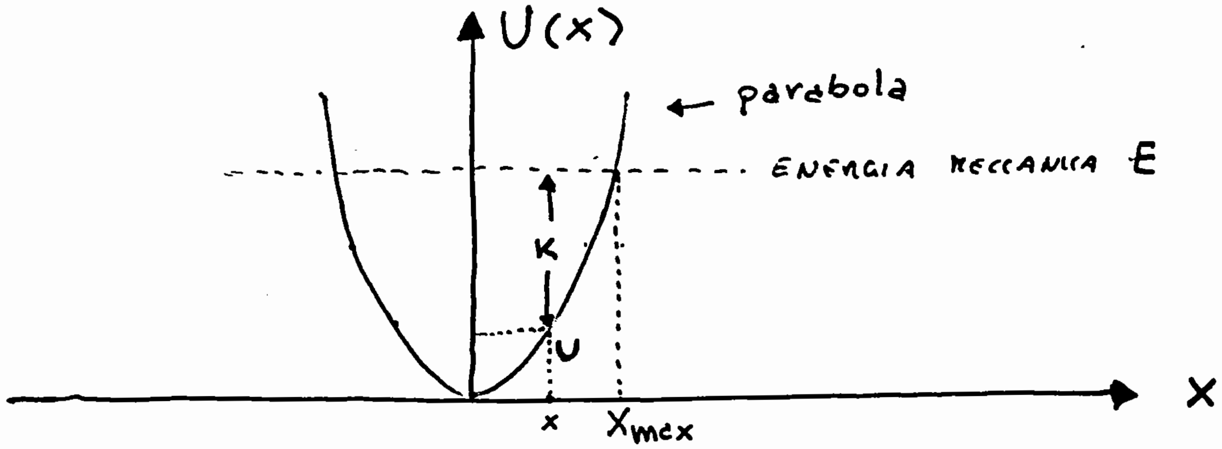
- ZERO DEL POTENZIALE UGUALE AL PUNTO DI RIPOSO DELLA MOLLA

- ORIGINE SCELTA IN MODO CHE $x_0 = 0$

- U E' IL LAVORO FATTO DA UNA FORZA OPPOSTA A QUELLA DEL CAM.

$$F = -(-kx) = kx$$

- $U = \int_0^x kx'dx' = \frac{1}{2}kx'^2\Big|_0^x = \frac{1}{2}kx^2 - 0$ $\left[\begin{array}{l}\text{In generale} \\ U = \frac{1}{2}k(\Delta x)^2\end{array}\right]$



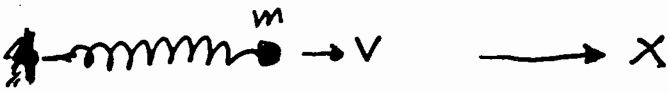
- L'ENERGIA MECCANICA SI CONSERVA

- SUPPONIAMO DI ATTACCARE UNA MASSA m AD UNA MOLLA DISPOSTA SU UN PIANO ORIZZONTALE

- $E = U + K = \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}mv^2$

- SUPPONIAMO CHE LA MASSA ABBIA UNA CERTA ENERGIA MECCANICA FORNITA DALL'ESTERNO INIZIALMENTE
  - $E = \frac{1}{2}k x_{max}^2$ – x_{max} = ELONGAZIONE MASSIMA
  - $K = E - \frac{1}{2}kx^2$ – L'ENERGIA CINETICA DIPENDE DALLA POSIZIONE

MOTO ARMONICO: CONSIDERAZIONI SULL'ENERGIA



- IMMAGINIAMO UNA MASSA m ATTACCATA AD UNA MOLLA DI COSTANTE ELASTICA K

- LA LEGGE ORARIA DEL MOTO E':

$$X(t) = A \operatorname{sen}(\omega t + \varphi)$$

$\omega = \sqrt{\frac{K}{m}}$ E' LA PULSAZIONE ANGOLARE

- LA VELOCITA' DELLA MASSA m VALE:

$$V(t) = \frac{dX}{dt} = \omega A \cos(\omega t + \varphi)$$

- L'ENERGIA POTENZIALE ELASTICA VALE:

$$U(t) = \frac{1}{2} k X^2 = \frac{1}{2} k A^2 \operatorname{sen}^2(\omega t + \varphi)$$

- L'ENERGIA CINETICA DELLA MASSA VALE:

$$K(t) = \frac{1}{2} m V^2 = \frac{1}{2} m \omega^2 A^2 \cos^2(\omega t + \varphi) = \frac{1}{2} m \left(\frac{k}{m}\right) A^2 \cos^2(\omega t + \varphi$$

- TROVIAMO L'ENERGIA MECCANICA

$$E = U + K = \frac{1}{2} k A^2 \operatorname{sen}^2(\omega t + \varphi) + \frac{1}{2} k A^2 \cos^2(\omega t + \varphi) =$$

$$= \frac{1}{2} k A^2 \left[\operatorname{sen}^2(\omega t + \varphi) + \cos^2(\omega t + \varphi) \right] = \underline{\frac{1}{2} k A^2}$$

- L'ENERGIA MECCANICA SI CONSERVA ED E' PARI ALL'ELONGAZIO MASSIMA DELLA MOLLA.

VELOCITA DI FUGA DALLA TERRA DI UN SATELLI

- FORZA GRAVITAZIONALE:

$$\vec{F} = -G\,\frac{M_T \cdot m_s}{r^2}\,\hat{r} \qquad \text{(forza attrattiva)}$$

- ENERGIA POTENZIALE GRAVITAZIONALE (SI SCEGLIE L'INFINITO COME PUNTO DI RIFERIMENTO)

$$U_g = \int_{\infty}^{r} -\vec{F}\cdot d\vec{s} = +\int_{\infty}^{r} G\,\frac{M_T \cdot m_s}{r'^2}\,dr' = G\,M_T \cdot m_s \left[-\frac{1}{r'}\right]_{\infty}^{r} = \underline{-\frac{G\,M_T \cdot m_s}{r}}$$

[l'energia potenziale è nulla all'infinito]

- L'ENERGIA MECCANICA DEL SATELLITE VALE:

$$E = U_g + K = -\frac{G\,M_T \cdot m_s}{r} + \frac{1}{2}\,m_s V^2$$

- CALCOLIAMO QUALE DEVE ESSERE LA VELOCITA' DI LANCIO DEL SATELLITE AFFINCHE' RIESCA A RAGGIUNGERE L'INFINITO CON VELOCITA' NULLA

- L'ENERGIA MECCANICA ALL'INFINITO VALE:

$$E = -\frac{G\,M_T \cdot m_s}{\infty} + \frac{1}{2}\,m\,0^2 = 0$$

E PER LA CONSERVAZIONE DELL'ENERGIA DEVE VALERE ZERO ANCHE AL MOMENTO DEL LANCIO DALLA SUPERFICIE DELLA TERRA.

$$E = -\frac{G\,M_T \cdot \cancel{m_s}}{R_T} + \frac{1}{2}\,\cancel{m_s}\,V_F^2 = 0 \Rightarrow V_F^2 = \frac{2\,G\,M_T}{R_T}$$

$$\Rightarrow \underline{V_F = \sqrt{\frac{2\,G\,M_T}{R_T}}} = \sqrt{\frac{2\cdot 6.67\cdot 10^{-11}\cdot 5.98\cdot 10^{24}}{6.37\cdot 10^{6}}} = 3.54\cdot\sqrt{10^7} = \underline{11.2\ \frac{km}{s}}$$

N.B. LANCIANDO DALL'EQUATORE LA FORZA CENTRIFUGA DA UNA MAN

N.N.B. ENERGIA DI LEGAME DEL SATELLITE $= -\dfrac{G\,M_T \cdot m_s}{R_T}$ (negativa)

(confronta con l'energia di legame di un elettrone).

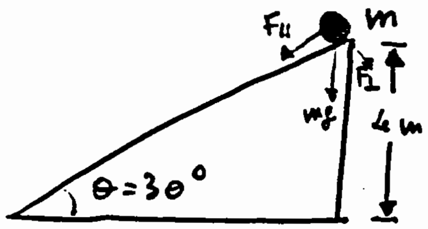
ESERCIZI CONSIGLIATI

Energia potenziale e conservazione dell'energia

- Serway (3° Edizione) – Cap. 7
  - 1 – 3 – 5 – 7 – 9 – 11 – 13 – 15 – 17 – 19 – 21 – 23 – 25 – 27 – 29 – 31 – 33 – 47 – 49 – 51
- Serway (3° Edizione) – Cap. 12
  - 15 – 17 – 19
- Halliday (5° Edizione) – Cap. 8
  - 1E – 3E – 5E – 7P – 9E – 11E – 13E – 15P – 17P – 19P – 21P – 23P – 25P – 31P – 33E – 35E – 37P – 41P – 43P – 49P
- Halliday (5° Edizione) – Cap. 16
  - 29E – 31E – 33E – 35E

PROBLEMA

UNA BAMBINA DI 20 Kg SCENDE LUNGO UNO SCIVOLO INCLINATO DI 30°. IL COEFFICIENTE D'ATTRITO TRA LA BAMBINA E LO SCIVOLO E' 0.2. SE LA BAMBINA PARTE DALLA SOMMITA' DELLO SCIVOLO, POSTA A 4 m DAL SUOLO, QUAL'E' LA SUA VELOCITA' QUANDO RAGGIUNGE IL SUOLO?



- IL PROBLEMA SI PUO' RISOLVERE RISOLVENDO L'EQUAZIONE DEL MOTO $\vec{F} = m\vec{a}$

PERO' E' MEGLIO USARE LA CONSERVAZIONE DELL'ENERGIA

- $\Delta U_g = mg\Delta h = 20 \cdot 9.8 \cdot 4 = 785\ J$

- VALUTIAMO IL LAVORO FATTO DALLA FORZA DI ATTRITO
  - $N = mg\cos\theta$
  - $F_a = \mu_d \cdot N = \mu_d \cdot mg\cos\theta = 0.2 \cdot 20 \cdot 9.8 \cdot \cos 30° = 34.0\ N$
  - LA LUNGHEZZA DELLO SCIVOLO E'

$$s = \frac{h}{\operatorname{sen}\theta°} = \frac{4}{1/2} = 8\ m$$

$$\Rightarrow L_A = \vec{F_a} \cdot \vec{s} = -34.0 \cdot 8 = -272\ J$$

- DALLA (NON) CONSERVAZIONE DELL'ENERGIA SI HA:

$$E_{FIN} - E_{INIZ} = L_A$$

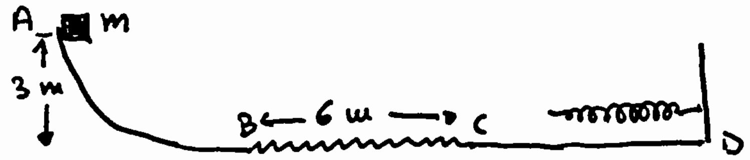
$$\frac{1}{2}mv^2 - mgh = L_A \quad \Rightarrow \frac{1}{2}mv^2 = L_A + mgh =$$

$$= -272 + 785 = 513\ J$$

$$\Rightarrow v = \sqrt{\frac{2 \cdot E_{FIN}}{m}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 513}{20}} = 7.16\ \frac{m}{s}$$

PROBLEMA

UN BLOCCO DI 10 kg È LASCIATO LIBERO IN UN PUNTO A DI UNA PISTA ABCD. LA GUIDA È PRIVA DI ATTRITO, FATTA ECCEZIONE PER IL TRATTO BC, LUNGO 6 m. IL BLOCCO SCENDE LUNGO LA GUIDA, COLPISCE UNA MOLLA DI COSTANTE ELASTICA $k = 2250$ N/m, DETERMINANDONE UNA COMPRESSIONE DI 0.3 m, RISPETTO ALLA LUNGHEZZA DI EQUILIBRIO, PRIMA DEL MOMENTANEO ARRESTO. DETERMINARE IL COEFFICIENTE DI ATTRITO



- APPLICHIAMO LA (NON) CONSERVAZIONE DELL'ENERGIA

$$E_{FIN} - E_{INIZ} = L_a$$

$$L_a = \vec{F} \cdot \vec{S} = |\vec{F}||\vec{S}| \cos\theta$$

$$E_{FIN} = \frac{1}{2} k \Delta x^2 \quad ; \quad E_{INIZ} = mgh \quad ; \quad L_a = -F_a S = -\mu_d \cdot mg \cdot S$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} k \Delta x^2 - mgh = -\mu_d \cdot mg \cdot S$$

$$\mu_d \cdot mg \cdot S = mgh - \frac{1}{2} k \Delta x^2 = \Delta E$$

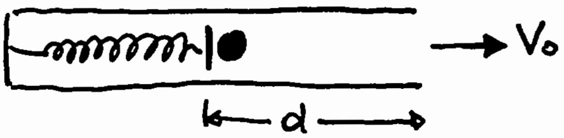
$$mgh = 10 * 9.8 * 3 = 294 \text{ J}$$

$$\frac{1}{2} k \Delta x^2 = \frac{1}{2} * 2250 * 0.3^2 = 101.25 \text{ J}$$

$$\mu_d = \frac{\Delta E}{mgS} = \frac{192.75}{10 * 9.8 * 6} = 0.328$$

PROBLEMA 8-4

IN UN FUCILE A MOLLA, QUEST'ULTIMA VIENE COMPRESS PER UNA DISTANZA d PARI A 3.2 cm DALLA SUA POSIZIONE DI RIPOSO, E SI INTRODUCE UNA PALLA DI MASSA m = 12 g NELLA CANNA. A QUALE VELOCITA' USCIRA' DALLA CANNA IL PROIETTILE QUANDO SI TIRERA' IL GRILLETTO? LA COSTANTE DELLA MOLLA E' k = 7.5 N/cm. SUPPONIAMO CHE LA CANNA SIA ORIZZONTALE E PRIVA DI ATTRITO.



- L'ENERGIA SI CONSERVA

$$E_{INIZIALE} = E_{FINALE}$$

$$U_i + K_i = U_f + K_f$$

$$\frac{1}{2} k d^2 + 0 = 0 + \frac{1}{2} m V_0^2$$

RICAVIAMO V_0

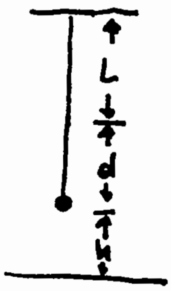
$$V_0 = d\sqrt{\frac{k}{m}} = 0.032 \cdot \sqrt{\frac{7.5 \cdot 100}{12 \cdot 10^{-3}}} = 8.0 \text{ m/s}$$

- $3.2 \text{ cm} = 0.032 \text{ m}$
- $7.5 \frac{N}{cm} = 7.5 \frac{N}{0.01 m} = 7.5 \cdot 100 \frac{N}{m} = 750 \frac{N}{m}$
- $12 \text{ g} = 12 \cdot 10^{-3} \text{ kg}$

PROBLEMA 8-3

UNA PRATICANTE DEL SALTO CON L'ELASTICO SI TROVA SU UN PONTE ALTO 45.0 m SUL LIVELLO DEL FIUME. LA RAGAZZA HA UNA MASSA DI 61.0 Kg. ALLO STATO DI RIPOSO LA CORDA ELASTICA HA UNA LUNGHEZZA DI 25.0 m. AMMETTIAMO CHE SEGUA LA LEGGE DI HOOKE SECONDO UNA COSTANTE DELLA MOLLA $k = 160$ N/m.

a) SE LA SALTATRICE SI ARRESTA PRIMA DI AVER RAGGIUNTO L'ACQUA QUAL'E' L'ALTEZZA h SULL'ACQUA DEI SUOI PIEDI NEL PUNTO PIU' BASSO RAGGIUNTO? QUAL'E' LA FORZA NETTA SU DI LEI IN QUEL PUNTO



- SI CONSERVA L'ENERGIA
- $E = U + K$
- $E = U_e + U_g + K$

- OCCORRE CONSIDERARE L'ENERGIA POTENZIALE GRAVITAZIONALE ED ELASTICA
  - INIZIALMENTE L'ENERGIA CINETICA E' NULLA E L'ENERGIA POTENZIALE ELASTICA E' NULLA, NEL PUNTO PIU' BASSO E' ANCORA NULLA L'ENERGIA CINETICA

$$E_i = U_g = mg\,(L + d + h)$$
$$E_f = U_g + U_e = mgh + \frac{1}{2}kd^2$$
$$E_i = E_f \Rightarrow \cancel{mgh} + mgL + mgd = \cancel{mgh} + \frac{1}{2}kd^2$$

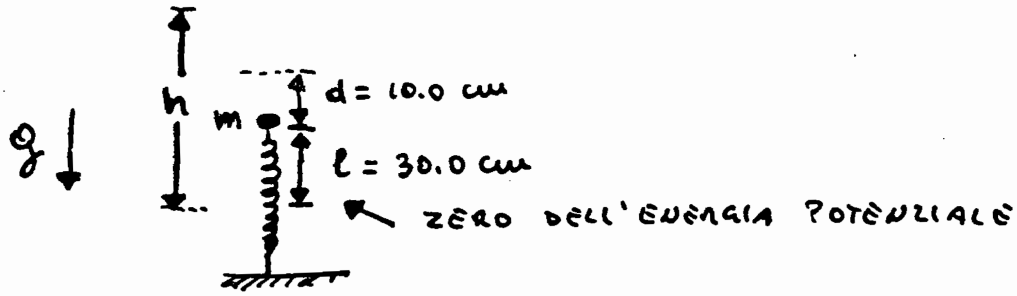
Eq. di 2° grado che da $d = 17.9$ m (l'altra soluzione è negativa)

$\Rightarrow$ $h = 45.0 - L - d = 45.0 - 25.0 - 17.9 = 2.1$ m

b) NEL PUNTO PIU' BASSO SI HA:

$$F = mg - kx = 61 \cdot 9.8 - 160 \cdot 17.9 = 597.8 - 2864 = -2270 \text{ N}$$

UNA PIETRA DI 8.0 Kg E' APPOGGIATA SU UNA MOLLA POSTA IN UN PIANO VERTICALE. LA MOLLA E' COMPRESSA DALLA PIETRA DI 10.0 cm.
a) QUAL'E' LA COSTANTE DELLA MOLLA? b) LA PIETRA VIENE ORA SPINTA IN GIU' DI ALTRI 30.0 cm E POI RILASCIATA. QUAL'E' L'ENERGIA POTENZIALE DELLA MOLLA SUBITO PRIMA DEL RILASCIO? c) FINO A CHE ALTEZZA OLTRE LA POSIZIONE DI RILASCIO ARRIVERA' LA PIETRA?



a) SULLA PIETRA AGISCONO LA FORZA DI GRAVITA' (DIRETTA VERSO IL BASSO) E LA FORZA ELASTICA (DIRETTA VERSO L'ALTO).
IN CONDIZIONI DI EQUILIBRIO I MODULI DELLE DUE FORZE SONO UGUALI

$$mg = kd \Rightarrow k = \frac{mg}{d} = \frac{8.0 \cdot 9.8}{0.1} = 784 \ \frac{N}{m}$$

b) QUANDO LA PIETRA VIENE SPOSTATA DI ALTRI 30 cm SI HA:

$$U = \frac{1}{2}k(d+l)^2 = \frac{1}{2} \cdot 784 \cdot (0.1 + 0.3)^2 = 62.7 \ J$$

c) AGISCONO SOLO FORZE CONSERVATIVE, QUINDI L'ENERGIA MECCANICA SI CONSERVA.
PRENDIAMO COME ZERO DELL'ENERGIA POTENZIALE LA POSIZIONE PIU' BASSA OCCUPATA DALLA PIETRA. L'ENERGIA CINETICA E' NULLA SIA IN QUEL PUNTO CHE NEL PUNTO PIU' ALTO DELLA TRAIETTORIA.

$$E_{INIZIALE} = U_g + U_e + K = 0 + \frac{1}{2}k(d+l)^2 + 0$$

$$E_{FINALE} = U_g + U_e + K = mgh + 0 + 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}k(d+l)^2 = mgh \Rightarrow h = \frac{\frac{1}{2}k(d+l)^2}{mg} = \frac{62.7}{8 \cdot 9.8} = 0.80 \ m = 80 \ cm$$

N.B. NEL PUNTO PIU' ALTO LA PIETRA NON E' PIU A CONTATTO CON LA MOLLA $\Rightarrow U_e = 0$

QUANTITA' DI MOTO

IMMAGINIAMO CHE UNA FORZA COSTANTE AGISCA PER UN INTERVALLO DI TEMPO Δt SU UN CORPO DI MASSA m CHE SI STAVA MUOVENDO CON VELOCITA' $\vec{v}_i$

$$\vec{F} = m\vec{a}$$

- MOLTIPLICHIAMO PER Δt ENTRAMBI I MEMBRI

$$\vec{F}\Delta t = m\vec{a}\Delta t$$

- $\vec{a}\Delta t = \vec{v}_f - \vec{v}_i$
- $\vec{F}\Delta t = \vec{I}$ → SI CHIAMA IMPULSO DELLA FORZA

