

ESERCITAZIONE 6

UTILIZZO TAVOLE NORMALI $N(0,1)$

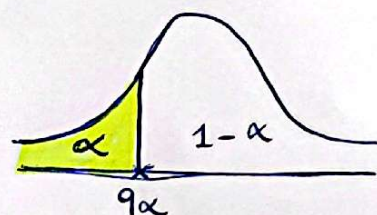
Ricorda:

• Se $X \sim N(\mu, \sigma^2) \Rightarrow \frac{X - \mu}{\sigma} = Z \sim N(0,1)$ (STANDARDIZZAZIONE)

• Il **QUANTILE DI LIVELLO** $\alpha \in [0,1]$ di X (assolutamente continua) è un valore $q_\alpha \in \mathbb{R}$ tale che: $P(X \leq q_\alpha) = F_X(q_\alpha) = \int_{-\infty}^{q_\alpha} f_X(x) dx = \alpha$

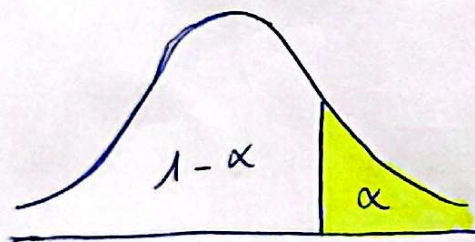
Quando F_X è invertibile, a ciascun valore di α corrisponde un unico valore di q_α e viceversa. In tal caso la funzione $Q: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ definita da

$Q(\alpha) = F_X^{-1}(\alpha) = q_\alpha$ è detta **FUNZIONE QUANTILE**



N.B. q_α è un valore che X può assumere e va quindi rappresentato sull'asse delle ascisse.

• Il **VALORE CRITICO** di livello $\alpha \in [0,1]$ di X (assolutamente continua) è quel valore $q_\alpha^* \in \mathbb{R}$ t.c. $P(X \geq q_\alpha^*) = 1 - F_X(q_\alpha^*) = \int_{q_\alpha^*}^{+\infty} f_X(x) dx = \alpha$



$q_\alpha^* =$ valore critico di livello α

N.B. Relazione tra v. critico e quantile

$$q_\alpha^* = q_{1-\alpha} \quad \forall \alpha \in [0,1]$$

$$q_\alpha = q_{1-\alpha}^* \quad \forall \alpha \in [0,1]$$

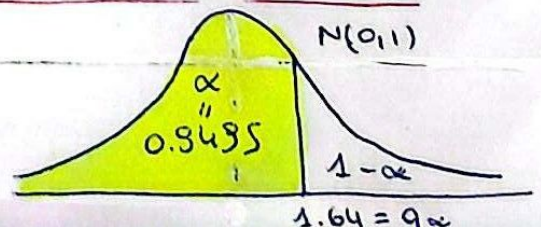
Nella pagina successiva mostreremo il funzionamento della tavola dei quantili per il caso Normale standard ($N(0,1)$).

La 1^a colonna (z) sono presenti i quantili con la prima cifra decimale, mentre nella 1^a riga compare la seconda cifra decimale del quantile. Nella parte merma si trovano i valori di probabilità.

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.7	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.8	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.9	0.99995	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

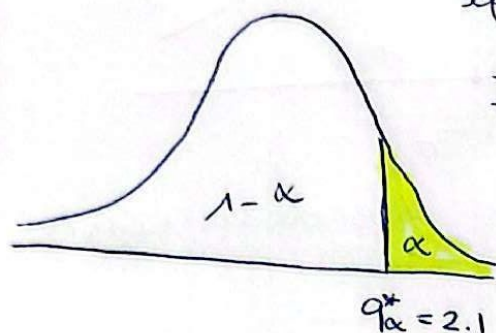
4.0 0.99997
5.0 0.9999997
6.0 0.9999999990

Ad esempio, il quantile 1.64 è associata la probabilità 0.9495. Questo vuol dire che data $X \sim N(0,1)$
 $P(X \leq 1.64) = 0.9495$



Quindi 1.64 è il quantile di livello 0.9495.

Identifichiamo ora di conoscere il valore critico $q_{\alpha}^* = 2.1$, ma di disporre solo della tavola dei quantili, come faccio a trovare la probabilità corrispondente a q_{α}^* (ovvero come faccio a calcolare α ?).



