

Cognome e nome N. matricola

ISTRUZIONI

1. Svolgere 5 dei seguenti 6 esercizi, motivando le risposte in modo chiaro ed esauriente. Nel caso di dubbi sul testo, chiedere chiarimenti al docente. Non è consentito l'uso di dispositivi elettronici.
2. Al termine del tempo disponibile, riconsegnare l'elaborato **scritto in modo chiaro e leggibile** insieme a questo foglio. Scrivere nome e cognome **su ogni foglio** che si consegna.

1. Date le successioni di funzioni

$$f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^4}, \quad g_n(x) = \frac{n^{1/3}x}{1+n^2x^4},$$

studiarne la convergenza uniforme negli intervalli $[0, 1]$, $[1, 3]$.

2. Dire per quali valori del parametro reale α il campo vettoriale piano

$$\mathbf{F}(x, y) = \left(\frac{2xy}{x^2 - 4y^2}, \ln|x^2 - 4y^2| + \frac{\alpha y^2}{x^2 - 4y^2} \right)$$

è **irrotazionale**. Per tale valore di α , dire se il campo è conservativo in ciascuno degli aperti connessi in cui è definito, e calcolare il lavoro compiuto da \mathbf{F} per spostare un punto materiale da $(1, 0)$ a $(3, 1)$.

3. Trovare e classificare i punti critici di

$$f(x, y) = 3x^2 - 12xy + y^3 + 6y^2 + 9y.$$

Successivamente calcolarne estremo superiore ed estremo inferiore sia su \mathbb{R}^2 che sul primo quadrante.

4. Calcolare il lavoro (circuitalità) del campo vettoriale

$$\mathbf{F}(x, y) = (xz^2 + y^2, -y, x^2z)$$

lungo il bordo dello "spicchio" di sfera

$$S = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 9, x \geq 0, y \geq 0 \right\}$$

con l'orientazione indotta dal versore normale esterno.

5. Mostrare che in un opportuno intorno del punto $(0, 0, 1)$ i punti dell'insieme

$$E = \{(x, y, z) : \sin(xy) + e^{zx} = z\}$$

costituiscono il grafico di una funzione $z = f(x, y)$. Scrivere una formula per le derivate direzionali di f in $(0, 0)$.

6. Calcolare

$$\iint_D \frac{x-y}{\sqrt{x^2+y^2}} dx dy,$$

dove

$$D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1, 13x^2 + y^2 \geq 4, x \geq 0 \right\}.$$

Cognome e nome N. matricola

ISTRUZIONI

1. Svolgere 5 dei seguenti 6 esercizi, motivando le risposte in modo chiaro ed esauriente. Nel caso di dubbi sul testo, chiedere chiarimenti al docente. Non è consentito l'uso di dispositivi elettronici.
2. Al termine del tempo disponibile, riconsegnare l'elaborato **scritto in modo chiaro e leggibile** insieme a questo foglio. Scrivere nome e cognome **su ogni foglio** che si consegna.

1. Date le successioni di funzioni

$$f_n(x) = \frac{nx^3}{1+n^2x^4}, \quad g_n(x) = \frac{n^{5/3}x^3}{1+n^2x^4},$$

studiarne la convergenza uniforme negli intervalli $[0, 2]$, $[2, 3]$.

2. Dire per quali valori del parametro reale α il campo vettoriale piano

$$\mathbf{F}(x, y) = \left(\frac{\alpha xy}{y^2 - x^2}, \ln|y^2 - x^2| + \frac{2y^2}{y^2 - x^2} \right)$$

è **irrotazionale**. Per tale valore di α , dire se il campo è conservativo in ciascuno degli aperti connessi in cui è definito, e calcolare il lavoro compiuto da \mathbf{F} per spostare un punto materiale da $(0, 1)$ a $(1, 2)$.

3. Trovare e classificare i punti critici di

$$f(x, y) = 3y^2 - 12xy + x^3 + 6x^2 + 9x.$$

Successivamente calcolarne estremo superiore ed estremo inferiore sia su \mathbb{R}^2 che sul primo quadrante.

4. Calcolare il lavoro (circuitalità) del campo vettoriale

$$\mathbf{F}(x, y) = (-x, yz^2 + x^2, y^2z)$$

lungo il bordo dello "spicchio" di sfera

$$S = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 4, x \geq 0, y \geq 0 \right\}$$

con l'orientazione indotta dal versore normale esterno.

5. Mostrare che in un opportuno intorno del punto $(0, 0, 1)$ i punti dell'insieme

$$E = \{(x, y, z) : e^{yz} + \ln(1 + xy) = z\}$$

costituiscono il grafico di una funzione $z = f(x, y)$. Scrivere una formula per le derivate direzionali di f in $(0, 0)$.

6. Calcolare

$$\iint_D \frac{x+y}{\sqrt{x^2+y^2}} dx dy,$$

dove

$$D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1, x^2 + 5y^2 \geq 4, y \geq 0 \right\}.$$