[NEL CASO DI FORZA VARIABILE SI HA: $\vec{I} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}\,dt$]

$$\Rightarrow \quad \vec{I} = \vec{F}\Delta t = m(\vec{v}_f - \vec{v}_i) = m\vec{v}_f - m\vec{v}_i$$

- IL PRODOTTO $m\vec{v}$ SI CHIAMA QUANTITA' DI MOTO $\vec{P}$

$$\vec{I} = \vec{P}_f - \vec{P}_i = \Delta\vec{P}$$

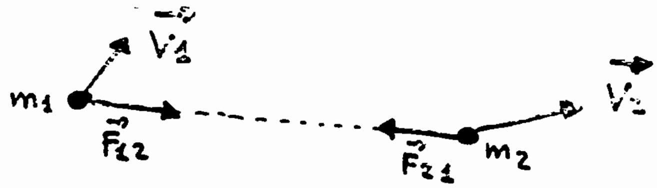
- L'IMPULSO DELLA FORZA PROVOCA UN CAMBIAMENTO DELLA QUANTITA' DI MOTO $\vec{I} = \Delta\vec{P}$

- LA SECONDA LEGGE DI NEWTON ($\vec{F} = m\vec{a}$) SI PUÒ SCRIVERE COME

$$\vec{F} = \frac{d\vec{P}}{dt} = \frac{d(m\vec{v})}{dt}$$

QUESTA E' UNA FORMULAZIONE PIU' GENERALE CHE TIENE CONTO DI UN EVENTUALE VARIAZIONE DELLA MASSA, OLTRE CHE DELLA VELOCITA'

CONSERVAZIONE DELLA QUANTITA' DI MOTO TOTALE



- PRENDIAMO DUE CORPI ISOLATI

- $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$ [PRINCIPIO DI AZIONE E REAZIONE]

LA FORZA $\vec{F}_{12}$ AGENTE SUL CORPO 1 DOVUTA AL CORPO 2 PROVOCA UN CAMBIAMENTO DI $\vec{P}_1$ E VICEVERSA ACCADE AL CORPO 2

$$\vec{F}_{12}\,\Delta t = \Delta \vec{P}_1 = m_1 \vec{V}_1^{\,f} - m_1 \vec{V}_1^{\,i}$$

$$\vec{F}_{21}\,\Delta t = \Delta \vec{P}_2 = m_2 \vec{V}_2^{\,f} - m_2 \vec{V}_2^{\,i}$$

- SOMMIAMO LE DUE EQUAZIONI

$$\vec{F}_{12}\,\Delta t + \vec{F}_{21}\,\Delta t = \Delta \vec{P}_1 + \Delta \vec{P}_2 = \Delta(\vec{P}_1 + \vec{P}_2)$$

$$(\vec{F}_{12} + \vec{F}_{21})\,\Delta t = m_1 \vec{V}_1^{\,f} + m_2 \vec{V}_2^{\,f} - m_1 \vec{V}_1^{\,i} - m_2 \vec{V}_2^{\,i}$$

- PER IL PRINCIPIO DI AZIONE E REAZIONE SI HA:

$$\vec{F}_{12} + \vec{F}_{21} = 0$$

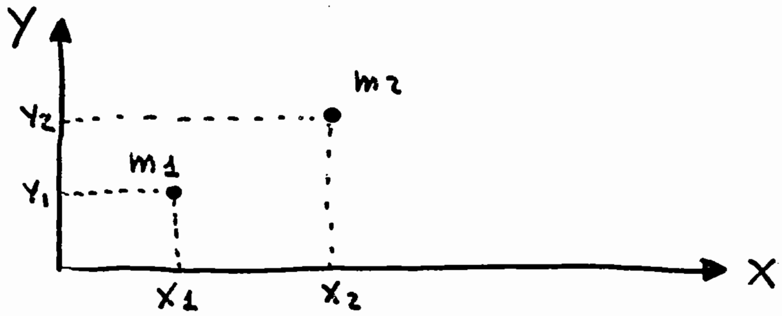
$$\Rightarrow \quad \Delta(\vec{P}_1 + \vec{P}_2) = 0$$

$$\Rightarrow \quad \vec{P}_1 + \vec{P}_2 = \text{COSTANTE}$$

- LA QUANTITA' DI MOTO TOTALE $\left(\sum_1^N \vec{P}_i\right)$ DI UN SISTEMA ISOLATO (CIOE' CHE NON INTERAGISCE CON L'ESTERNO) SI CONSERVA

N.B. SI PUO' ANCHE CONSERVARE SOLO UNA O DUE COMPONENTI DI $\vec{P}$

CENTRO DI MASSA



$$X_{MEDIO} = \frac{X_1 + X_2}{2} \quad ; \quad Y_{MEDIO} = \frac{Y_1 + Y_2}{2} \quad ; \quad Z_{MEDIO} = \frac{Z_1 + Z_2}{2}$$

- FACCIAMO ORA UNA MEDIA PESATA USANDO LE MASSE DEI PUNTI COME PESO

$$X_{CM} = \frac{m_1 X_1 + m_2 X_2}{m_1 + m_2} \quad ; \quad Y_{CM} = \frac{m_1 Y_1 + m_2 Y_2}{m_1 + m_2} \quad ; \quad Z_{CM} = \frac{m_1 Z_1 + m_2 Z_2}{m_1 + m_2}$$

- X_{CM}, Y_{CM}, Z_{CM} SONO LE COORDINATE DEL CENTRO DI MASSA.

ESSO NON COINCIDE NECESSARIAMENTE CON UNO DEI PUNTI MATERIALI

- NEL CASO DI N PUNTI MATERIALI SI HA:

$$X_{CM} = \frac{\sum_1^N m_i x_i}{M = \sum_1^N m_i} \quad ; \quad Y_{CM} = \frac{\sum_1^N m_i Y_i}{M} \quad ; \quad Z_{CM} = \frac{\sum_1^N m_i Z_i}{M}$$

- IN FORMA VETTORIALE SI HA:

$$\vec{r}_{CM} = \frac{\sum_1^N m_i \vec{r}_i}{M}$$

QUANTITA' DI MOTO TOTALE

- SISTEMA DI DUE PARTICELLE

$$\vec{P}_{TOTALE} = m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2$$

- CENTRO DI MASSA DEL SISTEMA DI DUE PARTICELLE

$$\vec{r}_{CM} = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{M} \quad ; \quad M = m_1 + m_2$$

- DERIVIAMO $\vec{r}_{CM}$ RISPETTO AL TEMPO

$$\vec{V}_{CM} = \frac{d\vec{r}_{CM}}{dt} = \frac{m_1 \frac{d\vec{r}_1}{dt} + m_2 \frac{d\vec{r}_2}{dt}}{M} = \frac{m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2}{M}$$

- MOLTIPLICANDO PER M

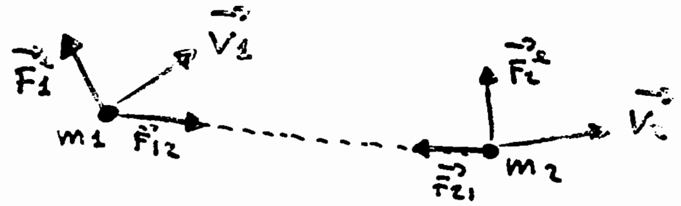
$$M \vec{V}_{CM} = m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 = \vec{P}_{TOTALE}$$

– LA QUANTITA' DI MOTO TOTALE DI UN SISTEMA DI PUNTI E' EQUIVALENTE ALLA QUANTITA' DI MOTO DI UN PUNTO MATERIALE CHE HA MASSA UGUALE ALLA MASSA TOTALE DEL SISTEMA E VELOCITA' PARI ALLA VELOCITA' DEL CENTRO DI MASSA

- LA CONSERVAZIONE DELLA QUANTITA' DI MOTO IMPLICA CHE

$$M \vec{V}_{CM} = \text{COSTANTE} \Rightarrow \vec{V}_{CM} = \text{COSTANTE}$$

FORZE INTERNE E FORZE ESTERNE



- SCRIVIAMO $\vec{F} = m\vec{a}$ PER ENTRAMBI I CORPI

$$\vec{F_1} + \vec{F_{12}} = m_1 \frac{d\vec{V_1}}{dt}$$

$$\vec{F_2} + \vec{F_{21}} = m_2 \frac{d\vec{V_2}}{dt}$$

- SOMMIAMO LE DUE EQUAZIONI

$$\vec{F_1} + \underbrace{\vec{F_{12}} + \vec{F_{21}}}_{=0} + \vec{F_2} = m_1 \frac{d\vec{V_1}}{dt} + m_2 \frac{d\vec{V_2}}{dt}$$

$$\vec{F_1}^e + \vec{F_2}^e = \frac{d}{dt}(m_1\vec{V_1} + m_2\vec{V_2}) = \frac{d\vec{P}_{TOT}}{dt}$$

- QUINDI ABBIAMO

$$\sum_i \vec{F_i}^e = \frac{d\vec{P}_{TOT}}{dt}$$

$\sum_i \vec{F_i}^e$ È LA SOMMATORIA SU TUTTE LE FORZE ESTERNE AGENTI SUL SISTEMA

$\Rightarrow$ IN UN SISTEMA ISOLATO, DOVE $\sum \vec{F}_e = 0$ SI HA LA CONSERVAZIONE DI $\vec{P}_{TOT}$

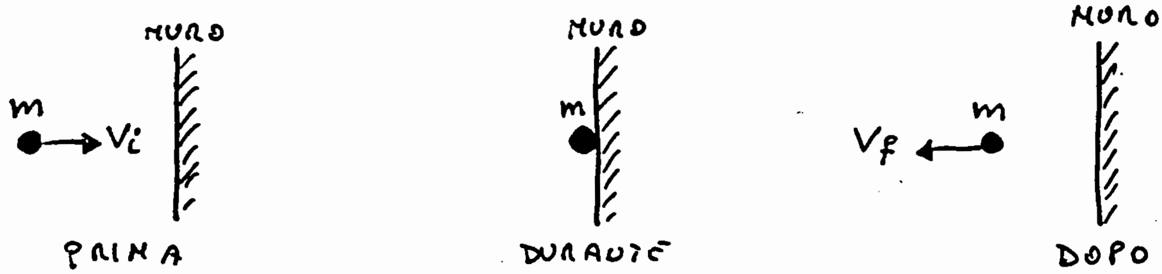
$$\sum \vec{F}_x^e = \frac{d\vec{P}_x}{dt} \; ; \quad \sum \vec{F}_y^e = \frac{d\vec{P}_y}{dt} \; ; \quad \sum \vec{F}_z^e = \frac{d\vec{P}_z}{dt}$$

- SI HA LA CONSERVAZIONE SEPARATA PER CIASCUN ASSE

URTI

UN URTO È UN EVENTO ISOLATO NEL QUALE UNA FORZA RELATIVAMENTE INTENSA AGISCE, PER UN TEMPO RELATIVAMENTE BREVE, SU CIASCUNO DI DUE O PIÙ CORPI CHE ENTRANO IN CONTATTO FRA LORO

ESEMPIO: URTO PALLINA - PARETE



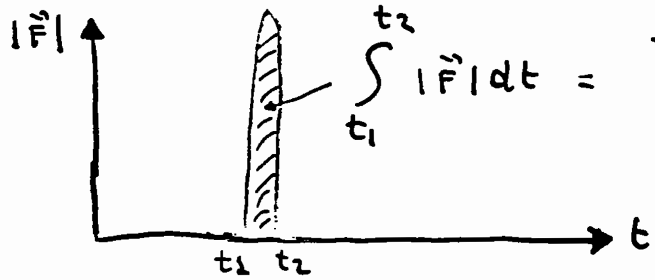
IPOTESI: $|V_i| = |V_f|$ OVVERO $\vec{V_i} = -\vec{V_f}$ (URTO ELASTICO)

IPOTESI (ragionevole): il muro non si sposta (massa infinita)

- $\vec{P_i} = m\vec{v}$; $\vec{P_f} = -m\vec{v}$
- $\Delta\vec{P} = \vec{P_f} - \vec{P_i} = -m\vec{v} - m\vec{v} = -2m\vec{v}$
- Ricordate che:

$$\vec{J} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}\,dt = \Delta\vec{P} = -2m\vec{v}$$

- La durata dell'urto è molto breve



$$\int_{t_1}^{t_2} |\vec{F}|\,dt = \overline{F}_{MEDIO} \cdot (t_2 - t_1)$$

$\Rightarrow$ la forza che si sviluppa durante l'urto è molto intensa (forza impulsiva)

N.B. PER DIMINUIRE LA FORZA CHE SI SVILUPPA DURANTE L'URTO OCCORRE AUMENTARE LA DURATA DELL'URTO

URTI: CARATTERISTICHE GENERALI

- CONSIDERIAMO L'URTO TRA DUE CORPI DI MASSA m_1 E m_2

- DURANTE L'URTO, SE NON VI SONO FORZE ESTERNE IMPULSIVE (OVVERO FORZE DI MODULO COMPARABILE A QUELLE CHE SI SVILUPPANO DURANTE L'URTO), LA QUANTITA' DI MOTO TOTALE SI CONSERVA

$$\Delta \vec{P}_{TOT} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}_e \, dt = \bar{F}_e (t_2 - t_1)$$

IN UN URTO SI HA: $(t_2 - t_1) = \Delta t \simeq 0$

$\Rightarrow$ SE $\bar{F}_e$ NON E' MOLTO GRANDE ($\bar{F}_e \to \infty$) SI HA CHE

$$\bar{F}_e (t_2 - t_1) \simeq 0 \Rightarrow \Delta \vec{P}_{TOT} = 0 \Rightarrow \vec{P}_{TOT} \text{ SI CONSERVA}$$

$\Rightarrow$ IL CENTRO DI MASSA SI MUOVE DI MOTO RETTILINEO UNIFORME

- **URTO ELASTICO:**

SE L'URTO TRA I DUE CORPI E' ELASTICO, ALLORA L'ENERGIA CINETICA TOTALE SI CONSERVA

$$\frac{1}{2} m_1 V_{1i}^2 + \frac{1}{2} m_2 V_{2i}^2 = \frac{1}{2} m_1 V_{1f}^2 + \frac{1}{2} m_2 V_{2f}^2$$

- **URTO ANELASTICO**

IN UN URTO ANELASTICO NON SI CONSERVA L'ENERGIA CINETICA TOTALE.

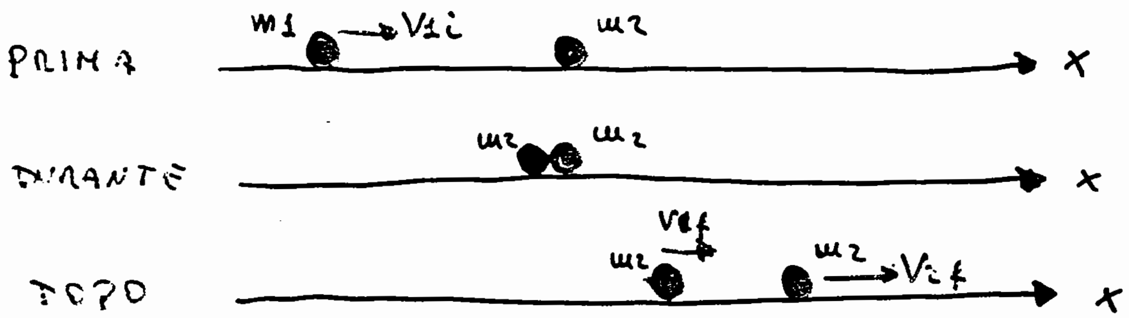
IN GENERE L'ENERGIA CINETICA FINALE E' MINORE DI QUELLA INIZIALE

- **URTO COMPLETAMENTE ANELASTICO**

DOPO L'URTO I DUE CORPI RIMANGONO ATTACCATI L'UNO ALL'ALTRO.

L'ENERGIA CINETICA TOTALE NON SI CONSERVA.

URTI ELASTICI IN UNA DIMENSIONE
BERSAGLIO FISSO



NELL'URTO SI CONSERVA $\vec{P}_{TOT}$ E K_{TOT}

$$\begin{cases} m_1 V_{1i} = m_1 V_{1f} + m_2 V_{2f} & (\vec{P}_{TOT}) \\ \frac{1}{2} m_1 V_{1i}^2 = \frac{1}{2} m_1 V_{1f}^2 + \frac{1}{2} m_2 V_{2f}^2 & (K_{TOT}) \end{cases}$$

$$\begin{cases} m_1 (V_{1i} - V_{1f}) = m_2 V_{2f} \\ m_1 (V_{1i} - V_{1f})(V_{1i} + V_{1f}) = m_2 V_{2f}^2 \end{cases}$$

DIVIDENDO LE DUE EQUAZIONI E RIORDINANDO SI HA:

$$V_{1f} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} V_{1i}$$

$$V_{2f} = \frac{2 m_1}{m_1 + m_2} V_{1i}$$

URTI ELASTICI IN UNA DIMENSIONE
BERSAGLIO FISSO
CASI PARTICOLARI

$$V_{1f} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} V_{1i} \quad ; \quad V_{2f} = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} V_{1i}$$

- MASSE UGUALI : $m_1 = m_2$

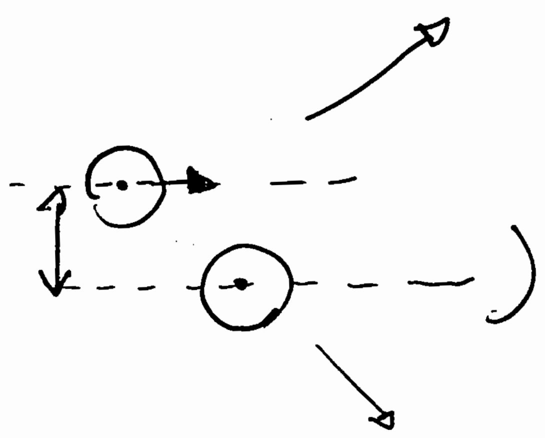
$$V_{1f} = 0 \quad ; \quad V_{2f} = V_{1i}$$

- BERSAGLIO MASSICCIO : $m_2 >> m_1$ (PARETE FISSA)

$$V_{1f} = -V_{1i} \quad ; \quad V_{2f} \simeq \left(\frac{2m_1}{m_2}\right) V_{1i} \simeq 0$$

- PROIETTILE MASSICCIO : $m_1 >> m_2$

$$V_{1f} \simeq V_{1i} \quad ; \quad V_{2f} \simeq 2V_{1i}$$



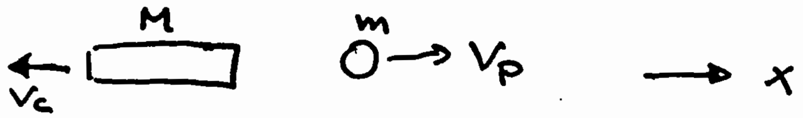
ESERCIZI CONSIGLIATI

Quantità di moto e urti

- Serway (3° Edizione) – Cap. 8
  - 1 – 5 – 7 – 9 – 11 – 15 – 17 – 19 – 21 – 23 – 33 – 35 – 37 – 39 – 47 - 51
- Halliday (5° Edizione) – Cap. 9
  - 1E – 3E – 5E – 11E – 13P – 15P – 19P – 21E – 25E – 27E – 31P – 33P
- Halliday (5° Edizione) – Cap. 10
  - 1E – 3E – 5E – 7E – 9P – 11P – 13P – 15P – 19E – 21E – 29P – 31E – 33E – 37P – 39P

PROBLEMA 8-8

UN CANNONE DI MASSA $M = 1300$ Kg SPARA UNA PALLA DI MASSA $m = 72$ Kg IN DIREZIONE ORIZZONTALE, A UNA VELOCITÀ V RELATIVA AL CANNONE DI 55 m/s. TROVARE LA VELOCITÀ DI RINCULO DEL CANNONE V_c E DEL PROIETTILE V_p RISPETTO AL SUOLO.