Sappiamo che $q_{\alpha}^* = q_{1-\alpha} = 2.1$ VEDERE LA TAVOLA
(tratto blu)

Individuiamo quindi il quantile di livello $1-\alpha$ pari a 2.1 sulla tavola e la sua corrispondente probabilità $(1-\alpha) = 0.9821$
quindi $\alpha = 1 - 0.9821 = 0.0179$

1) $X \sim N(4.3, (0.2)^2)$

a) $P(X > 4.5)$

b) $P(X < 4)$

utilizzo la tavola dei quantili.

p. ripartizione $N(0,1)$

$$a) P\left(\frac{X-4.3}{0.2} > \frac{4.5-4.3}{0.2}\right) = P(Z > 1) = 1 - P(Z \leq 1) = 1 - \Phi(1) = 1 - 0.84 = 0.16$$

$$b) P(X < 4) = P\left(\frac{X-4.3}{0.2} < \frac{4-4.3}{0.2}\right) = P(Z < -1.5) = \Phi(-1.5)$$

$$= 1 - \Phi(1.5) = 1 - 0.93 = 0.07$$

(Ho sfruttato la proprietà di simmetria della normale $N(0,1)$ che ci dice che

$$\boxed{\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)})$$

2) $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ con μ, σ^2 incognite. Trova i valori di μ e σ

Sapendo che:

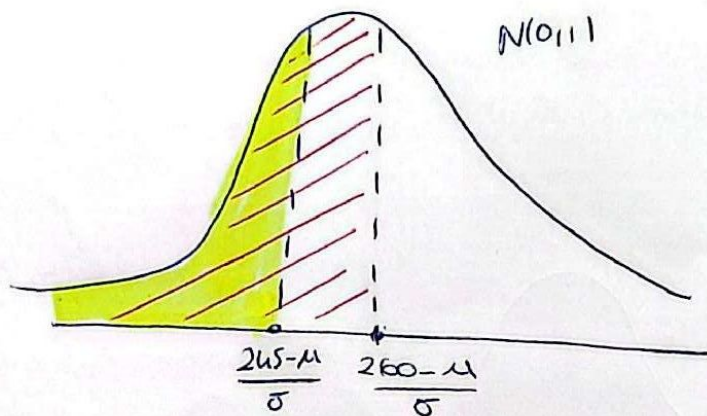
$$\begin{cases} P(X < 245) = 0.33 \\ P(X > 260) = 0.48 \end{cases}$$

$$\begin{cases} P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} < \frac{245-\mu}{\sigma}\right) = P\left(Z < \frac{245-\mu}{\sigma}\right) = 0.33 = \Phi\left(\frac{245-\mu}{\sigma}\right) = 0.33 \end{cases}$$

$$\begin{cases} P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} > \frac{260-\mu}{\sigma}\right) = P\left(Z > \frac{260-\mu}{\sigma}\right) = 1 - P\left(Z \leq \frac{260-\mu}{\sigma}\right) \\ = 1 - \Phi\left(\frac{260-\mu}{\sigma}\right) = 0.48 \end{cases}$$

$$\hookrightarrow \Phi\left(\frac{260-\mu}{\sigma}\right) = 0.52$$

$$\begin{cases} \Phi\left(\frac{245-\mu}{\sigma}\right) = 0.33 \\ \Phi\left(\frac{260-\mu}{\sigma}\right) = 0.52 \end{cases}$$



Quindi ho che $\frac{245-\mu}{\sigma}$ è il quantile di livello 0.33 della $N(0,1)$
e $\frac{260-\mu}{\sigma}$ quello di livello 0.52

$$\begin{cases} \frac{245-\mu}{\sigma} = q_{0.33} = 0.44 \\ \frac{260-\mu}{\sigma} = q_{0.52} = 0.05 \end{cases}$$

A questo punto utilizziamo la tavola per calcolare $q_{0.33}$ e $q_{0.52}$. Quello che dobbiamo fare è individuare (nella parte interna della tavola) i valori 0.33 e 0.52 e trovare i quantili ad essi corrispondenti (Esempio in verde nella tabella per $q_{0.52}$)

→ troviamo il valore 0.5193 $\approx$ 0.52 e la riga e la colonna che identifichiamo 0.5193 $\approx$ 0.52 è $q_{0.52} = 0.05$

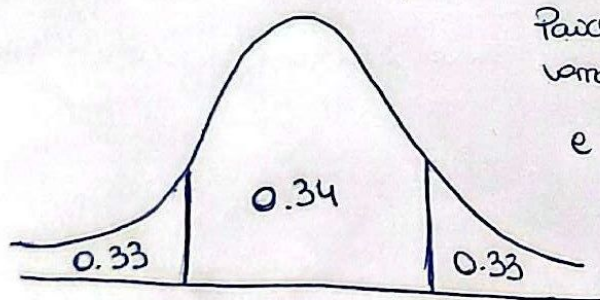
Come faccio per 0.33 non essendoci nella tabella?