$V = V_p - V_c$ (velocità relativa della palla rispetto al cannone

→ LA QUANTITÀ DI MOTO ORIZZONTALE SI CONSERVA

$P_i = 0$

$P_f = P_c + P_p = M V_c + m V_p = M V_c + m (V + V_c)$

$P_i = P_f \Rightarrow 0 = M V_c + m (V + V_c)$

$\Rightarrow V_c = - \frac{m V}{M + m} = - \frac{72 \cdot 55}{1300 + 72} = -2.8$ m/s

- $V_p = V + V_c = 55 - 2.8 = 52$ m/s

$$V_{CM} = \frac{M_c \cdot V_c + m V_p}{M_c + m_p} =$$

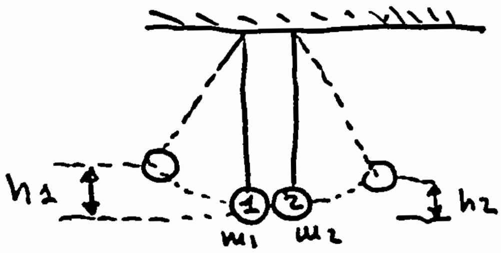
$$P_{TOT} = M_{TOT} \cdot V_{CM}$$

PROBLEMA 10-3

DUE SFERE METALLICHE, SOSPESE A CAVETTI VERTICALI, SONO INIZIALMENTE A CONTATTO. LA SFERA 1, CON MASSA $m_1 = 30\,g$, VIENE LASCIATA LIBERA DOPO ESSERE STATA TIRATA VERSO SINISTRA FINO ALL'ALTEZZA $h_1 = 8.0\,cm$. RITORNATA, CADENDO, ALLA POSIZIONE INIZIALE, SUBISCE UN URTO ELASTICO CONTRO LA SFERA 2, DI MASSA $m_2 = 75\,g$.

a) QUAL'È LA VELOCITA' V_{1f} DELLA SFERA 1 DOPO L'URTO?

b) A CHE ALTEZZA h_1' ARRIVERA' LA SFERA 1 DI RIMBALZO DOPO L'URTO?



- PRIMA DELL'URTO SI HA: $\frac{1}{2} m_1 V_{1i}^2 = m_1 g h_1$
- $V_{1i} = \sqrt{2 g h_1} = \sqrt{2 \cdot 9.8 \cdot 0.08} = 1.252\ m/s$
- URTO CONTRO UN BERSAGLIO FISSO:

$$v_{1f} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} V_{1i} = \frac{0.030 - 0.075}{0.030 + 0.075} \cdot 1.252 = -0.537 \simeq -0.54\ m/s$$

- PER TROVARE h_1' SI USA LA CONSERVAZIONE DELL'ENERGIA

$$m_1 g h_1' = \frac{1}{2} m_1 V_{1f}^2$$

$$h_1' = \frac{V_{1f}^2}{2g} = \frac{(-0.537)^2}{2 \cdot 9.8} = 0.0147\ m \simeq 1.5\ cm$$

- TROVIAMO LA VELOCITA' DI m_2 DOPO L'URTO:

$$v_{2f} = \frac{2 m_1 \cdot v_{1i}}{m_1 + m_2} = \frac{2 \cdot 0.030}{0.030 + 0.075} \cdot 1.252 = 0.715\ m/s \simeq 0.72\ m/s$$

- TROVIAMO L'ALTEZZA h_2

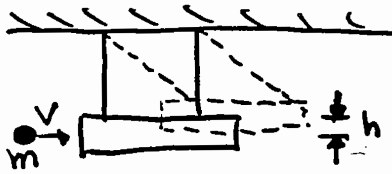
$$m_2 g h_2 = \frac{1}{2} m_2 v_{2f}^2$$

$$h_2 = \frac{V_{2f}^2}{2g} = \frac{(0.715)^2}{2 \cdot 9.8} = 0.0261\ m \simeq 2.6\ cm$$

PROBLEMA 10-5 : PENDOLO BALISTICO

UN BLOCCO DI LEGNO, DI MASSA $M = 5.4$ kg, E' SOSPESO CON DUE FUNI. UN PROIETTILE DI MASSA $m = 8.5$ g E' SPARATO CONTRO IL BLOCCO NEL QUALE SI ARRESTA. IL SISTEMA BLOCCO + PROIETTILE OSCILLA QUINDI VERSO DESTRA, E IL CENTRO DI MASSA DEL SISTEMA SI ALZA PER UNA DISTANZA VERTICALE $h = 6.3$ cm CORRISPONDENTE ALLA MASSIMA ELONGAZIONE DEL PENDOLO.

a) TROVARE LA VELOCITA' INIZIALE DEL PROIETTILE.



- SI CONSERVA LA QUANTITA' DI MOTO DURANTE L'URTO

$$P_i = mV \quad ; \quad P_f = (m+M)V_f \qquad P_i = P_f$$

- L'URTO E' COMPLETAMENTE ANELASTICO
- DOPO L'URTO SI CONSERVA L'ENERGIA MECCANICA

$$\frac{1}{2}(m+M)V_f^2 = (m+M)gh$$

- ELIMINANDO V_f DALLE DUE EQUAZIONI SI TROVA

$$V = \frac{M+m}{m}\sqrt{2gh} = \frac{5.4+0.0085}{0.0085}\sqrt{2\cdot 9.8\cdot 0.063} = 630 \text{ m/s}$$

- ENERGIA CINETICA INIZIALE DEL PROIETTILE

$$K_p = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}\cdot 0.0085\cdot 630^2 = 1900 \text{ J}$$

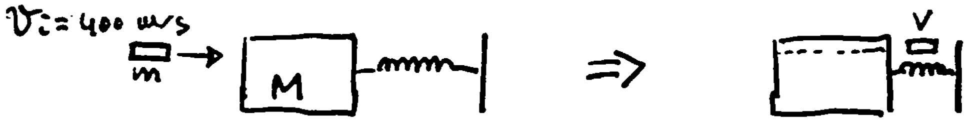
- ENERGIA MECCANICA DEL BLOCCO + PROIETTILE DOPO L'URTO

$$E = (M+m)gh = (5.4+0.0085)\cdot 9.8\cdot 0.063 = 3.3 \text{ J}$$

- LA DIFFERENZA DI ENERGIA, CIOE' $(1900-3.3)$ J SI E' CONVERTITA IN CALORE, CIOE' L'URTO HA SCALDATO IL BLOCCO.

PROBLEMA

UNA PALLOTTOLA DI 5 g, CON VELOCITA' INIZIALE DI 400 m/s ATTRAVERSA IL BLOCCO DI 1 Kg. IL BLOCCO, INIZIALMENTE IN QUIETE SU UNA PIATTAFORMA ORIZZONTALE LISCIA, E' CONNESSO AD UNA MOLLA DI COSTANTE ELASTICA 900 N/m. SE IL BLOCCO SI MUOVE DI UN TRATTO DI 5 cm A DESTRA DOPO L'IMPATTO, CALCOLARE (a) LA VELOCITA' CON LA QUALE IL PROIETTILE ESCE DAL BLOCCO e (b) L'ENERGIA DISSIPATA NELL'URTO.



- NELL' URTO SI CONSERVA LA QUANTITA' DI MOTO MA NON L'ENERGIA PERCHE' L'ATTRAVERSAMENTO DEL BLOCCO DA PARTE DEL PROIETTILE COMPORTA SICURAMENTE UNA PERDITA DI ENERGIA CINETICA

$$P_i = m v_i \quad ; \quad P_f = m v + M V_B \quad \Rightarrow \quad P_i = P_f$$

- SUBITO DOPO L'URTO LA MOLLA SI COMPRIME, MA IN QUESTO CASO SI CONSERVA L'ENERGIA

$$E_i = K_i = \frac{1}{2} M V_B^2 \quad ; \quad E_f = U_k = \frac{1}{2} k \Delta x^2 \quad \Rightarrow \quad E_i = E_f$$

$$\frac{1}{2} M V_B^2 = \frac{1}{2} k \Delta x^2 \quad \Rightarrow \quad V_B = \sqrt{\frac{k}{M}} \cdot \Delta x = \sqrt{\frac{900}{1}} \cdot 0.05 = 1.50 \text{ m/s}$$

- DA CUI RICAVIAMO v

$$m v_i = m v + M V_B \quad \Rightarrow \quad v = v_i - \frac{M}{m} V_B = 400 - \frac{1000}{5} \cdot 1.50 = 100 \text{ m/s}$$

- TROVIAMO ORA LA PERDITA DI ENERGIA CINETICA DURANTE L'URTO

$$K_i = \frac{1}{2} m v_i^2 = \frac{1}{2} \cdot 0.005 \cdot 400^2 = 400 \text{ J}$$

$$K_f = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} M V_B^2 = \frac{1}{2} \cdot 0.005 \cdot 100^2 + \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1.50^2 = 25 + 1.12 = 26.1 \text{ J}$$

$$\Rightarrow \Delta E = K_f - K_i = 26.1 - 400 = -374 \text{ J}$$

- LA PERDITA DI ENERGIA CINETICA SI E' TRASFORMATA IN CALORE ED HA RISCALDATO IL BLOCCO DI LEGNO ED IL PROIETTILE.

PROBLEMA 10-4

IN UN REATTORE NUCLEARE I NEUTRONI VELOCI "FRESCHI" DEVONO ESSERE RALLENTATI PER POTER PARTECIPARE EFFICACEMENTE AL MANTENIMENTO DELLA REAZIONE A CATENA. A QUESTO SCOPO VENGONO LASCIATI LIBERI DI URTARSI CON I NUCLEI DEGLI ATOMI DI UN MODERATORE.

a) QUAL'E' LA FRAZIONE DELL'ENERGIA CINETICA INIZIALE PERDUTA DA UN NEUTRONE DI MASSA m_1 IN UN URTO FRONTALE ELASTICO CON UN NUCLEO DI MASSA m_2 INIZIALMENTE A RIPOSO?

- $K_i = \frac{1}{2} m_1 V_{1i}^2$; $K_f = \frac{1}{2} m_1 V_{1f}^2$

$$R = \frac{K_i - K_f}{K_i} = \frac{V_{1i}^2 - V_{1f}^2}{V_{1i}^2} = 1 - \frac{V_{1f}^2}{V_{1i}^2}$$

- PER UN URTO ELASTICO SI HA:

$$\frac{V_{1f}}{V_{1i}} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}$$

- SOSTITUENDO SI HA:

$$R = \frac{4 m_1 m_2}{(m_1 + m_2)^2}$$

- VALUTIAMO R NEL CASO DEL PIOMBO, CARBONIO E IDROGENO

CARBONIO: $\frac{m_2}{m_1} = 12$; PIOMBO: $\frac{m_2}{m_1} = 206$; IDROGENO: $\frac{m_2}{m_1} \simeq 1$

– PIOMBO $R = \frac{4 \cdot 206 \cdot 1}{(1+206)^2} = 0.019 = 1.9\%$

– CARBONIO $R = \frac{4 \cdot 12 \cdot 1}{(1+12)^2} = 0.28 = 28\%$

– IDROGENO $R = \frac{4 \cdot 1 \cdot 1}{(1+1)^2} = 1 = 100\%$

Esercizio 4 (6 punti)

Una palla da baseball che viaggia alla velocità di 150 km/h viene colpita da una mazza e torna indietro al lanciatore nella direzione iniziale e con la stessa velocità. Se la massa della palla è 200 g, si trovino:
a) la variazione di quantità di moto della palla
b) l'impulso impartito alla palla
c) la forza media agente se la mazza è rimasta in contatto con la palla per 0.100 s.

(Risultato: c) 167 N)

COME PRIMA COSA TRASFORMIAMO L'UNITA' DI MISURA DI V

$$v = 150 \frac{km}{h} = 150 \cdot \frac{1000\ m}{3600\ s} = 150 \frac{1}{3.6} = 41.67 \frac{m}{s}$$

a) $P_{iniz} = m v \quad ; \quad P_{fin} = -m v$

$\Rightarrow \Delta P = P_{fin} - P_{iniz} = -m v - m v = -2 m v = -2 \cdot 0.2 \cdot 41.67 = -16.7 kg$

b) LA VARIAZIONE DI QUANTITA' DI MOTO E' UGUALE ALL'IMPULSO DELLA FORZA

$$\vec{I} = \int_{t_{in.}}^{t_{fin}} \vec{F}\, dt = \Delta \vec{P}$$

$$I = \Delta P = -16.7\ N \cdot s$$

c) $$\vec{I} = \int_{t_{in.}}^{t_{fin}} \vec{F} \cdot dt = \vec{F}_{medio} \cdot \Delta t$$

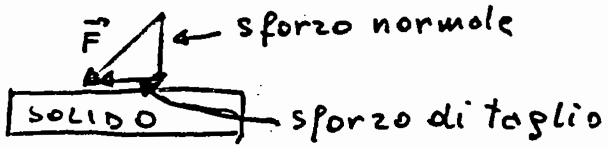
$$F_{medio} = \frac{I}{\Delta t} = \frac{16.7}{0.1} = 167\ N$$

STATI DELLA MATERIA

SOLIDO:

- LE DISTANZE TRA CIASCUN PUNTO MATERIALE CHE COSTITUISCE UN CORPO SOLIDO SONO FISSE.

- UN SOLIDO HA 6 GRADI DI LIBERTA': 3 PER INDIVIDUARE LA POSIZIONE DEL CENTRO DI MASSA E 3 PER INDICARE LA ROTAZIONE INTORNO A TRE ASSI COORDINATI.



- UN SOLIDO PUO' SOPPORTARE SFORZI DI TAGLIO E SFORZI NORMALI
- UN SOLIDO HA FORMA PROPRIA E VOLUME PROPRIO

FLUIDI: LIQUIDI E GAS

- I FLUIDI NON POSSONO SOPPORTARE SFORZI DI TAGLIO, QUINDI NON HANNO UNA FORMA PROPRIA, MA SI ADATTANO A QUELLA DEL RECIPIENTE

- I LIQUIDI HANNO VOLUME PROPRIO (SONO INCOMPRIMIBILI) MENTRE I GAS NON HANNO UN VOLUME PROPRIO ED OCCUPANO TUTTO LO SPAZIO A DISPOSIZIONE

GRANDEZZE ESTENSIVE ED INTENSIVE

- NELLA MECCANICA DEI FLUIDI E NELLA TERMODINAMICA TRATTEREMO DI OGGETTI COSTITUITI DA UN NUMERO MOLTO GRANDE (~10 DI PUNTI MATERIALI (ATOMI, MOLECOLE) CHE ASSUMEREMO FORMARE UN CONTINUO DI PUNTI, CIOÈ PRESO QUALSIASI ELEMENTO INFINITESIMO DI VOLUME, ESSO CONTIENE ALL'INTERNO ANCORA UN NUMERO MOLTO GRANDE DI PUNTI

- LE GRANDEZZE <u>ESTENSIVE</u> CHE CARATTERIZZANO UN CORPO DIPEND. DALL'ESTENSIONE (VOLUME) DEL CORPO

  ESEMPIO: MASSA, VOLUME

  PROPRIETÀ: LE GRANDEZZE ESTENSIVE SI SOMMANO

  CORPO A $\rightarrow$ VOLUME $= V_A$

  CORPO B $\rightarrow$ VOLUME $= V_B$

  CORPO (A+B) $\rightarrow$ VOLUME $= V_A + V_B$

- LE GRANDEZZE <u>INTENSIVE</u> NON DIPENDONO DALL'ESTENSIONE DEL CORPO

  ESEMPIO: PRESSIONE, TEMPERATURA, DENSITÀ

  PROPRIETÀ: LE GRANDEZZE INTENSIVE NON SI SOMMANO, OCCORRE FARE INVECE UNA MEDIA PESATA.

  CORPO A $\rightarrow$ TEMPERATURA T_A

  CORPO B $\rightarrow$ TEMPERATURA T_B $\quad (T_B \geq T_A)$

  CORPO (A+B) $\rightarrow$ $T_A \leq T_{A+B} \leq T_B$

DENSITA' (MASSA VOLUMICA)

- DATO UN CORPO DI MASSA m E VOLUME V, SI DEFINISCE LA DENSITA' COME:

$$\rho = \frac{m}{V}.$$

- LA DENSITA' E' UNA GRANDEZZA INTENSIVA

- LA DENSITA' E' UNA CARATTERISTICA DELLA SOSTANZA CHE SI STA CONSIDERANDO:

ACQUA : $1.0 \cdot 10^3$ Kg/m^3 $\rightarrow$ 1 kg/dm^3

ALLUMINIO : $2.7 \cdot 10^3$ kg/m^3

PIOMBO : $11.3 \cdot 10^3$ kg/m^3

ORO : $18.3 \cdot 10^3$ kg/m^3

ARIA : 1.29 kg/m^3 [STP]

OSSIGENO : 1.43 kg/m^3 [STP]

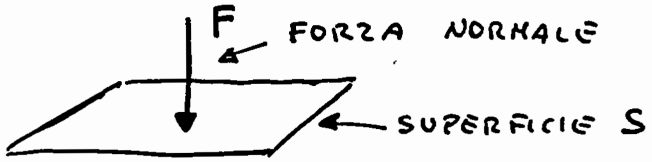
- LA DENSITA' PUO' ANCHE VARIARE DA PUNTO A PUNTO DI UN DATO CORPO

$$\rho(x,y,z) = \frac{dm(x,y,z)}{dV} \Rightarrow M = \int_V \rho(x,y,z)\, dV$$

- SI DEFINISCE PESO SPECIFICO IL RAPPORTO TRA LA DENSITA' DI UN CORPO E LA DENSITA' DELL'ACQUA A 4°C.

$$P.S. = \frac{\rho}{\rho_A}$$

PRESSIONE



$$P = \frac{\text{FORZA NORMALE}}{\text{SUPERFICIE}}$$

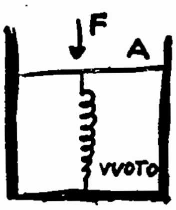
- LA PRESSIONE È UNO SCALARE
- SI MISURA IN $N/m^2 = 1$ Pascal $= 1$ Pa
- LA PRESSIONE VIENE MISURATA IN MOLTE ALTRE UNITÀ DI MISURA:

  ATMOSFERE, BAR, mm Hg, TORR, PSI

- LA PRESSIONE IN UN PUNTO SI DEFINISCE COME

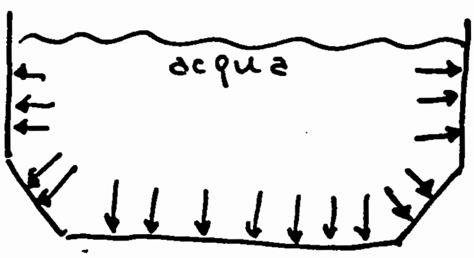
$$P = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta F}{\Delta A} = \frac{dF}{dA}$$

- LA PRESSIONE IN UN FLUIDO È LA STESSA QUALUNQUE SIA L'ORIENTAZIONE DELLA SUPERFICIE A SCELTA

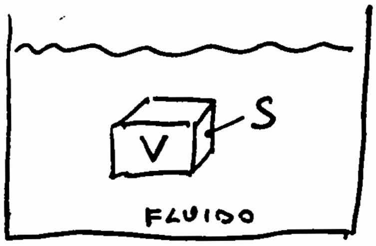


$$P = \frac{F}{A} = \frac{kx}{A}$$

- LA FORZA DI PRESSIONE CHE UN FLUIDO ESERCITA SUL CONTENITORE È SEMPRE NORMALE ALLA SUPERFICIE DEL CONTENITORE



FORZE IN UN FLUIDO A RIPOSO



- CONSIDERIAMO UN ELEMENTO QUALSIASI DI UN FLUIDO CONTENUTO ALL'INTERNO DI UN RECIPIENTE. L'ELEMENTO, DI FORMA QUAL. È CARATTERIZZATO DA UN VOLUME V E DA UNA SUPERFICIE S.

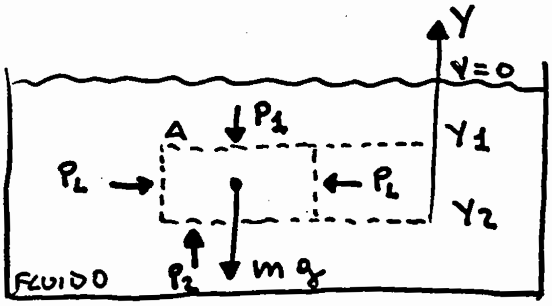
- SULL'ELEMENTO DI FLUIDO AGISCONO DELLE FORZE DI VOLUME, CHE DIPENDONO CIOÈ DAL VOLUME DI FLUIDO CONSIDERATO.
  ESEMPIO: FORZA DI GRAVITA' $F = mg = \rho V g$

- AGISCONO ANCHE DELLE FORZE DI SUPERFICIE, CHE DIPENDONO CIOE' DALL'ESTENSIONE DELLA SUPERFICIE DELL'ELEMENTO CONSIDERATO
  ESEMPIO: FORZA DI PRESSIONE $F = pS$

- IN UN FLUIDO A RIPOSO LA SOMMA VETTORIALE DELLE FORZE DI VOLUME E DELLE FORZE DI SUPERFICIE E' NULLA.

LEGGE DI STEVINO

VARIAZIONE DI P CON LA PROFONDITÀ



$g \downarrow$

- LE FORZE DI PRESSIONE SULLE FACCE LATERALI SI COMPENSANO E NON LE CONSIDERIAMO

- FORZE DI SUPERFICIE LUNGO L'ASSE Y

$$\vec{F_1} = -P_1 A \quad ; \quad \vec{F_2} = P_2 A$$

- FORZE DI VOLUME LUNGO L'ASSE Y

$$\vec{F_g} = -mg = -\rho V g = -\rho A (Y_1 - Y_2) g$$

- ALL'EQUILIBRIO LA SOMMA VETTORIALE DELLE FORZE È NULLA

$$\vec{F_1} + \vec{F_2} + \vec{F_g} = 0$$

$$-P_1 A + P_2 A - \rho A (Y_1 - Y_2) g = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{P_2 = P_1 + \rho g (Y_1 - Y_2)}$$

- L'ESPRESSIONE È VALIDA SIA PER I LIQUIDI CHE PER I GAS, AD ESEMPIO PER L'ATMOSFERA

LEGGE DI STEVINO: TUTTI AL MARE

$$P_2 = P_1 + \rho g (Y_1 - Y_2)$$

- VALUTIAMO LA PRESSIONE P ALLA PROFONDITA' h SOTTO LA SUPERFICIE DEL MARE
  - P_0 = PRESSIONE ATMOSFERICA AL LIVELLO DEL MARE

$$Y_1 = 0 \,,\; P_1 = P_0 \qquad ; \quad P_2 = -h \,,\; P_2 = P$$

$$P = P_0 + \rho g h$$

- NON COMPARE NESSUN PARAMETRO RELATIVO ALLE DIMENSIONI ORIZZONTALI. L'ESPRESSIONE E' VALIDA QUALUNQUE SIA LA FORMA DEL CONTENITORE.

- CALCOLIAMO LA PRESSIONE AD UNA PROFONDITA' DI 10 m

$$P_0 = 1 \text{ atm} = 1.01 \cdot 10^5 \text{ Pa} \simeq 10^5 \text{ Pa} = 1 \text{ bar}$$

$$\rho_{acque\text{-}di\text{-}mare} = 1.024 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3 \simeq 10^3 \text{ kg/m}^3$$

$$g = 9.8 \text{ m/s}^2 \simeq 10 \text{ m/s}^2$$

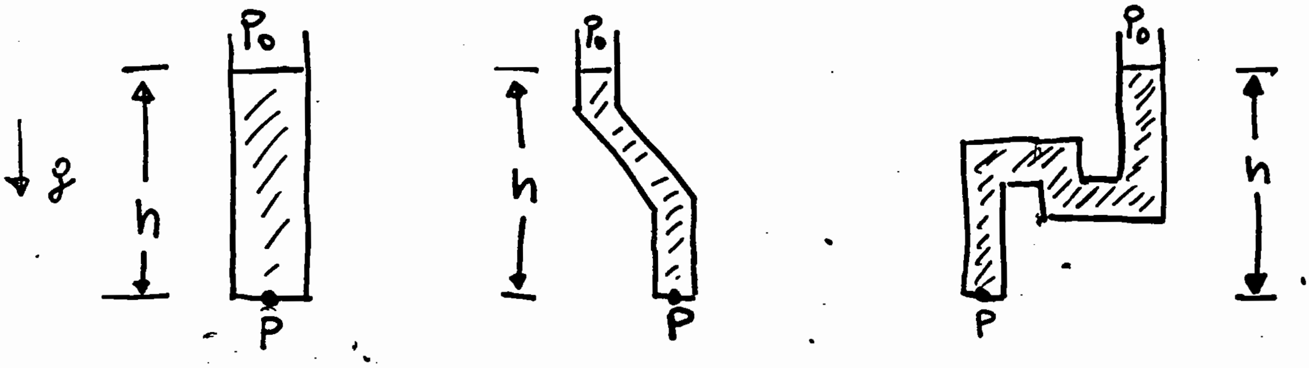
$$\rho g h = 10^3 \cdot 10 \cdot 10 = 10^5 \text{ Pa} \simeq 1 \text{ atm}$$

$$\Rightarrow \quad P = P_0 + \rho g h = 1 \text{ atm} + 1 \text{ atm} = 2 \text{ atm}$$

$\Rightarrow$ AD OGNI 10 m DI PROFONDITA' BISOGNA AGGIUNGERE 1 ATMOSFERA ALLA PRESSIONE ESTERNA

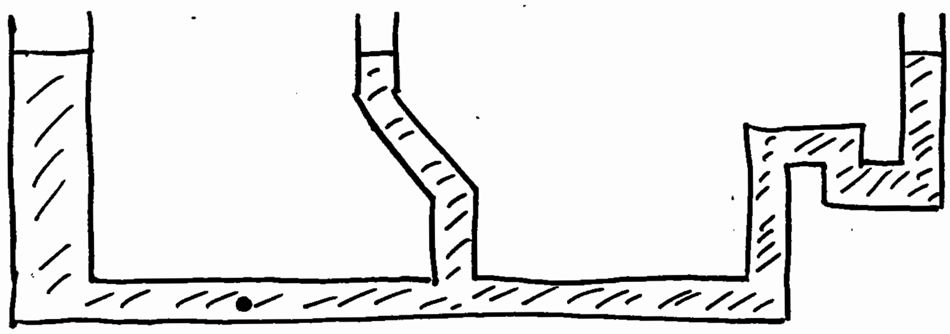
$$P(-20\,m) = 3 \text{ atm} \,,\quad P(-30\,m) = 4 \text{ atm} \,, \ldots$$

PRINCIPIO DEI VASI COMUNICANTI



$P = P_0 + \rho g h$ $\qquad$ $P = P_0 + \rho g h$ $\qquad$ $P = P_0 + \rho g h$

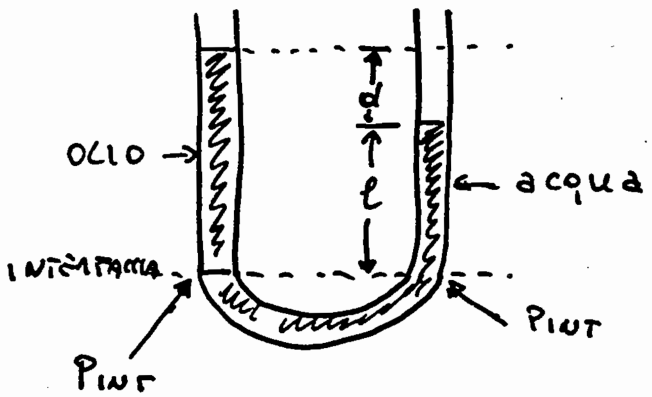
- I PUNTI CHE SI TROVANO ALLA STESSA DISTANZA VERTICALE h DAL PELO DEL FLUIDO (STESSA QUOTA), AVRANNO TUTTI LA STESSA PRESSIONE, INDIPENDENTEMENTE DALLA FORMA DEL CONTENITORE



- SE METTIAMO IN COMUNICAZIONE I TRE TUBI, IL FLUIDO RAGGIUNGERA' LA STESSA QUOTA IN TUTTI E TRE I TUBI IN MODO DA AVERE LA STESSA PRESSIONE, A PARITA' DI QUOTA, IN QUALSIASI PARTE DEL FLUIDO.

PROBLEMA 15-3

IL TUBO A U DELLA FIGURA CONTIENE DUE LIQUIDI IN EQUILIBRIO STATICO: L'ACQUA DI DENSITA' ρ_A NEL BRACCIO DI DESTRA E OLIO DI DENSITA' SCONOSCIUTA NEL BRACCIO DI SINISTRA. LE MISURE DANNO $\ell = 135$ mm e $d = 12.3$ mm. TROVARE LA DENSITA' DELL'OLIO.



- SE NELL'INTERFACCIA LA PRESSIONE E' P_{INT}, ALLORA ALLA STESSA QUOTA, NELL'ALTRO BRACCIO, DEVE ESSERE ANCORA P_{INT} (PRINCIPIO DEI VASI COMUNICANTI)

- NEL BRACCIO DESTRO (ACQUA) ABBIAMO:

$$P_{INT} = P_0 + \rho_A g \ell$$

- NEL BRACCIO SINISTRO (OLIO) ABBIAMO:

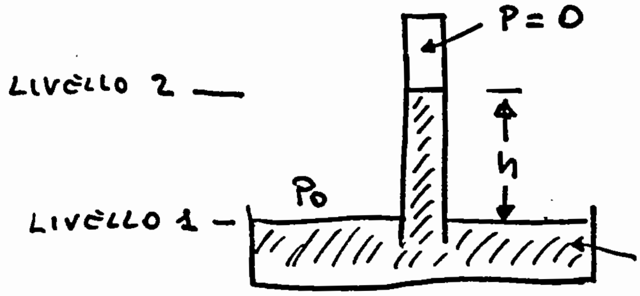
$$P_{INT} = P_0 + \rho_x g (\ell + d)$$

- UGUAGLIANDO QUESTE DUE ESPRESSIONI ABBIAMO:

$$\rho_x = \rho_A \frac{\ell}{\ell + d} = 10^3 \frac{135}{135 + 12.3} = 916 \text{ Kg/m}^3$$

- IL RISULTATO NON DIPENDE DA P_0 OPPURE DA g, COME DOVEVA ESSERE IN QUANTO LA DENSITA' DIPENDE SOLO DAL MATERIALE

MISURA DELLA PRESSIONE: BAROMETRO A MERCURIO



in questo spazio è stato fatto il vuoto e contiene solo vapori di mercurio

$\rho = 13.6 \cdot 10^3$ Kg/m

$$P_2 = P_1 + \rho g (Y_1 - Y_2)$$

- $Y_1 = 0$, $P_1 = P_0$, $Y_2 = h$, $P_2 = 0$
- APPLICANDO LA LEGGE DI STEVINO SI HA:

$$0 = P_0 + \rho g (0 - h)$$

$$\Rightarrow \boxed{P_0 = \rho g h}$$

- MISURANDO L'ALTEZZA DELLA COLONNINA DI MERCURIO SI MISURA LA PRESSIONE ATMOSFERICA
- IL VALORE DELLA PRESSIONE DIPENDE DAL VALORE DI g E DALLA DENSITA' DEL MERCURIO (FUNZIONE DELLA TEMPERATURA)
- 1 mm DI Hg E' UGUALE A 1 torr SE $g = 9.80665$ m/s^2 e $T = 0$ °C

PROBLEMA 15-4

LA COLONNA IN UN BAROMETRO A MERCURIO HA UN'ALTEZZA h DI 740.35 mm. LA TEMPERATURA E' −5.0 °C E LA DENSITA' DEL MERCURIO A TALE TEMPERATURA E' DI $13.608 \cdot 10^3$ Kg/m³. L'ACCELERAZIONE DI GRAVITA' DEL LUOGO E' 9.7835 m/s². TROVARE LA PRESSIONE ATMOSFERICA IN PASCAL E IN TORR.

$$P_0 = \rho g h = 1.3608 \cdot 10^4 \times 9.7835 \times 0.74035 =$$

$$= 9.8566 \cdot 10^4 \text{ Pa}$$

- TROVIAMO L'EQUIVALENZA TRA torr E Pascal

$$1 \text{ torr} = (1.35955 \cdot 10^4 \text{ Kg/m}^3) \cdot (9.80655 \text{ m/s}^2)(1 \cdot 10^{-3} \text{ m}) =$$

$$= 133.326 \text{ Pa}$$

$$P_0 = 9.8566 \cdot 10^4 \text{ Pa} = \frac{9.8566 \cdot 10^4}{133.326} = 739.29 \text{ torr}$$

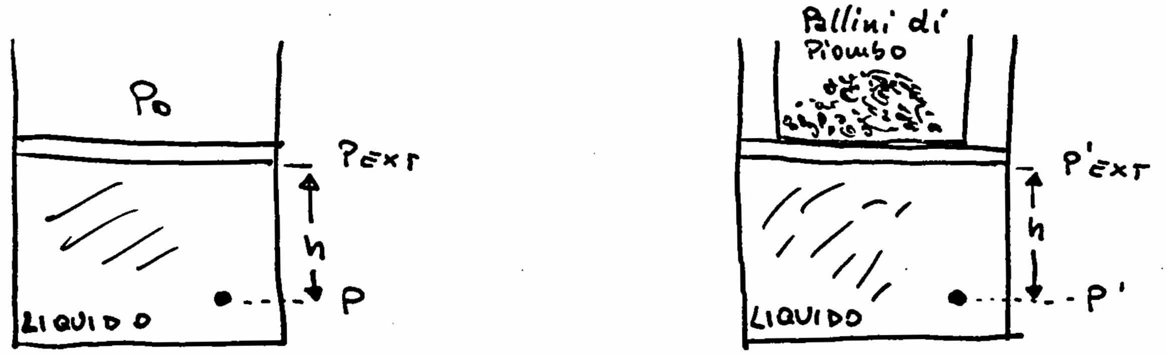
- NOTARE CHE

$$739.29 \text{ torr} \neq 740.35 \text{ mm Hg}$$

PRINCIPIO DI PASCAL

UN CAMBIAMENTO DI PRESSIONE APPLICATO AD UN FLUIDO CONFINATO VIENE TRASMESSO INALTERATO A OGNI PORZIONE DI FLUIDO E ALLE PARETI DEL RECIPIENTE CHE LO CONTENGONO

- DIMOSTRAZIONE NEL CASO DI UN LIQUIDO INCOMPRIMIBILE



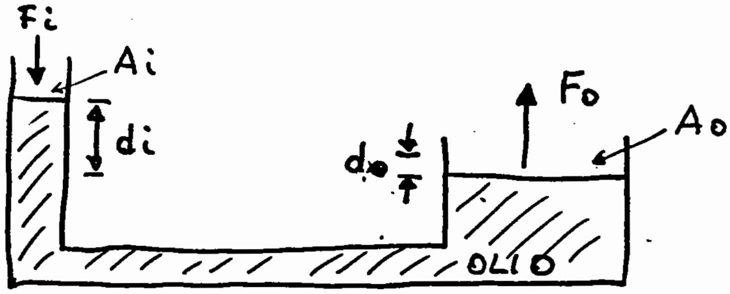
$P = P_{ext} + \rho g h$ $\qquad$ $P' = P'_{ext} + \rho g h$

- DATO CHE $\rho g h$ NON E' CAMBIATO (LIQUIDO INCOMPRIMIBILE)

$$P' - P = P'_{ext} - P_{ext} = \Delta P_{ext}$$

- IL PRINCIPIO DI PASCAL E' VALIDO ANCHE PER I GAS, MA OCCORRE ATTENDERE CHE NEL GAS SI RISTABILISCA L'EQUILIBRIO TERMODINAMICO

IL MARTINETTO IDRAULICO



- IL LIQUIDO E' INCOMPRIMIBILE, PER CUI TANTO VOLUME DI LIQUI SI ABBASSA NEL RAMO DI SINISTRA E TANTO SE NE DEVE SOLLEVARE NEL RAMO DI DESTRA

$$A_i \cdot d_i = A_o \cdot d_o \implies d_o = d_i \frac{A_i}{A_o}$$

- LA VARIAZIONE DI PRESSIONE APPLICATA SUL LIQUIDO DALLA FORZA F_i DEVE ESSERE LA STESSA IN TUTTO IL FLUIDO

$$\Delta p = \frac{F_i}{A_i} = \frac{F_o}{A_o} \implies F_o = F_i \frac{A_o}{A_i}$$

- LA FORZA F_i VIENE MOLTIPLICATA PER IL FATTORE $\frac{A_o}{A_i}$
- TROVIAMO IL LAVORO COMPIUTO DALLA FORZA F_i E F_o

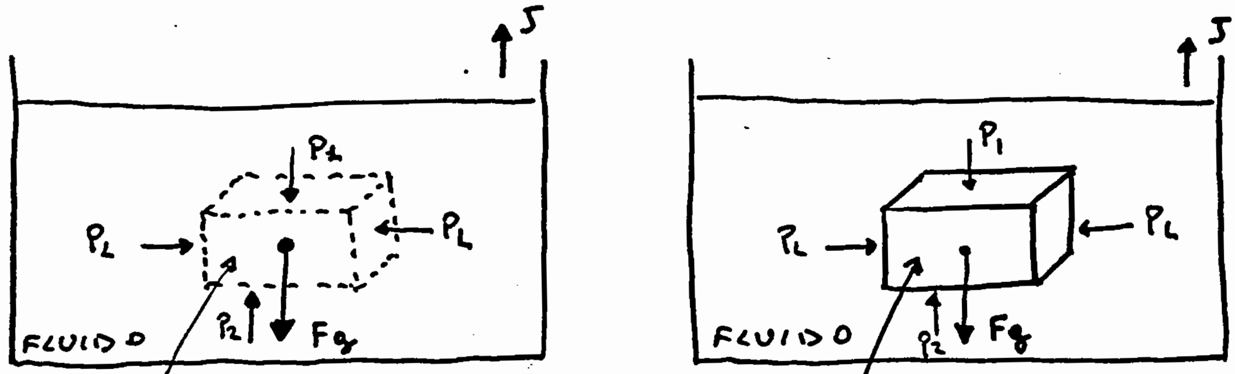
$$L_i = F_i \cdot d_i$$

$$L_o = F_o \cdot d_o = F_i \frac{A_o}{A_i} \cdot d_i \frac{A_i}{A_o} = F_i \cdot d_i$$

I DUE LAVORI SONO UGUALI (CONSERVAZIONE DELL'ENERGIA)

PRINCIPIO DI ARCHIMEDE

UN CORPO IMMERSO IN UN FLUIDO INTERAMENTE O PARZIALMENTE E' SOGGETTO A UNA SPINTA VERSO L'ALTO PARI AL PESO DEL FLUIDO SPOSTATO DAL CORPO STESS



ELEMENTO DI FLUIDO IN EQUILIBRIO CON IL RESTO DEL FLUIDO

CORPO DI DENSITA' ρ_x AVENTE LA STESSA FORMA DELL'ELEMENT DI FLUIDO CONSIDERATO IN PRECEDENZA

- IL FLUIDO E' IN EQUILIBRIO QUINDI LA FORZA DI VOLUME DEVE COMPENSARE LE FORZE DI SUPERFICIE DOVUTE ALLA PRESSIONE

$$\vec{F}_g = -\rho_F \cdot V \cdot g\ \hat{\jmath}$$

$$\vec{F}_s + \vec{F}_g = 0$$

$$\Rightarrow \vec{F}_s = -\vec{F}_g = \rho_F V g\ \hat{\jmath}$$

- QUANDO IMMERGIAMO UN CORPO QUALSIASI AVENTE LA STESSA FORMA DELL'ELEMENTO DI FLUIDO, LE FORZE DI SUPERFICI SARANNO LE STESSE, MA LA FORZA DI VOLUME E' DIVERSA

$$\vec{F}_g = -\rho_x V g\ \hat{\jmath}$$

$$\vec{F}_s = \rho_F V g\ \hat{\jmath}$$

LA FORZA NETTA VALE

$$\vec{F} = \vec{F}_s + \vec{F}_g = (\rho_F - \rho_x) V g\ \hat{\jmath}$$

- LA FORZA E' DIRETTA VERSO L'ALTO SE $\rho_x < \rho_F$
- NEL CASO DELL'ACQUA IL LEGNO GALLEGGIA MENTRE IL SASSO AFFONDA.

ESERCIZI CONSIGLIATI

Statica dei fluidi

- Serway (3° Edizione) – Cap. 15
  - 1 – 3 – 7 – 9 – 11 – 13 – 15 – 17 – 19 – 21 – 23 – 25
- Halliday (5° Edizione) – Cap. 15
  - 1E – 3E – 5P – 7E – 9E – 11E – 13P – 19E – 21E – 23E – 25E – 27P – 29P – 31P

Prova scritta di Fisica del 28 Settembre 2000

1. Una sfera rigida di volume V = 500 l e densità $\rho = 800\ kg/m^3$ è ancorata sul fondo del mare tramite una molla di costante elastica k. La molla è deformata di 20 cm rispetto alla posizione di riposo.

a) Dire se in queste condizioni la molla è compressa o allungata (giustificando la risposta).

b) Si calcoli la costante elastica della molla (per semplicità si assuma che la densità dell'acqua di mare sia $\rho_a = 1\ g/cm^3$).

c) Successivamente la sfera viene sganciata dalla molla e lasciata libera di muoversi. Sapendo che la resistenza del mezzo può essere rappresentata come una forza pari a $A \cdot v$, dove v è la velocità della sfera e A vale $2 \cdot 10^3\ N \cdot s/m$, trovare la velocità limite che verrà raggiunta dalla sfera.