$N(0,1)$ → è simmetrica rispetto allo zero

Perciò è simmetrica rispetto allo zero
vale a dire $|q_{\alpha} = -q_{1-\alpha}|$

e quindi

$$q_{0.33} = -q_{1-0.33} = -q_{0.67} = 0.44$$



$q_{0.33}$

$$q_{0.33}^* = q_{1-0.33}$$

→ per la relazione tra quantili e valore critico

0.67
disponibile
nella tavola
(Esempio in verde
per il calcolo
di $q_{0.67}$)
(SULLA TABELLA)

PROPRIETÀ ASINTOTICHE DELLO SMV ($\hat{\theta}_{MV}$)

• **NORMALITÀ ASINTOTICA:** Dato $\hat{\theta}_{MV}$ lo SMV di θ e dato un modello matematico,

Sotto le condizioni di regolarità vale che

$$\frac{\hat{\theta}_{MV} - \theta}{\sqrt{I_n(\theta)^{-1}}} \xrightarrow{d} N(0,1)$$

Questo vuol dire che per n sufficientemente grande

$$\hat{\theta}_{MV} \sim N(\theta, I_n(\theta)^{-1}) \\ = N(\theta, cr(\theta))$$

• **ESEMPIO (Modello Esponenziale Negativo)**

$X_i | \theta \sim \text{EN}(\theta)$ $f_X(x, \theta) = \theta e^{-\theta x}$, $\hat{\theta}_{MV} = \frac{1}{\bar{X}_n}$ per quanto dello varrà che

$$\hat{\theta}_{MV} = \frac{1}{\bar{X}_n} \sim N(\theta, I_n(\theta)^{-1})$$

$$\text{calcolo } I_n^{-1}(\theta) \Rightarrow I_n(\theta) = -n \mathbb{E}_\theta \left[\left(\frac{\partial}{\partial \theta} \ln f_X(x, \theta) \right)^2 \right] = -n \mathbb{E}_\theta \left[\left(\frac{\partial}{\partial \theta} (\ln \theta - \theta x) \right)^2 \right] \\ = -n \mathbb{E}_\theta \left[\left(\frac{1}{\theta} - x \right)^2 \right] = -n \mathbb{E}_\theta \left[-\frac{1}{\theta^2} \right] = \frac{n}{\theta^2} \Rightarrow cr(\theta) = I_n^{-1}(\theta) = \frac{\theta^2}{n}$$

$$\text{quindi } \hat{\theta}_{MV} = \frac{1}{\bar{X}_n} \sim N(\theta, \theta^2/n)$$

• **NORMALITÀ ASINTOTICA PER FUNZIONI DELLO SMV**

Dato $\hat{\theta}_{MV}$ SMV di θ sappiamo (per l'equivalenza) che $g(\hat{\theta}_{MV})$ è SMV di $g(\theta)$,
sotto le condizioni di regolarità vale che:

$$\frac{g(\hat{\theta}_{MV}) - g(\theta)}{|g'(\theta)| \sqrt{I_n(\theta)^{-1}}} \xrightarrow{d} N(0,1)$$

vale quindi che $\frac{g(\hat{\theta}_{MV}) - g(\theta)}{|g'(\theta)| \sqrt{I_n(\theta)^{-1}}} \sim N(0,1)$ e quindi che

$$g(\hat{\theta}_{MV}) \sim N\left(g(\theta), \frac{g'(\theta)^2}{I_n(\theta)}\right) = N(g(\theta), cr(g(\theta)))$$

limite riferito
di Crámer Rao
di $g(\theta)$.
 $= \frac{g'(\theta)^2}{I_n(\theta)}$

ESEMPLO (Modello Poisson)

$X_{1:n} \sim \text{Poisson}(\theta)$, data $g(\theta) = e^{-\theta}$. Sappiamo che $\hat{\theta}_{MV}$ di θ è $\hat{\theta}_{MV} = \bar{X}_n$,
(per equivalenza) vole quindi che $g(\hat{\theta}_{MV}) = e^{-\hat{\theta}_{MV}} = e^{-\bar{X}_n}$