Soluzione

a) La sfera ancorata tramite la molla è soggetta a tre forze:
1) la forza di gravità diretta verso il basso, pari a: $F_g = \rho \cdot V \cdot g$
2) la spinta di Archimede diretta verso l'alto, pari a: $F_a = \rho_a \cdot V \cdot g$
3) e la forza di richiamo elastica della molla il cui verso sarà tale da controbilanciare le altre due forze e dare una risultante nulla delle forze che agiscono sulla sfera. In questo caso, dato che la densità dell'acqua ($1\ g/cm^3 = 10^3\ kg/m^3$) è superiore alla densità della sfera ($800\ kg/m^3$), la spinta di Archimede prevale ed il corpo tenderebbe a galleggiare. La molla esercita quindi una forza di richiamo verso il basso per mantenere il corpo in equilibrio e risulta pertanto allungata.

b) Numericamente la forza di richiamo della molla vale:

$$F_k = F_a - F_g = (\rho_a - \rho) \cdot V \cdot g = (1000 - 800) \cdot 0.5 \cdot 9.8 = 980\ N$$

(Ricordiamo che 500 l sono uguali a 0.5 m^3).

$$k = \frac{F_k}{\Delta x} = 980/0.2 = 4900\ N/m$$

c) Una volta che la sfera viene lasciata libera di muoversi, questa comincerà a spostarsi verso l'alto. Nel suo stato di moto essa subisce la forza dovuta alla resistenza dell'acqua. La forza è diretta in verso opposto a quello del moto ed è proporzionale alla velocità: $F_m = A \cdot v$. Questa forza tende a rallentare il moto della sfera fino a quando la resistenza del mezzo non controbilancia esattamente la risultante delle altre due forze che fanno muovere la sfera, ovvero la forza di gravità e la spinta di Archimede. In queste condizioni la velocità della sfera si stabilizza e si dice che ha raggiunto la velocità limite.

$$A \cdot v_{limite} = F_a - F_g = 980\ N$$

quindi si ha:

$$v_{limite} = \frac{F_a - F_g}{A} = 980/2000 = 0.49\ m/s$$

Esercizio 5 (5 punti)

Una corona che si suppone sia fatta d'oro, ha la massa di 8.00 Kg. Quando viene posta in un recipiente pieno d'acqua traboccano 691 cm^3 d'acqua.
a) La corona è fatta di oro puro oppure di una lega con qualche altro metallo?
b) Se la corona viene appesa ad un dinamometro ed immersa completamente in acqua, quale sarà il valore di massa misurato dalla bilancia?
(densità dell'oro $= 19.3 \cdot 10^3\ kg/m^3$)

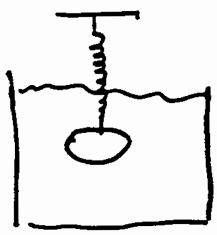
(Risultato: b) m=7.3 Kg)

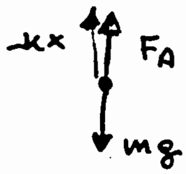
a) CALCOLIAMO LA DENSITÀ DELLA CORONA:

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{8}{691 \cdot 10^{-6}} = 11.6 \cdot 10^3\ kg/m^3$$

LA DENSITÀ È DIVERSA DA QUELLA DELL'ORO, QUINDI LA CORONA NON È DI ORO PURO.

b)





SULLA CORONA AGISCONO LA FORZA PESO, LA SPINTA DI ARCHIMEDE E LA FORZA DI RICHIAMO DEL DINAMOMETRO

FORZA DINAMOMETRO $= mg - F_a = mg - \rho_A V_A g =$

$$= 8 \cdot 9.8 - 10^3 \cdot 0.691 \cdot 10^{-3}\, 9.8 = (8 - 0.691) \cdot 9.8 =$$

$= 71\ N$ (oppure 7.309 Kp)

QUESTO È IL PESO APPARENTE DELLA CORONA

DINAMICA DEI FLUIDI

FLUIDO IDEALE

IL MOTO DI UN FLUIDO REALE È ALQUANTO COMPLESSO, SI STUDIA QUINDI IL MOVIMENTO DI UN FLUIDO IDEALE

- FLUIDO INCOMPRIMIBILE.
  LA SUA DENSITA' HA VALORE COSTANTE NEL TEMPO E NON VARIA IN FUNZIONE DELLA PRESSIONE

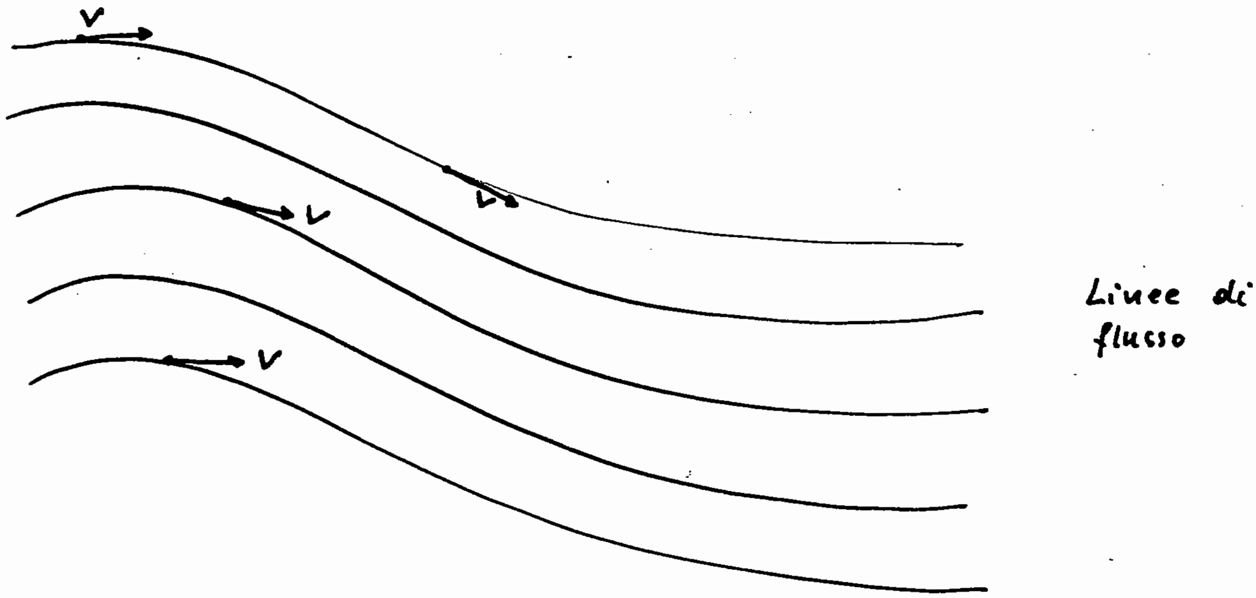
- FLUIDO NON VISCOSO.
  OVVERO NON SONO PRESENTI FORZE D'ATTRITO

- MOTO LAMINARE (FLUSSO STAZIONARIO).
  LA VELOCITA' DEL FLUIDO IN OGNI PUNTO FISSATO NON CAMBIA NEL TEMPO, NE' IN DIREZIONE NE' IN INTENSITA'.
  UN MOTO NON LAMINARE SI DICE TURBOLENTO.

- FLUSSO IRROTAZIONALE.
  SE IMMERGIAMO NEL FLUIDO UN PICCOLO OGGETTO (GRANELLO DI POLVERE) QUESTO SI SPOSTERA' SENZA RUOTARE SU SÈ STESSO.

LINEE DI FLUSSO

- CONSIDERIAMO IL MOTO DI UN FLUIDO IDEALE



- LE LINEE DI FLUSSO INDIVIDUANO LA TRAIETTORIA SEGUITA DA UN ELEMENTO QUALSIASI DEL FLUIDO, AD ESEMPIO DI UN GRANELLO DI POLVERE TRASCINATO DALL' ACQUA

- LA VELOCITA' DEL GRANELLO E' AD OGNI ISTANTE TANGENTE ALLA LINEA DI FLUSSO

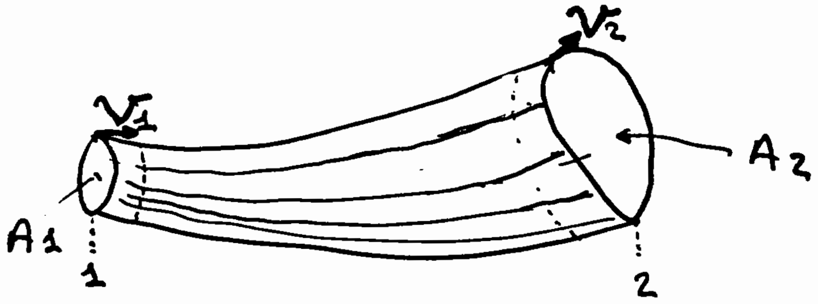
- IN UN MOTO LAMINARE LE LINEE DI FLUSSO SONO COSTANTI, NON CAMBIANO CON IL TEMPO

- DUE LINEE DI FLUSSO NON SI INTERSECANO MAI

- PRESE DUE LINEE DI FLUSSO QUALSIASI, QUELLE CONTENUTE ALL' INTERNO NON POSSONO USCIRE, QUINDI QUESTE RAPPRESENTANO UN <u>TUBO DI FLUSSO</u>

EQUAZIONE DI CONTINUITA'

- CONSIDERIAMO UN TUBO DI FLUSSO



- NEL PUNTO 1 IL TUBO DI FLUSSO HA SEZIONE A_1 E LA VELOCITA' DEL FLUIDO E' v_1
- NEL PUNTO 2 IL TUBO DI FLUSSO HA SEZIONE A_2 E VELOCITA' v_2
- CONSIDERIAMO UN ISTANTE DI TEMPO Δt

  IL FLUIDO CHE SI TROVA SULLA FACCIA 1 PERCORRE LA DISTANZA $v_1 \Delta t$

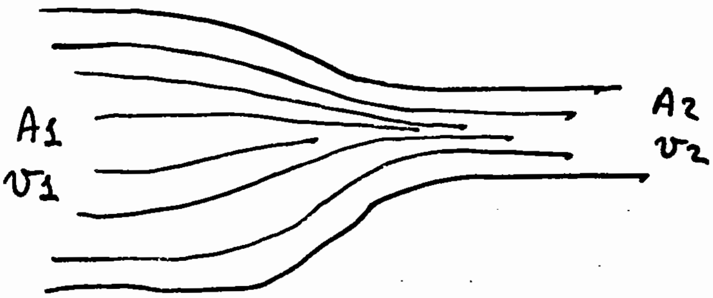
– IL FLUIDO OCCUPA IL VOLUME $\Delta V_1 = A_1 v_1 \Delta t$

- DATO CHE IL FLUIDO E' INCOMPRIMIBILE, LO STESSO VOLUME DI FLUIDO DEVE USCIRE DALLA FACCIA 2

$$\Delta V_2 = A_2 v_2 \Delta t$$

$$\Rightarrow \quad \Delta V_1 = \Delta V_2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{A_1 v_1 = A_2 v_2}$$

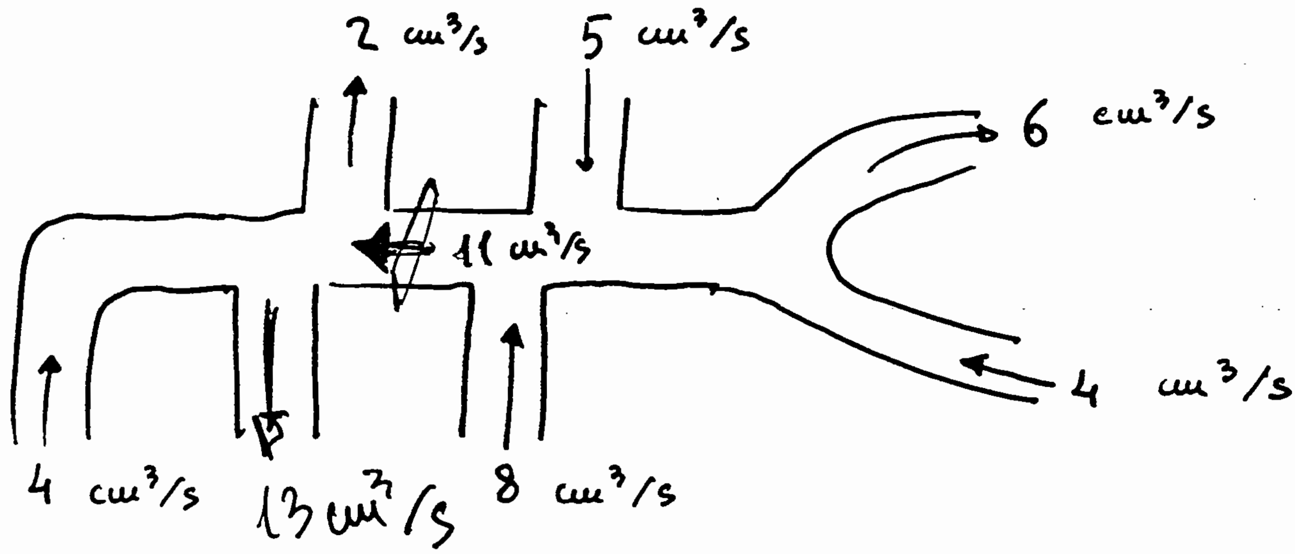
- $R = Av$ PORTATA DEL TUBO DI FLUSSO



$$\Rightarrow \quad v_2 = \frac{A_1}{A_2} v_1$$

VERIFICA

TROVARE IL VERSO E LA PORTATA DEL TUBO INCOGNITO



$$+8 + 5 + 4 - 6 = 11 \text{ cm}^3/s$$

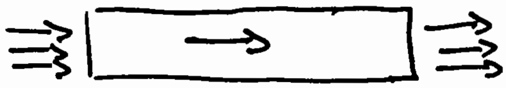
$$+4 - 2 + 11 = 13 \text{ cm}^3/s$$

PROBLEMA 15-7

L'AREA DI SEZIONE A_0 DELL'AORTA DI UNA PERSONA NORMAL
È DI 3 cm^2 E LA VELOCITÀ V_0 DEL SANGUE È DI 30 cm/s.
UN VASO CAPILLARE HA UNA SEZIONE DI $3 \cdot 10^{-7}$ cm^2 E UNA
VELOCITÀ DI FLUSSO DI 0.05 cm/s.
QUANTI CAPILLARI DEVE AVERE UNA PERSONA?

- ASSUMENDO CHE IL SANGUE SIA UN FLUIDO INCOMPRIMIBILE

$$R = A v \qquad [\text{PORTATA}]$$



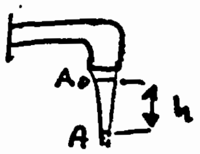
PER LA CONSERVAZIONE DELLA MATERIA, TANTA MASSA ENTRA
E TANTA NE DEVE USCIRE

$$A_0 V_0 = n A v$$

$$n = \frac{A_0 V_0}{A v} = \frac{3 \cdot 30}{3 \cdot 10^{-7} \cdot 0.05} = 6 \cdot 10^9 = 6 \text{ MILIARDI}$$

PROBLEMA 15 - 8

LA FIGURA MOSTRA COME IL FLUSSO D'ACQUA CHE ESCE DA UN RUBINETTO SI RESTRINGE MENTRE CADE. L'AREA DI SEZIONE A_0 E' DI $1.2\ cm^2$ e A VALE $0.35\ cm^2$. I DUE LIVELLI SONO SEPARATI DA UNA DISTANZA VERTICALE $h = 45\ mm$. QUAL'E' IL FLUSSO DELL'ACQUA CHE ESCE DAL RUBINETTO?



DALL' EQUAZIONE DI CONTINUITA' SI HA:

$$A_0 v_0 = A v$$

SI HA INOLTRE

$$v^2 = v_0^2 + 2gh$$

DA QUESTE DUE EQUAZIONI SI PUO' RICAVARE v_0

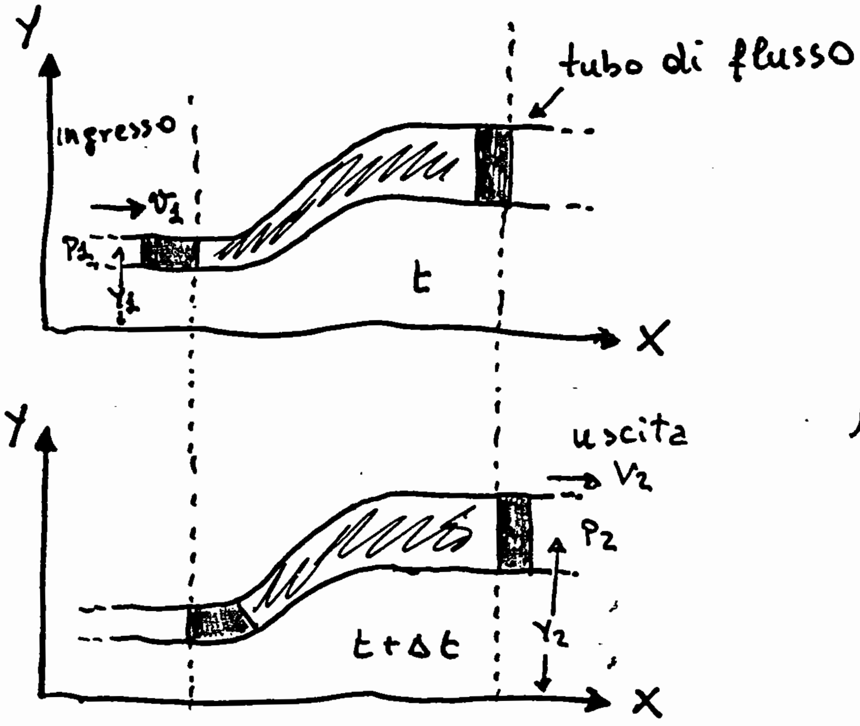
$$v_0 = \sqrt{\frac{2ghA^2}{A_0^2 - A^2}} =$$

$$= \sqrt{\frac{2 \cdot 9.8 \cdot 0.045 \cdot 0.35^2}{1.2^2 - 0.35^2}} = 0.286\ \frac{m}{s} = 28.6\ cm/s$$

LA PORTATA VOLUMICA R (FLUSSO) VALE:

$$R = A_0 v_0 = (1.2\ cm^2) \cdot \left(28.6\ \frac{cm}{s}\right) = 34\ cm^3/s$$

EQUAZIONE DI BERNOULLI



$g \downarrow$

ρ = densità del fluid

$\Delta m = \rho \Delta V$

- MOTO DI UN FLUIDO IDEALE IN UN CAMPO GRAVITAZIONALE

$$p_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g y_1 = p_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho g y_2$$

OVVERO

$$\boxed{p + \frac{1}{2}\rho v^2 + \rho g y = \text{costante}}$$

- L'EQUAZIONE SI DIMOSTRA USANDO LA LEGGE DI CONSERVAZIONE DELL'ENERGIA ED IL TEOREMA DELL'ENERGIA CINETICA

$$L = \Delta K$$

- AL TEMPO t SI HA UNA MASSA Δm NELLA POSIZIONE y_1 CHE ENTRA NEL TUBO A VELOCITA' v_1 SPINTA DALLA PRESSIONE p_1

- AL TEMPO $t + \Delta t$ SI HA UNA MASSA Δm NELLA POSIZIONE y_2 CHE ESCE DAL TUBO A VELOCITA' v_2 CHE E' CONTRASTATA DALLA PRESSIONE p_2

1

DIMOSTRAZIONE EQ. DI BERNOULLI

$$L = \Delta K$$

- $\Delta K = \frac{1}{2}\Delta m\, v_2^2 - \frac{1}{2}\Delta m\, v_1^2$ $\qquad \Delta m = \rho \Delta V$
- IL LAVORO FATTO SUL SISTEMA È SCOMPONIBILE IN DUE TERMINI: IL LAVORO FATTO DALLA FORZA DI GRAVITA' L_g ED IL LAVORO FATTO DALLE FORZE DI PRESSIONE L_p
- $L_g = -\Delta m\, g\,(Y_2 - Y_1) = -\rho g \Delta V (Y_2 - Y_1)$
- LAVORO DI PRESSIONE NEL PUNTO Y_1.

  LA FORZA $P_1 A_1$ HA LO STESSO VERSO DELLO SPOSTAMENTO ΔX_1

$$L_{p_1} = P_1 A_1 \cdot \Delta X_1 = P_1 \cdot \Delta V_1 = P_1 \Delta V$$

- LAVORO DI PRESSIONE NEL PUNTO Y_2.

  LA FORZA $P_2 A_2$ HA VERSO OPPOSTO ALLO SPOSTAMENTO ΔX_2

$$L_{p_2} = -P_2 A_2 \cdot \Delta X_2 = -P_2 \cdot \Delta V_2 = -P_2 \Delta V$$

- IL TEOREMA DELL'ENERGIA CINETICA DIVENTA:

$$L_g + L_{p_1} + L_{p_2} = \Delta K$$

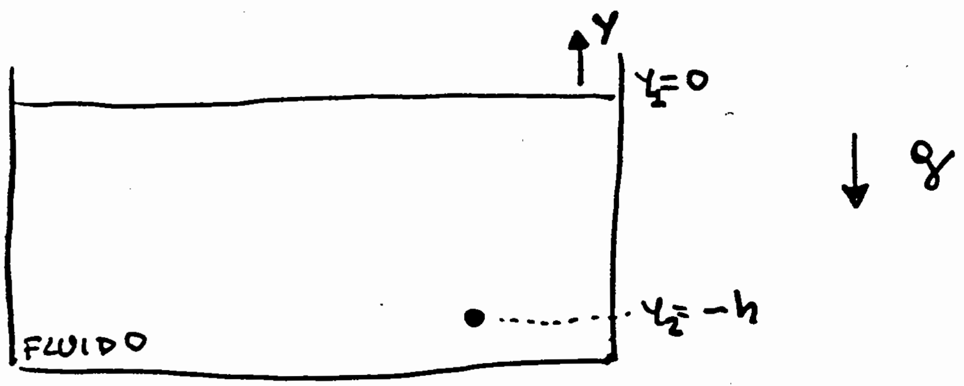
$$-\rho g \Delta V (Y_2 - Y_1) - (P_2 - P_1)\Delta V = \frac{1}{2}\rho \Delta V (V_2^2 - V_1^2)$$

- RIORDINANDO I TERMINI SI HA:

$$P_1 + \rho g Y_1 + \frac{1}{2}\rho V_1^2 = P_2 + \rho g Y_2 + \frac{1}{2}\rho V_2^2$$

APPLICAZIONI DELL' EQUAZIONE DI BERNOULLI

IDROSTATICA



$$P_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g Y_1 = P_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho g Y_2$$

NELL' IDROSTATICA TUTTE LE VELOCITA' SONO NULLE

$$P_1 + \rho g Y_1 = P_2 + \rho g Y_2$$

- IN PARTICOLARE ABBIAMO

$$Y_1 = 0 \quad , P_1 = P_0 \quad , Y_2 = -h \quad ; P_2 = P$$

$$\boxed{P = P_0 + \rho g h}$$

ABBIAMO RITROVATO LA LEGGE DI STEVINO

APPLICAZIONI EQ. DI BERNOULLI
PRINCIPIO DI VENTURI

- CONSIDERIAMO IL MOTO DI UN FLUIDO SU UN PIANO ORIZZONTALE

$$P_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g y = P_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho g y$$

- LA QUOTA E' LA STESSA IN ENTRAMBI I CASI, QUINDI SI SEMPLIFICA

$$P_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = P_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2$$

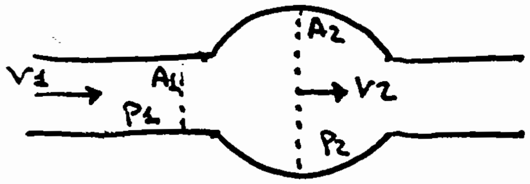
$\Rightarrow$ SE AUMENTA LA VELOCITA' DIMINUISCE LA PRESSIONE

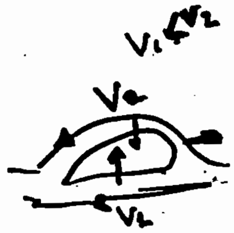
- DALL'EQUAZIONE DI CONTINUITA' SI HA:

$$A_1 v_1 = A_2 v_2 \qquad \Rightarrow \quad v_2^2 = v_1^2 \frac{A_1^2}{A_2^2}$$

$$P_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = P_2 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 \frac{A_1^2}{A_2^2}$$

$$P_2 = P_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 \left(1 - \frac{A_1^2}{A_2^2}\right) = P_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 \left(\frac{A_2^2 - A_1^2}{A_2^2}\right)$$





- $A_2 > A_1 \quad \Rightarrow \quad v_2 < v_1 \quad ; \quad \underline{P_2 > P_1}$

- SE AUMENTA LA SEZIONE DI UN TUBO DI FLUSSO, IN QUEL PUNTO AUMENTA ANCHE LA PRESSIONE DEL FLUIDO

- IL PRINCIPIO DI VENTURI E' ALLA BASE DEL FUNZIONAMENTO DEGLI AEREI, BARCHE A VELA, ETC..

APPLICAZIONI EQ. DI BERNOULLI
PRINCIPIO DI VENTURI

- CONSIDERIAMO IL MOTO DI UN FLUIDO SU UN PIANO ORIZZONTALE

$$P_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g y = P_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho g y$$

- LA QUOTA E' LA STESSA IN ENTRAMBI I CASI, QUINDI SI SEMPLIFICA

$$P_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = P_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2$$

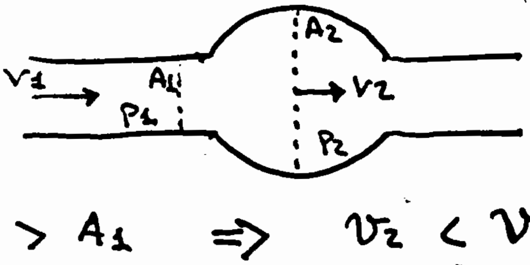
$\Rightarrow$ SE AUMENTA LA VELOCITA' DIMINUISCE LA PRESSIONE

- DALL'EQUAZIONE DI CONTINUITA' SI HA:

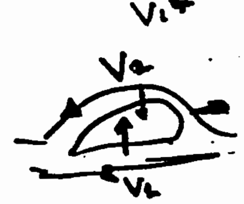
$$A_1 v_1 = A_2 v_2 \qquad \Rightarrow v_2^2 = v_1^2 \frac{A_1^2}{A_2^2}$$

$$P_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = P_2 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 \frac{A_1^2}{A_2^2}$$

$$P_2 = P_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 \left(1 - \frac{A_1^2}{A_2^2}\right) = P_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 \left(\frac{A_2^2 - A_1^2}{A_2^2}\right)$$



- $A_2 > A_1 \Rightarrow v_2 < v_1$; $\underline{P_2 > P_1}$



- SE AUMENTA LA SEZIONE DI UN TUBO DI FLUSSO, IN QUEL PUNTO AUMENTA ANCHE LA PRESSIONE DEL FLUIDO

- IL PRINCIPIO DI VENTURI E' ALLA BASE DEL FUNZIONAMENTO DEGLI AEREI, BARCHE A VELA, ETC..

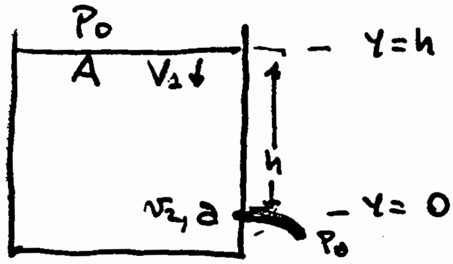
ESERCIZI CONSIGLIATI

Dinamica dei fluidi

- Serway (3° Edizione) – Cap. 15
  - 27 – 29 – 31 – 33 – 37 – 39
- Halliday (5° Edizione) – Cap. 15
  - 35E – 37P – 39E – 41E – 43E – 45P – 47P

PROBLEMA 15-10

NEL VECCHIO WEST UN BANDITO SPARA UNA PALLOTTOLA CONTRO UN SERBATOIO D'ACQUA APERTO, PRODUCENDO UN BUCO A UNA DISTANZA h AL DI SOTTO DELLA SUPERFICIE DELL'ACQUA.
A QUALE VELOCITA' L'ACQUA SGORGA DAL BUCO?



$$P_1 + \rho g y_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = P_2 + \rho g y_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2$$

- LA PORTATA SI DEVE CONSERVARE

$$R = A v_1 = a v_2 \quad \Rightarrow \quad v_1 = v_2 \frac{a}{A}$$

- DATO CHE $a \ll A \Rightarrow v_1 \ll v_2$

LA VELOCITA' DI ABBASSAMENTO DEL LIVELLO DELL'ACQUA E' MOLTO PICCOLA E SI PUO' ASSUMERE CHE SIA NULLA

$$P_1 = P_0 \,, \; y_1 = h \,, \; v_1 = 0 \;; \; P_2 = P_0 \,, \; y_2 = 0 \,, \; v_2 = v$$

$$P_0 + \rho g h = P_0 + \frac{1}{2}\rho v^2$$

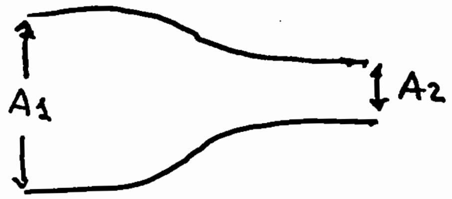
$$\Rightarrow \boxed{v = \sqrt{2gh}}$$

E' UGUALE ALLA VELOCITA' CHE AVREBBE UN PUNTO MATERIALE CADENDO DA UN'ALTEZZA h

PROBLEMA 15-9

SI HA DELL'ETANOLO DI DENSITA' $\rho = 781 \ kg/m^3$ CHE SCORRE LENTAMENTE ATTRAVERSO UN TUBO ORIZZONTALE, IL QUALE SI RESTRINGE COME IN FIGURA, DA UNA SEZIONE $A_1 = 1.20 \cdot 10^{-3} \ m^2$ A UNA SEZIONE $A_2 = A_1/2$. LA DIFFERENZA DI PRESSIONE ΔP TRA LE DUE SEZIONI E' DI 4120 Pa.

TROVARE IL FLUSSO DELL'ETANOLO.



- APPLICHIAMO L'EQUAZIONE DI BERNOULLI AD UN FLUIDO IN MOTO ORIZZONTALE

$$P_1 - P_2 = \frac{1}{2}\rho v_2^2 - \frac{1}{2}\rho v_1^2 = \frac{1}{2}\rho\left(v_2^2 - v_1^2\right)$$

- LA PORTATA DEVE RIMANERE COSTANTE

$$R = v_1 A_1 = v_2 A_2$$

- DATO CHE $A_2 = A_1/2$ SI HA $v_1 = \frac{R}{A_1}$ e $v_2 = \frac{R}{A_2} = \frac{2R}{A_1}$

- SOSTITUENDO SI HA:

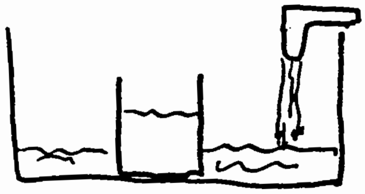
$$\Delta P = \frac{1}{2}\rho\left(\frac{4R^2}{A_1^2} - \frac{R^2}{A_1^2}\right) = \frac{3\rho R^2}{2A_1^2}$$

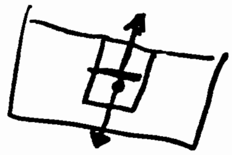
- DA QUI POSSIAMO RICAVARE IL FLUSSO R

$$R = A_1\sqrt{\frac{2\Delta P}{3\rho}} = 1.20 \cdot 10^{-3} \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot 4120}{3 \cdot 781}} = 2.24 \cdot 10^{-3} \ m^3/s$$

PROBLEMA

UN BICCHIERE, RIEMPITO PARZIALMENTE DI ACQUA, VIENE POSTO IN UN LAVANDINO. ESSO HA UNA MASSA DI 390 g E UN VOLUME INTERNO DI 500 cm^3. SI COMINCIA A RIEMPIRE D'ACQUA IL LAVANDINO E SI VEDE CHE, SE INIZIALMENTE IL BICCHIERE È RIEMPITO D'ACQUA MENO DELLA METÀ, ESSO GALLEGGIA; SE INVECE È STATO RIEMPITO PIÙ DELLA METÀ, RESTA IN FONDO AL LAVANDINO E VIENE SOMMERSO DALL'ACQUA. QUAL'È LA DENSITÀ DEL MATERIALE IN CUI È FATTO IL BICCHIERE?





- RIEMPIAMO IL BICCHIERE PER METÀ: 250 cm^3

  È AL LIMITE DEL GALLEGGIAMENTO

$$\rho_0 g \frac{V_{int}}{2} + m g = \rho_0 g V_{est}$$

$$V_{est} = \frac{m}{\rho_0} + \frac{V_{int}}{2} = \frac{390\ g}{1\ g/cm^3} + \frac{500\ cm^3}{2} = 640\ cm^3$$

$$\rho = \frac{m}{V_{est} - V_{int}} = \frac{390\ g}{640\ cm^3 - 500\ cm^3} = 2.78\ g/cm^3$$

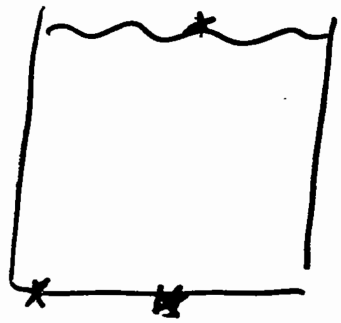
ESERCIZI

1) CHE PERCENTUALE DI VOLUME DI UN ICEBERG È SOTT'ACQUA? ($\rho_{ghiaccio} = 0.9$)

2) ABBIAMO UN BLOCCO DI GHIACCIO ($\rho_g = 0.9\ g/cm^3$) DI SPESSORE $h = 10\ cm$. CHE AREA S DEVE AVERE PER SOSTENERE UNA MASSA DI 50 Kg?

3) SI HA UN RECIPIENTE CILINDRICO DI DIAMETRO $b = 50\ cm$, CHE HA UN BUCO SUL FONDO DI DIAMETRO $a = 1\ cm$. ESSO È PIENO D'ACQUA PER $h = 20\ cm$. TROVARE LA VELOCITÀ CON CUI SI ABBASSA L'ACQUA.

4) SI HA UNA MONGOLFIERA PIENA DI ELIO ($\rho = 0.14\ Kg/m^3$), DI FORMA SFERICA DI RAGGIO 10 m, ALLA QUALE È APPESA UNA MASSA DI 10 Kg.
SE LA DENSITÀ DELL'ARIA È DI $1.3\ Kg/m^3$, TROVARE LA FORZA ASCENDENTE.



SOLUZIONI

(1) V_I = VOLUME IMMERSO ; ρ_a = DENSITA' ACQUA
V_T = VOLUME TOTALE ; ρ_G = " GHIACCI

$$V_I \rho_A g = V_T \rho_G g$$

$$\frac{V_I}{V_T} = \frac{\rho_G}{\rho_A} = 90\,\%$$

(2) $V \rho_G g + m g = V \rho_A g$ (ALL'EQUILIBRIO)

$$V(\rho_G - \rho_A) = -m = S d (\rho_G - \rho_A)$$

$$S = \frac{m}{d(\rho_A - \rho_G)} = \frac{50}{0.1 \times (1000-900)} = 5\ m^2$$

(3) $\frac{1}{2}\rho v^2 = \rho g h \Rightarrow v_b = \sqrt{2gh}$

$$S_c v_c = S_b v_b$$

$$v_c = v_b\, S_b / S_c = \sqrt{2gh} \times \frac{\pi (a/2)^2}{\pi (b/2)^2} = 0.079\ cm/s$$

(4) $F = \frac{4}{3}\pi R^3 g(\rho_A - \rho_{He}) - mg$

$$= \frac{4}{3}\pi \times 1000 \times 9.8 (1.3 - 0.14) - 10 \times 9.8$$

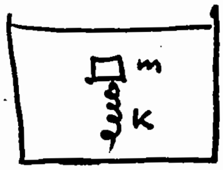
$$= 4.76 \times 10^{+4}\ N$$

ESERCIZI

5) UN CORPO ~~È IMMERSO~~ È IMMERSO NELL'ACQUA ED È VINCOLATO AD UNA MOLLA.

SIANO $m = 5\ g$ e $V = 11\ cm^3$ LA MASSA ED IL VOLUME DEL CORPO E $k = 6 \cdot 10^{-3}\ N/cm$ LA COSTANTE ELASTICA DELLA MOLLA.

TROVARE LA DEFORMAZIONE DELLA MOLLA

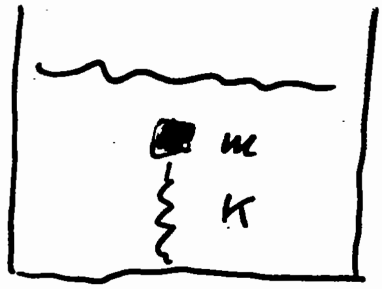


6) UNA POMPA DI POTENZA $w = 1\ kW$ STA SVUOTANDO UNA PISCINA E SOLLEVA L'ACQUA AD UN'ALTEZZA $h = 5\ m$.

TROVARE LA PORTATA DELLA POMPA, CIOÈ QUANTA ACQUA AL SECONDO RIESCE A SPOSTARE.

7) CHE POTENZA OCCORRE PER POMPARE 500 ℓ DI ACQUA AL MINUTO DA TERRA FINO AD UN'ALTEZZA $h = 1\ m$ ED IMMETTERLA IN UN CONDOTTO A $P = 10\ atm$?

(5) $V \rho_A g = mg + K\Delta$



$\Delta = (V\rho_A - m)\, g/K = 9.8\text{ cm}$

(6)

$W = \frac{L}{t} = \frac{mgh}{t} \Rightarrow \frac{m}{t} = \frac{W}{gh} = 20.4\text{ Kg/s}$

(7) $L = \rho V g h + pV = V(\rho g h + p)$

$\Rightarrow W = \frac{L}{t} = \frac{V}{t}(\rho g h + p)$

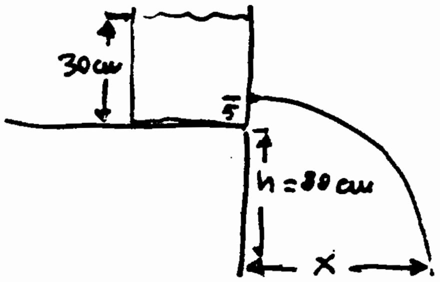
$= \frac{0.5}{60}\left(1000 \times 9.8 \times 1 + 10 \times 1.01 \times 10^5\right)$

$= 8.5\text{ KW}$

Esercizio 6 (6 punti)

Un recipiente d'acqua alto 30.0 cm è appoggiato su un tavolo alto 80.0 cm. Se nel recipiente si forma un foro alla distanza di 5.0 cm dal fondo, quanto vale la distanza dal tavolo del punto in cui l'acqua colpisce il pavimento?
(Il foro è allineato con il bordo del tavolo).

(Risultato: $x - x_0 = 92$ cm)



TROVIAMO LA VELOCITA' DI USCITA DELL'ACQUA DAL FORO UTILIZZANDO L'EQUAZIONE DI BERNOULLI

$$P_1 + \rho g Y_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = P_2 + \rho g Y_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2$$

In questo caso $P_1 = P_2 = P_0$; e $v_1 \simeq 0$

$$\Rightarrow v = \sqrt{2 g \Delta Y} = \sqrt{2 \cdot 9.8 \cdot 0.25} = 2.21 \text{ m/s}$$

L'ACQUA CHE ESCE DAL FORO SEGUE UN MOTO DI CADUTA PARABOLICO. LA VELOCITA' INIZIALE HA SOLO COMPONENTE ORIZZONTALE

- IL TEMPO DI CADUTA SI TROVA DAL MOTO VERTICALE

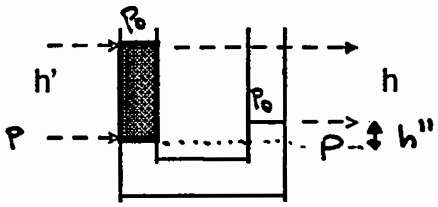
$$S - S_0 = \frac{1}{2} g t^2 \quad \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2(S-S_0)}{g}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 0.85}{9.8}} = 0.416 \text{ s}$$

- LO SPOSTAMENTO ORIZZONTALE VALE:

$$x - x_0 = V_0 t = 2.21 \cdot 0.416 = 0.92 \text{ m} = \underline{92 \text{ cm}}$$

) In un tubo ad U di sezione S=1 cm^2 contenente del mercurio (densità 13.6 gm/cm^3) vengono aggiunti 5 cm^3 di olio (densità 1.8 gm/cm^3), in modo che i due liquidi non si mescolino. Quale sarà il dislivello h tra la superficie del mercurio e quella dell'olio? SA

(6 punti)



- PER IL PRINCIPIO DEI VASI CONUNICANTI A PARITA' DI QUOTA LA PRESSIONE DEVE ESSERE LA STESSA.