↓ snu di $g(\theta)$

→ voglio una sua distribuzione approssimata

$$\begin{aligned} \ln(\theta) &= -n \mathbb{E}_{\theta} \left[\frac{d^2}{d\theta^2} \ln f(x|\theta) \right] = -n \mathbb{E}_{\theta} \left[\frac{d^2}{d\theta^2} \ln \left(\frac{e^{-\theta} \theta^x}{x!} \right) \right] \\ &= -n \mathbb{E}_{\theta} \left[\frac{d^2}{d\theta^2} \left(x \ln \theta - \theta + \ln \frac{1}{x!} \right) \right] \end{aligned}$$

$$= -n \mathbb{E}_{\theta} \left[\frac{d^2}{d\theta^2} \left(\frac{x}{\theta} - 1 \right) \right] = -n \mathbb{E}_{\theta} \left[-\frac{x}{\theta^2} \right] = \frac{n}{\theta^2} \mathbb{E}[X] = \frac{n}{\theta^2} \theta = \frac{n}{\theta}$$

$$g'(\theta) = \frac{d}{d\theta} g(\theta) = \frac{d}{d\theta} e^{-\theta} = -e^{-\theta}$$

$$g(\hat{\theta}_{MV}) \sim N \left(g(\theta), \frac{g'(\theta)^2}{\ln(\theta)} \right) = N \left(e^{-\theta}, e^{-2\theta} \frac{\theta}{n} \right)$$

• EFFICIENZA / OTIMALITÀ ASINTOTICA

$$\hat{\theta}_{MV} \sim N(\theta, c(\theta)) \Rightarrow \mathbb{E}(\hat{\theta}_{MV}) \approx \theta \Rightarrow \text{è asintoticamente UNUE di } \theta$$

$$V(\hat{\theta}_{MV}) \approx c(\theta)$$

→ asintoticamente non distorto per θ

→ varianza asintoticamente equivalente al limite inferiore di Cramer-Rao.

$$\hat{g}(\hat{\theta}_{MV}) \sim N \left(g(\theta), \frac{g'(\theta)^2}{\ln(\theta)} \right) = N(g(\theta), c_g(\theta))$$

$$\rightarrow \mathbb{E}[g(\hat{\theta}_{MV})] = g(\theta) \text{ asint. non distorto per } g(\theta)$$

$$V[g(\hat{\theta}_{MV})] = c_g(\theta) \text{ varianza asint. equivalente al limite inferiore di Cramer Rao per } g(\theta).$$

$(\hat{g}(\hat{\theta}_{MV}))$ è quindi asintoticamente UNUE per $g(\theta)$.

ESERCIZIO ESONERO RICHIESTO

1) $Z \sim \text{Exp}(1)$ $f(z) = e^{-z} \mathbb{1}_{[0, +\infty)}$

$$S_{PS}(x, \mu, \sigma) = \frac{1}{\sigma} f\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) = \frac{1}{\sigma} e^{-\frac{x-\mu}{\sigma}} \mathbb{1}_{\left[\frac{x-\mu}{\sigma} \geq 0\right]} = \frac{1}{\sigma} e^{-\frac{x-\mu}{\sigma}} \mathbb{1}_{[x \geq \mu]}$$

$$\Downarrow = \begin{cases} 1 & \frac{x-\mu}{\sigma} \geq 0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 1 & x \geq \mu \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$= \frac{1}{\sigma} \mathbb{1}_{[x \geq \mu]}$$

2) $X = \sigma Z + \mu$ v.a. con densità $S_{PS}(x, \mu, \sigma)$. Determina stimatore dei momenti di (μ, σ^2) basati su $X_1, \dots, X_n$ iid con X_i avente stessa distribuzione di X .

$\rightarrow = 1$ poiché $Z \sim \text{Exp}(1)$

$$\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[\sigma Z + \mu] = \sigma \mathbb{E}[Z] + \mathbb{E}[\mu] = \sigma \mathbb{E}[Z] + \mu = \sigma + \mu$$

$$V[X] = V[\sigma Z + \mu] = \underbrace{V[\sigma Z]}_{\substack{\text{è} \\ \text{perché costante}}} + \underbrace{V[\mu]}_{\substack{\text{poiché } Z \sim \text{Exp}(1)}} = \sigma^2 V[Z] = \sigma^2$$

SISTEMA DEI MOMENTI $\Rightarrow \begin{cases} \bar{X}_n = \mathbb{E}[X] \\ \hat{\sigma}_n^2 = V[X] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \bar{X}_n = \sigma + \mu \\ \hat{\sigma}_n^2 = \sigma^2 \end{cases}$

$\downarrow$ momento campionario

risolvo σ e μ

$$\Rightarrow \begin{cases} \sigma^2 = \hat{\sigma}_n^2 \Rightarrow \sigma = \sqrt{\hat{\sigma}_n^2} \\ \mu = \bar{X}_n - \sigma \Rightarrow \mu = \bar{X}_n - \sqrt{\hat{\sigma}_n^2} \end{cases}$$

$\downarrow$ stimatore σ con $\sqrt{\hat{\sigma}_n^2}$

Quindi $\hat{\sigma}_{\text{momenti}} = \sqrt{\hat{\sigma}_n^2}$
 $\hat{\mu}_{\text{momenti}} = \bar{X}_n - \sqrt{\hat{\sigma}_n^2}$