SUL BRACCIO DI SINISTRA SI HA: [OLIO]

$$P = P_0 + \rho_o h' g$$ [legge di Stevino]

SUL BRACCIO DI ~~SINISTRA~~ DESTRA SI HA: [MERCURIO]

$$P = P_0 + \rho_{Hg} \cdot h'' \cdot g$$

$$\Rightarrow \quad P = P \Rightarrow P_0 + \rho_o h' g = P_0 + \rho_{Hg} \cdot h'' g$$

$$\Rightarrow \rho_o h' = \rho_{Hg} \cdot h'' \Rightarrow \boxed{h'' = \frac{\rho_o}{\rho_{Hg}} \cdot h'}$$

- $h = h' - h'' =$

$$= h'\left(1 - \frac{\rho_o}{\rho_{Hg}}\right) \rightarrow$$

- RICAVIAMO h' DAI DATI DEL PROBLEMA

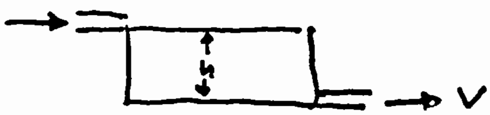
$$V = h' \cdot S \Rightarrow h' = \frac{V}{S} \rightarrow \frac{5\ cm^3}{1\ cm^2} = 5\ cm$$

$$h = \frac{V}{S}\left(1 - \frac{\rho_o}{\rho_{Hg}}\right) \rightarrow 5 \cdot \left(1 - \frac{1.8}{13.6}\right) = 4.34\ cm$$

PROVA SCRITTA 22 NOV. 1999

UN LAGO ARTIFICIALE È ALIMENTATO DA UN RUSCELLO DI PORTATA COSTANTE, PARI A 500 ℓ/s. SAPENDO CHE LA PRESSIONE DELL'ACQUA, NEL PUNTO PIU' PROFONDO È MAGGIORE DI 3 ATMOSFERE RISPETTO A QUELLA ATMOSFERICA, SI CALCOLI:

- LA PROFONDITA' DEL LAGO;
- LA VELOCITA' DI FUORIUSCITA DELL'ACQUA DA UN CONDOTTO PIANO, POSTO NEL PUNTO PIU' PROFONDO DEL LAGO;
- LA SEZIONE DEL CONDOTTO, SAPENDO CHE IL LIVELLO DEL LAGO RESTA COSTAN



1) PER TROVARE L'ALTEZZA DEL LAGO USIAMO LA LEGGE DI STEVINO

$$P - P_0 = \rho g h \qquad \rho = 10^3 \ kg/m^3$$

$$\Delta P = P - P_0 = 3\ atm = 3 \cdot 101 \cdot 10^3 \ Pa$$

$$\Delta P = \rho g h \Rightarrow h = \frac{\Delta P}{\rho g} = \frac{3 \cdot 101 \cdot 10^3}{9.8 \cdot 10^3} = 30.9 \ m$$

2) PER TROVARE LA VELOCITA' DI FUORIUSCITA USIAMO IL TEOREMA DI BERNOULLI

$$P_1 + \rho g h_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = P_2 + \rho g h_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2$$

$$P_1 = P_0 \ ; \ h_1 = h \ ; \ v_1 = 0 \ ; \ P_2 = P_0 \ ; \ h_2 = 0 \ ; \ v_2 = v$$

$$\rho g h = \frac{1}{2}\rho v^2 \Rightarrow v = \sqrt{2gh}$$

$$v = \sqrt{2gh} = \sqrt{2 * 9.8 * 30.9} = 24.6 \ m/s$$

3) PER TROVARE LA SEZIONE DEL CONDOTTO SFRUTTIAMO LA COSTANZA DELLA PORTATA $R = v \cdot S$

$$R = V \cdot S$$

$$R = 500 \ \ell/s = 0.5 \ m^3/s$$

$$S = \frac{R}{v} = \frac{0.5}{24.6} = 0.02 \ m^2 = 200 \ cm^2$$

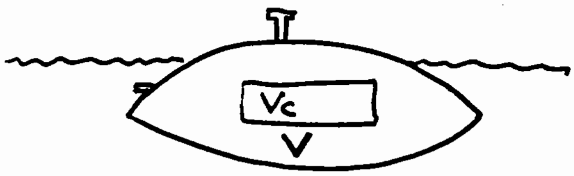
PROVA SCRITTA 12 APRILE 1988

UN SOMMERGIBILE, DI VOLUME $V = 500\ m^3$ E DI MASSA $M = 4.8 \cdot 10^5\ kg$ POSSIEDE UNA CAMERA INTERNA, CHE PUÒ ESSERE RIEMPITA DI ACQUA PER FARLO INABISSARE. IL VOLUME DELLA CAMERA E' $V_c = 50\ m^3$.

CALCOLARE:

a) LA FRAZIONE DEL VOLUME DEL SOMMERGIBILE CHE SI TROVA SOTTO IL PELO DELL'ACQUA, QUANDO LA CAMERA E' VUOTA.

b) LA FRAZIONE DEL VOLUME DELLA CAMERA CHE DEVE ESSERE RIEMPITA D'ACQUA AFFINCHE' IL SOMMERGIBILE COMINCI AD AFFONDARE.



- SPINTA DI ARCHIMEDE $F_A = \rho_A \cdot V_A \cdot g$
- FORZA DI GRAVITA' $F_g = m g$
- QUANDO GALLEGGIA $F_A = F_g$

$$\rho_A V_A \cdot g = m g \quad \Rightarrow \quad V_A = \frac{m}{\rho_A} = \frac{4.8 \cdot 10^5}{10^3} = 480\ m^3$$

a) $$frac = \frac{V_A}{V} = \frac{480}{500} = 0.96 = 96\ \%$$

b) QUANDO IL SOMMERGIBILE E' COMPLETAMENTE IMMERSO, LA SPINTA DI ARCHIMEDE VALE:

$$F_A = \rho_a \cdot V \cdot g$$

$$\Delta F = F_A - F_g = \rho_a V g - m g = (\rho_a V - m) g$$

$\Rightarrow$ BISOGNA AGGIUNGERE UNA MASSA D'ACQUA IN MODO TALE CHE:

$$\Delta F = m_x \cdot g = \rho_A \cdot V_x \cdot g$$

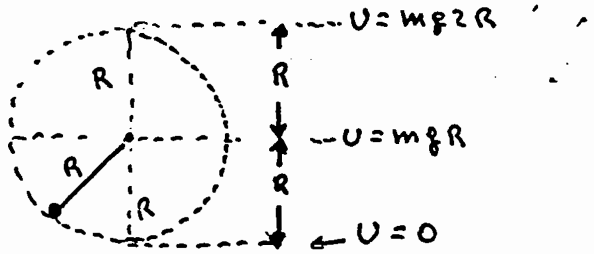
$$\Rightarrow V_x = \frac{\rho_A V - m}{\rho_A} = V - \frac{m}{\rho_A} = 500 - \frac{4.8 \cdot 10^5}{10^3} = 500 - 480 = 20\ m^3$$

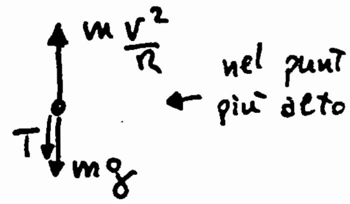
$$frac = \frac{V_x}{V_c} = \frac{20}{50} = 0.4 = 40\ \%$$

PROVA SCRITTA 1- OTTOBRE 1998

UN CORPO, DI MASSA 2 Kg, E' LEGATO AD UN FILO DI LUNGHEZZA 50 c
INESTENSIBILE E DI MASSA TRASCURABILE. L'ALTRO ESTREMO DEL FILO E' FISSO
IN MODO CHE IL CORPO POSSA COMPIERE UNA TRAIETTORIA CIRCOLARE SU UN
PIANO VERTICALE. SAPENDO CHE, NEL PUNTO PIU' ALTO DELLA TRAIETTORIA
LA TENSIONE DEL FILO E' NULLA, SI CALCOLI:

- LE VELOCITA' DEL CORPO NELLE DUE POSIZIONI IN CUI IL FILO E' ORIZZON
- LA TENSIONE DEL FILO NEL PUNTO PIU' BASSO DELLA TRAIETTORIA.





NEL PUNTO PIU' ALTO LE FORZE CHE AGISCONO SULLA MASSA SONO:

$$m\frac{V^2}{R} = mg + T \quad ; \quad T = 0 \quad \Rightarrow \quad V^2 = Rg$$

- APPLICANDO LA CONSERVAZIONE DELL'ENERGIA, NEL PUNTO PIU' ALTO SI

$$E_{TOT} = U + K = mg2R + \frac{1}{2}mv^2 = mg2R + \frac{1}{2}mRg = \frac{5}{2}mgR$$

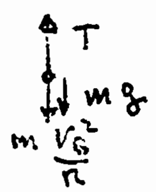
NEI DUE PUNTI ORIZZONTALI SI HA:

$$\frac{1}{2}mV_0^2 + mgR = E_{TOT} = \frac{5}{2}mgR \quad \Rightarrow \quad V_0^2 + 2gR = 5gR$$

$$V_0^2 = 3gR \quad \Rightarrow \quad V = \pm\sqrt{3gR} = \pm\sqrt{3 \cdot 9.8 \cdot 0.5} = \pm 3.83 \ m/s$$

NEL PUNTO PIU' BASSO SI HA:

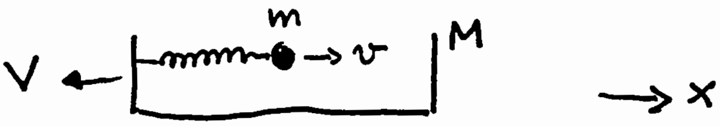
$$\frac{1}{2}mV_B^2 = E_{TOT} = \frac{5}{2}mgR \quad \Rightarrow \quad V_B = \sqrt{5gR} = \sqrt{5 \cdot 9.8 \cdot 0.5} = 4.95 \ m/s$$



$$T = mg + m\frac{V_B^2}{R} = m\left(g + \frac{V_B^2}{R}\right) = 2 \cdot \left(9.8 + \frac{4.95^2}{0.5}\right) = 117.6 \ N$$

PROVA SCRITTA 5 LUGLIO 1999

SU UN CARRELLO DI MASSA M = 40 Kg SI TROVA UNA SFERETTA PUNTIFORME DI MASSA m = 10 Kg, POSTA ALL'ESTREMITA' DI UNA MOLLA ELASTICA DI MASSA TRASCURABILE. IL CARRELLO E' INIZIALMENTE FERMO; LA MOLLA E' MANTENUTA COMPRESSA DA UN FILO; IN TALE CONDIZIONE L'ENERGIA POTENZIALE E' W = 200 J. SE SI BRUCIA IL FILO, LA MOLLA SI DISTENDE E METTE IN MOTO LA MASSA m. SUPPONENDO IL CARRELLO LIBERO DI MUOVERSI SU UN PIANO ORIZZONTALE E TRASCURANDO OGNI FORMA DI ATTRITO, SI CALCOLINO LE VELOCITA' DELLA SFERETTA E DEL CARRELLO DOPO L'ESTENSIONE COMPLETA DELLA MOLLA.



LA FORZA ELASTICA DELLA MOLLA E' UNA FORZA INTERNA, QUINDI SI CONSERVA LA QUANTITA' DI MOTO TOTALE.
INOLTRE NON VI SONO FORZE DISSIPATIVE, QUINDI SI CONSERVA ANCHE L'ENERGIA MECCANICA TOTALE

$$\begin{cases} m\vec{v} + M\vec{V} = 0 & \text{conservazione di } \vec{P} \\ \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}MV^2 = W & \text{conservazione dell'energia} \end{cases}$$

$$v = -\frac{M}{m}V$$

$$\frac{1}{2}m\left(-\frac{M}{m}\right)^2 V^2 + \frac{1}{2}MV^2 = W \Rightarrow \frac{M}{m}V^2 + V^2 = \frac{2W}{M} \Rightarrow$$

$$V^2\,\frac{m+M}{m} = 2\frac{W}{M} \Rightarrow V^2 = 2\frac{W}{M}\,\frac{m}{m+M} \Rightarrow$$

$$V = \sqrt{2W\frac{m}{M}\frac{1}{m+M}} = \sqrt{2\cdot 200\,\frac{10}{40}\,\frac{1}{50}} = \sqrt{2} = 1.41\ \frac{m}{s} \Rightarrow -1.41\ \frac{m}{s}$$

$$v = -\frac{M}{m}V = -\frac{40}{10}\times 1.41 = 5.65\ \frac{m}{s}$$

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}\times 10\times 5.65^2 = 160\ J \quad ; \quad \frac{1}{2}MV^2 = \frac{1}{2}\times 40\times 2 = 40\ J$$

$$160 + 40 = 200\ J$$

UN BLOCCO DI PIOMBO ($m = 10\,g$), IN MOTO CON VELOCITA' INIZIALE $v_0 = 200\ m/s$, URTA UN CORPO DI ALLUMINIO ($M = 100\,g$) INIZIALMENTE FERMO. DOPO L'URTO I DUE CORPI RESTANO ATTACCATI.

ASSUMENDO LE TEMPERATURE DEI DUE CORPI UGUALI ALLA TEMPERATURA AMBIENTE $T_0 = 20\,°C$, DETERMINARE:

a) LA PERDITA DI ENERGIA CINETICA DEL SISTEMA

b) LA TEMPERATURA FINALE DEL SISTEMA DOPO L'URTO

SI TRASCURINO GLI SCAMBI DI CALORE CON L'ESTERNO.

DATI: $C_{Pb} = 0.03\ cal/g°C$; $C_{Al} = 0.2\ cal/g°C$

L'URTO E' COMPLETAMENTE ANELASTICO, QUINDI NON SI CONSERVA L'ENERGIA, MA SI CONSERVA LA QUANTITA' DI MOTO TOTALE

$$m v_0 = (m + M) v_f \quad \Rightarrow \quad v_f = \frac{m}{m+M} v_0 = \frac{10}{10+100} \cdot 200 = 18.2\ m/s$$

$$K_{iniz} = \frac{1}{2} m v_0^2 = \frac{1}{2} * 0.01 * 200^2 = 200\ J$$

$$K_{fin} = \frac{1}{2}(m+M) v_f^2 = \frac{1}{2} * 0.110 * 18.2^2 = 18.2\ J$$

$$\Delta K = K_{iniz} - K_{fin} = 200 - 18.2 = \underline{181.8\ J} \Rightarrow 181.8 * 0.24 = 43.63\ cal$$

TROVIAMO LA CAPACITA' TERMICA TOTALE DEI DUE BLOCCHI UNITI.
LA CAPACITA' TERMICA E' UNA QUANTITA' ESTENSIVA, QUINDI SI SOMMANO LE DUE CAPACITA'.

$$C_{tot} = m_{Pb} \cdot C_{Pb} + m_{Al} \cdot C_{Al} = 10 * 0.03 + 100 * 0.2 = 20.3\ cal/°C$$

LA PERDITA DI ENERGIA CINETICA COMPORTA UN RISCALDAMENTO DEI DUE BLOCCHI

$$\Delta K = Q = C_{tot} \cdot \Delta T \quad \Rightarrow \quad \Delta T = \frac{Q}{C_{tot}} = \frac{43.63}{20.3} = 2.15\ °C$$

LA TEMPERATURA FINALE E'

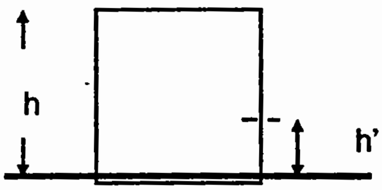
$$T_{fin} = T_0 + \Delta T = 20 + 2.15 = 22.15\ °C$$

) Un recipiente cilindrico di altezza h= 2 m, sezione S=50 cm², è riempito di acqua fino al bordo e bloccato su di un piano. Se si fora a 20 cm dal piano, si rileva che dopo un secondo il livello dell'acqua è calato di 1.2 mm.

a) si scriva l'espressione della velocità di uscita dell'acqua dal foro e se ne determini il valore (si assuma costante la velocità di abbassamento del livello dell'acqua nel cilindro).

b) qual'è la sezione del foro ? Si consideri l'acqua un fluido ideale.

(8 punti)



APPLICHIAMO L'EQUAZIONE DI BERNOULLI

$$P_1 + \rho g Y_1 + \frac{1}{2}\rho V_1^2 = P_2 + \rho g Y_2 + \frac{1}{2}\rho V_2^2$$

$P_1 = P_0$; $Y_1 = 2\,m$; $V_1 = V_1$; $P_2 = P_0$; $Y_2 = 0.2\,m$; $V_2 = ?$

RICAVIAMO V_1 DAI DATI

$$V_1 = \frac{\Delta h}{t} = \frac{1.2\,mm}{1} = 1.2\,mm/s$$

$$P_0 + \rho g Y_1 + \frac{1}{2}\rho V_1^2 = P_0 + \rho g Y_2 + \frac{1}{2}\rho V_2^2$$

$$V_2^2 = 2g(Y_1 - Y_2) + V_1^2 =$$

$$= 2 \cdot 9.8(2-0.2) + (1.2 \cdot 10^{-3})^2 \simeq 2 \cdot 9.8 \cdot (2-0.2) = 35.28\ \frac{m^2}{s^2}$$

$$\Rightarrow V = \sqrt{2g(Y_1-Y_2)} = \sqrt{35.28} = 5.94\ m/s$$

- LA SEZIONE SI RICAVA DALLA COSTANZA DELLA PORTATA

$$A_1 V_1 = A_2 V_2$$

$$A_2 = A_1 \frac{V_1}{V_2} = 50\ \frac{1.2 \cdot 10^{-3}}{5.94} \simeq 1\ mm^2$$

Fac-simile di esonero

1. Forze. Una bilancia a molla, con una massa m = 2 Kg, si trova su un ascensore. L'ascensore compie un viaggio dal piano terra al terzo piano. Quanto segna il quadrante della bilancia quando :

a) l'ascensore è fermo a terra;
b) l'ascensore accelera verso l'alto da fermo, con $a_1 = 1.5$ m/ s^2;
c) l'ascensore viaggia verso l'alto con v costante, pari a $v_0 = 1.5$ m/s;
d) l'ascensore rallenta, avendo quasi raggiunto il terzo piano, con $a_2 = -1.5$ m/ s^2;
e) l'ascensore è fermo al terzo piano.

2. Lavoro, energia. Supponiamo che la forza di attrito esercitata dall'acqua su una nave sia proporzionale alla velocità relativa della nave rispetto all'acqua. Quando un rimorchiatore tira la nave con una potenza di W = 171.6 KW, questa si muove con una velocità $v_1 = 0.25$ m/s.

a) quale è la potenza richiesta per far muovere la nave ad una velocità v_2=0.75 m/s?
b) quanto vale la forza esercitata dal rimorchiatore sulla barca nel primo caso ?
c) e nel secondo ?

3. Quantità di moto, urti. Un bambino lancia una palla di massa m=3.3 Kg ad una ragazza di massa M=48 Kg che calza dei pattini e si trova inizialmente a riposo. Afferrata a volo la palla, la ragazza comincia a muoversi con una velocità v = 0.32 m/s. Trovare il modulo della velocità della palla prima dell'impatto con la ragazza.

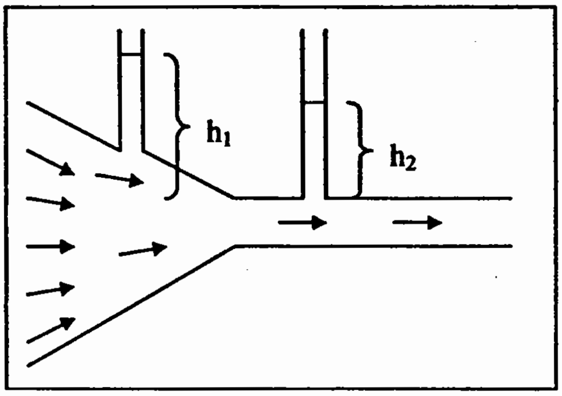
4. Oscillazioni. Un orologio a pendolo è installato su una astronave che va sulla luna, la cui accelerazione di gravità è circa 1/6 di quella terrestre. Una volta arrivato sulla luna, quanto tempo impiegano le sfere dell'orologio a compiere un tempo apparente di 12 ore ?

5. Statica dei Fluidi. Quale è il carico massimo che può portare una zattera, larga 2m, lunga 6m, con un bordo di 40 cm di altezza sull'acqua, la cui massa (senza carico) è di 250 Kg ?

6. Dinamica dei fluidi. L'acqua sale alle quote $h_1 = 35.0$ cm e $h_2 = 10.0$ cm nei tubi verticali del condotto indicato in figura. Il diametro del condotto all'altezza del primo tubo è 4.0 cm, e all'altezza del secondo tubo è 2.0 cm.

a) quanto vale la velocità dell'acqua all'altezza del primo e del secondo tubo?

b) quanto valgono la portata in massa e la portata in volume?



Soluzioni

1. La massa letta sul quadrante è proporzionale all'elongazione (Δ) della molla.

a) $0=-mg+k\Delta \quad \rightarrow \quad \Delta=\frac{mg}{k}$; la lettura è ovviamente $m=2\,Kg$.

b) $ma_1=-mg+k\Delta_1 \quad \rightarrow \quad \Delta_1=\frac{mg+ma_1}{k}=\Delta\left(1+\frac{a_1}{g}\right)$;

la lettura è $m_1=m\left(1+\frac{a_1}{g}\right)=2.306\,Kg$;

c) $m=2\,Kg$;

d) $m_2=m\left(1+\frac{a_2}{g}\right)=1.694\,Kg$;

e) $m=2\,Kg$.

2. $F=c\text{v} \quad \rightarrow \quad W=F\text{v}=c\text{v}^2 \quad \rightarrow \quad c=W_1/\text{v}_1^2=2.746\cdot10^6 W$;
$W_2=F\text{v}=c\text{v}_2^2=1.54\cdot10^6 W$; $\quad F_1=c\text{v}_1=6.86\cdot10^5 N$; $\quad F_2=c\text{v}_2=2.06\cdot10^6 N$.

3. $m\text{v}=(m+M)w \quad \rightarrow \quad w=\frac{(m+M)}{m}\text{v}=4.98\,m/s$.

4. $T=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$; $\quad T'=2\pi\sqrt{\frac{l}{g'}}$; $\quad \frac{T'}{T}=\sqrt{\frac{g}{g'}}=\sqrt{6}$; $\quad \frac{T'}{T}=\frac{\tau}{12h} \quad \rightarrow$;
$\rightarrow \quad \tau=12\text{h}\cdot\sqrt{6}=29.39h=29h\,23\min\,38s$;

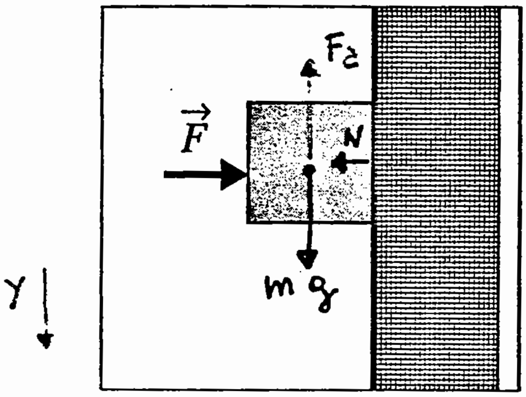
5. $(m+m')g=V\rho_a g=abc\rho_a g \quad \rightarrow \quad m'=abc\rho_a-m=4550\,Kg$.

6. $p_1=\rho g h_1+p_{atm}$; $\quad p_2=\rho g h_2+p_{atm}$; $\quad \frac{1}{2}\rho\text{v}_1^2+p_1=\frac{1}{2}\rho\text{v}_2^2+p_2$; $\quad \text{v}_1 d_1^2=\text{v}_2 d_2^2$;

$$\text{v}_1=\sqrt{\frac{2g(h_1-h_2)}{\left(\frac{d_1}{d_2}\right)^4-1}}=0.572\,m/s;\quad \text{v}_2=2.29\,m/s;$$

$Q_V=\text{v}_1 S_1=\text{v}_1\pi\frac{d_1^2}{4}=7.18\cdot10^{-4}\,m^3/s$; $\quad Q_M=\rho Q_V=0.718\,Kg/s$.

1. **Forze.** Un blocco di massa m = 6.4 Kg è appoggiato ad una parete verticale (v. figura). Il coefficiente di attrito statico tra blocco e parete è $\mu_s = 0.76$. Sul blocco agisce una forza orizzontale F, orientata come mostrato nella figura. Si calcoli il valore minimo di F, in modo che il blocco non scivoli. Nel caso invece che la forza F sia di 50 N e il coefficiente di attrito dinamico sia $\mu_d = 0.6$, si calcoli l'accelerazione (in modulo, direzione e verso) cui è soggetto il blocco.



$N = |\vec{F}|$

$F_a = \mu_s \cdot N$

$\boxed{N \neq mg}$

Soluzione :

La forza d'attrito (statico o dinamico) è proporzionale alla forza F :

a) La forza di attrito deve essere maggiore o uguale a quella di gravità :

$F\mu_s \geq mg \quad \rightarrow \quad F \geq \frac{mg}{\mu_s} = \underbrace{82.5\,\text{N}.}_{a}$; $\underbrace{8.25\ N}_{b}$; $\underbrace{85.6\ N}_{c}$; $\underbrace{8.25\ N}_{d}$

b) Si applica il secondo principio della dinamica (l'asse è rivolto verso il basso) :

$ma = mg - \mu_d F' \rightarrow a = g - \frac{\mu_d F'}{\text{m}} = 5.11\,m/s^2$;

a verso il basso.

a) $F' = 50\ N \Rightarrow \underline{5.11\ m/s^2} \quad (\mu d = 0.6)$

b) $F' = 5\ N \Rightarrow \underline{5.11}\ m/s^2 \quad (\mu d = 0.6)\ [m = 0{,}64\ kg]$

c) $F' = 50\ N, \mu d = 0.4 \Rightarrow a = \underline{6.67}\ m/s^2$

d) $F' = 5\ N, \mu d = 0.6, m = 0.64\ kg \Rightarrow a = \underline{5.11\ m/s^2}$

ESONERO 1/2/2001

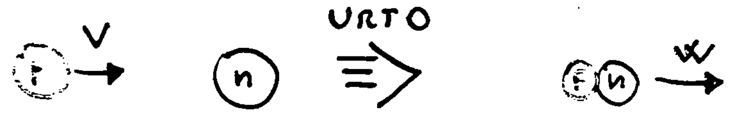
2. **Urti ed energia meccanica.** Un protone, di massa $m = 1.67 \times 10^{-24}$ g e velocità $v = 4\times10^6$ m/s, collide con un neutrone fermo, di massa identica a quella del protone. Supponiamo che nell'urto anelastico si formi un deutone, particella composta da un protone ed un neutrone. Si calcoli la velocità finale del deutone e la frazione dell'energia meccanica totale andata persa nell'urto.

Soluzione :

La quantità di moto si conserva nell'urto anelastico :

$$mv = (m+m)w \quad \rightarrow \quad \underline{w = v/2} = \underline{2\times10^6 \text{ m/s}};$$

$$f = \frac{E^{iniziale} - E^{finale}}{E^{iniziale}} = 1 - \frac{1/2(m+m)w^2}{1/2\,mv^2} = 1 - \frac{mv^2/4}{mv^2/2} = \underline{0.5}$$



$$f = 1 - \frac{\frac{1}{2}\,2m\left(\frac{v}{2}\right)^2}{\frac{1}{2}mv^2} = 1 - \frac{\frac{1}{2}\cancel{\frac{1}{2}mv^2}}{\cancel{\frac{1}{2}mv^2}} = 1 - \frac{1}{2} = 0.5$$

$$E_{INIZIALE} = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}\cdot 1.67\cdot10^{-27}\cdot(4\cdot10^6)^2 = \frac{1}{2}\cdot1.67\cdot10^{-27}\cdot16\cdot10^{12} =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot1.67\cdot16\cdot10^{-27+12} = 13.4\cdot10^{-15}\ \text{J}$$

$$E_{FINALE} = \frac{1}{2}(2m)w^2 = \frac{1}{2}(2m)\left(\frac{v}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}mv^2 = \frac{1}{2}\,\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}E_{INIZIALE}$$

ESONERO 1/2/2001

3. Oscillazioni. Un piccolo blocchetto, di massa m = 0.49 Kg, è attaccato ad un piano verticale tramite una molla, ed è quindi libero di oscillare in direzione orizzontale. Il periodo delle oscillazioni è T = 0.91 s e la distanza tra i due punti di oscillazione massima è d = 124 mm. Si calcoli l'energia meccanica totale dell'oscillatore e la velocità massima del blocchetto durante le oscillazioni.

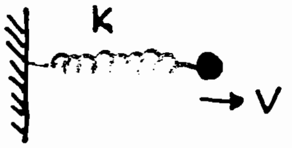
Soluzione

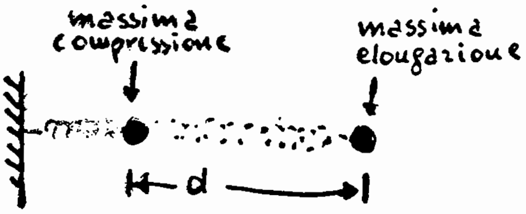
Esprimiamo la costante elastica della molla per mezzo del periodo, poi l'energia totale nel punto di elongazione massima della molla, poi la velocità nel punto di equilibrio della molla :

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \rightarrow k = \frac{4\pi^2 m}{T^2} = \underbrace{23.36\,N/m}_{a}; \quad \underbrace{233.6\,N/m}_{b}\ ;\ \underbrace{46.7\,N/m}_{c}\ ;\ \underbrace{23.36\,N/m}_{d}$$

$$E = 1/2kx^2_{max} = \underbrace{4.49\times10^{-2}\,J}_{a};\quad \underbrace{44.9\cdot10^{-2}\,J}_{b}\ ;\ \underbrace{8.98\cdot10^{-2}\,J}_{c}\ ;\ \underbrace{4.49\cdot10^{-2}\,J}_{d}$$

$$E = 1/2mv^2_{max} \rightarrow v_{max} = \sqrt{\frac{2E}{m}} = \underbrace{0.43\,m/s}_{a}.\ ;\ \underbrace{0.43\,m/s}_{b}\ ;\ \underbrace{0.43\,m/s}_{c}\ ;\ \underbrace{0.43\,m/s}_{d}$$





A) m = 0.49 kg ; T = 0.91 s ; d = 124 mm

b) m = 4.9 kg ; T = 0.91 s ; d = 124 mm

c) m = 0.98 kg ; T = 0.91 s ; d = 124 mm

d) m = 0.49 kg ; T = 0.91 s ; d = 124 mm

N.B. $X_{MAX} = \frac{d}{2} = 62\ mm = 62\cdot10^{-3}\ m$

$E_{TOTALE} = \frac{1}{2} k\, x^2_{MAX} = \frac{1}{2} m V^2_{MAX}$

• $V_{MAX} = \sqrt{\frac{2E}{m}} = \sqrt{\frac{2\,\frac{1}{2}k X^2_{max}}{m}} = X_{MAX}\cdot\sqrt{\frac{k}{m}} = X_{max}\cdot\omega = X_{max}\cdot\frac{2\pi}{T} = \frac{d}{2}\,\frac{2\pi}{T} = \pi\frac{d}{T}$

⇒ LA VELOCITA' MASSIMA E' INDIPENDENTE DALLA MASSA

ESONERO 1/2/2001

4. Gravitazione. Un pianeta di recente scoperta ha un'accelerazione di gravità sulla sua superficie pari a quella terrestre, ma una densità media doppia di quella della terra. Approssimando il pianeta e la Terra a delle sfere omogenee, si calcoli il rapporto tra il raggio del pianeta e quello della Terra e tra la massa del pianeta e quella terrestre.

Soluzione :

Esprimiamo l'accelerazione di gravità per mezzo della legge di gravitazione e la densità con le masse dei pianeti, poi facciamo semplificazioni algebriche :

$$\left(\frac{Gm_T}{R_T^2}\right)=\left(\frac{Gm_P}{R_P^2}\right); \qquad [\, g_{TERRA} = g_{PIANETA} \,]$$

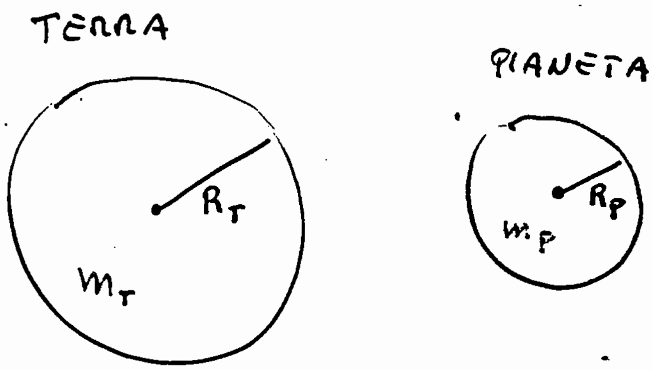
$$2\underbrace{\left(\frac{m_T}{4/3\pi R_T^3}\right)}_{\rho_T}=\underbrace{\left(\frac{m_P}{4/3\pi R_P^3}\right)}_{\rho_{PIANETA}};$$

$$\frac{m_T}{R_T^2}=\frac{m_P}{R_P^2};$$

$$\frac{2m_T}{R_T^3}=\frac{m_P}{R_P^3};$$

$$\frac{R_P}{R_T}=\frac{1}{2};$$

$$\frac{m_P}{m_T}=\frac{1}{4}.$$



$$\boxed{\bullet \text{ DENSITA'} \quad \rho = \frac{m}{V} = \frac{m}{\frac{4}{3}\pi R^3}}$$

[VOLUME DELLA SFERA $= \frac{4}{3}\pi R^3$]

- $F = G\dfrac{mM}{R^2} = m\, G\dfrac{M}{R^2} \Rightarrow \boxed{g = G\dfrac{M}{R^2}}$

$$2\cdot\frac{m_T}{R_T^2}\cdot\frac{1}{R_T} = \frac{m_P}{R_P^2}\cdot\frac{1}{R_P} \Rightarrow \frac{2}{R_T} = \frac{1}{R_P} \Rightarrow \frac{R_P}{R_T} = \frac{1}{2}$$

- $\dfrac{m_T}{R_T^2} = \dfrac{m_P}{R_P^2} \Rightarrow \dfrac{m_P}{m_T} = \dfrac{R_P^2}{R_T^2} = \left(\dfrac{R_P}{R_T}\right)^2 = \left(\dfrac{1}{2}\right)^2 = \dfrac{1}{4}$

- NEL CASO LA DENSITA' SIA META' SI HA:

$\dfrac{R_P}{R_T} = 2 \quad ; \quad \dfrac{m_P}{M_T} = 4$

ESONERO 1/2/2001

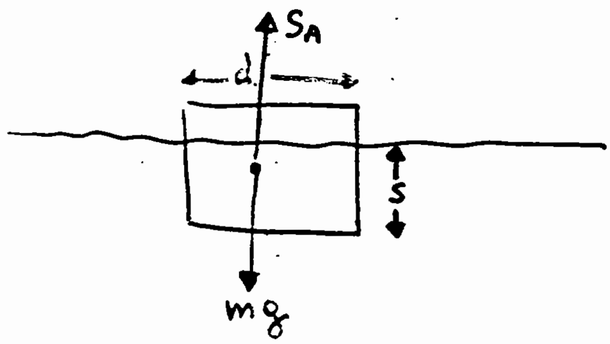
5. Statica dei Fluidi. Un cubo di ferro (densità $\rho_{Fe} = 7.86\ g/cm^3$) di lato 0.5 m, viene collocato in una grande vasca di mercurio (densità $\rho_{Hg} = 13.63\ g/cm^3$). Il cubetto affonda o galleggia (si giustifichi la risposta) ? Se galleggiasse, mantenendosi parallelo al piano orizzontale, quale sarebbe la distanza tra la superficie del mercurio e la faccia inferiore del cubo ?

Soluzione

a) il cubo galleggia poiché la densità del ferro è minore di quella del mercurio, e pertanto la spinta di Archimede su tutto il cubo è maggiore della forza peso;

b) la parte immersa del cubo è tale che la forza di Archimede è uguale alla forza peso; chiamiamo s la distanza tra superficie del mercurio e superficie inferiore del cubo :

$$\rho_{Fe} d^3 g = \rho_{Hg} d^2 s g \quad \rightarrow \quad s = d\frac{\rho_{Fe}}{\rho_{Hg}} = 28.8\,\text{cm}.$$



[VOLUME CUBO = d^3]

- MASSA DEL FERRO = $\rho_{Fe} \cdot V_{ferro} = \rho_{Fe} \cdot d^3$
- massa di mercurio "spostato" = $\rho_{Hg} \cdot d^2 \cdot s$

$$mg = S_A \Rightarrow \rho_{Fe} \cdot d^3 \cdot g = \rho_{Hg} \cdot d^2 s g \Rightarrow s = d\frac{\rho_{Fe}}{\rho_{Hg}}$$

a) $d = 0.5\ m \Rightarrow s = 28.8\ cm$

b) $d = 0.25\ m \Rightarrow s = 14.4\ cm$

c) $d = 0.40\ m \Rightarrow s = 23.0\ cm$

d) $d = 0.25\ m \Rightarrow s = 14.4\ cm$

ESONERO 1/2/2001

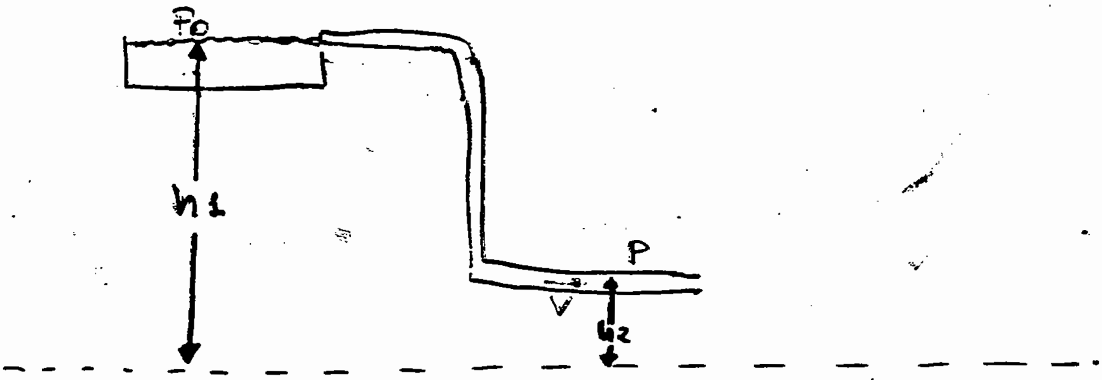
6. Dinamica dei fluidi. Supponiamo che la rete idrica di Roma si approvvigioni dalla superficie di un piccolo lago di acqua ferma a $h_1 = 100$ m di altezza sul livello del mare. Se l'acqua fosse un fluido ideale, che pressione si avrebbe nel tratto dell'acquedotto sito a Piazza Navona ($h_2 = 20$ m sul livello del mare), in cui l'acqua scorre alla velocità di $v = 10$ m/s ?

Soluzione

Applichiamo la legge di Bernoulli tra i punti : superficie del lago e interno dell'acquedotto:

$$\rho g h_1 + p_{atm} = \frac{1}{2}\rho v^2 + \rho g h_2 + p \quad \rightarrow$$

$$\rightarrow \quad p = \rho g (h_1 - h_2) - \frac{1}{2}\rho v^2 + p_{atm} = 8.35 \times 10^5 \text{ Pa} = 8.27 \text{ atm}.$$



$$P = \rho g (h_1 - h_2) - \frac{1}{2}\rho v^2 + P_0$$

$P_0 = 1$ atm $= 1.01 \cdot 10^5$ Pa

$\rho = 10^3$ kg/m^3

~~a) $h_1 = 100$ m ; $h_2 = 20$ m ; $v = 10 \frac{m}{s}$ $\Rightarrow$ $P = 8.35 \cdot 10^5$ Pa $= 8.27$ atm~~

~~b) $h_1 = 90$ m ; $h_2 = 15$ m ; $v = 8 \frac{m}{s}$ $\Rightarrow$ $P = 7.06 \cdot 10^5$ Pa $= 6.98$ atm~~

~~c) $h_1 = 80$ m ; $h_2 = 25$ m ; $v = 12 \frac{m}{s}$ $\Rightarrow$ $P = 6.66 \cdot 10^5$ Pa $= 6.58$ atm~~

~~d) $h_1 = 50$ m ; $h_2 = 15$ m ; $v = 8 \frac{m}{s}$ $\Rightarrow$ $P = 6.35 \cdot 10^5$ Pa $= 6.25$ atm~~