

Esame di Meccanica Quantistica 14/02/2025

Esercizio 1. Si consideri il seguente potenziale unidimensionale,

$$V(x) = \begin{cases} 0 & \text{per } x < -L \\ V_{buca}(x) & \text{per } -L < x < 0 \\ V_1 & \text{per } x > 0, \end{cases}$$

con $V_{buca}(x) < 0$ e $V_1 > 0$. Si vogliono determinare le proprietà di $V(x)$ attraverso opportuni esperimenti di scattering. Si inviano in particolare degli elettroni emessi con impulso $p > 0$ da una sorgente posta a $x = -\infty$. La preparazione dello stato iniziale è tale per cui la descrizione di tutti i processi di scattering considerati può essere ricavata a partire dalle autofunzioni dell'Hamiltoniana.

a) In un primo esperimento, si pone un rivelatore di elettroni a $x = x_0 \gg L$. Si osserva che per impulsi minori di un certo valore soglia p_s non vi sono conteggi nel rivelatore. Sapendo che $p_s c = 50 \text{ keV}$, dove c è la velocità della luce, si calcoli il valore di V_1 in keV. Si utilizzi $m_e c^2 = 500 \text{ keV}$, dove m_e è la massa dell'elettrone.

b) Per $V_{buca}(x) = 0$, determinare i coefficienti di riflessione $R(p)$ e trasmissione $T(p)$ per valori dell'impulso $p > p_s$. Disegnare il grafico di $R(p)$ e $T(p)$.

c) Si consideri ora $p < p_s$ con $V_{buca}(x)$ generico. Facendo uso della corrente di densità di probabilità, si dimostri che l'onda riflessa non ha attenuazione (ovvero $R = 1$) ma presenta in generale uno sfasamento φ rispetto all'onda incidente. Si calcoli lo sfasamento nel caso $V_{buca}(x) = 0$. Lo sfasamento è definito come la differenza delle fasi delle ampiezze complesse dell'onda riflessa e dell'onda incidente.

d) Modellizzando $V_{buca}(x) = -V_0$ con $V_0 > 0$, calcolare lo sfasamento come funzione dell'energia dell'onda incidente per $V_1 \gg E$, $V_1 \gg V_0$, ossia nel limite $V_1 \rightarrow \infty$. Si verifichi che se $V_0 = 0$ esso si riduce all'espressione calcolata in precedenza per $E/V_1 \rightarrow 0$.

Esercizio 2. La funzione d'onda spinoriale di una particella di spin 1 e massa m , libera di muoversi in una dimensione, è data da

$$\psi = A e^{-x^2/(2\sigma^2)} \left(e^{ikx} \chi_+ + i\sqrt{2} e^{-ikx} \chi_- \right),$$

dove gli spinori normalizzati $\chi_{\pm}$ sono autofunzioni di S_z con autovalore $\pm\hbar$.

a) Si calcoli la costante A in modo che ψ sia normalizzata. Se viene effettuata una misura di S_z su ψ , quali valori sono ottenuti e con quale probabilità?

b) Si calcolino i valori medi $\langle \psi | x | \psi \rangle$ e $\langle \psi | p | \psi \rangle$.

c) Il sistema evolve con Hamiltoniana

$$H = \frac{1}{2m} p^2 + \frac{1}{2} m \omega^2 x^2 + b x S_z.$$

Se $b = m^\alpha \hbar^\beta \omega^\gamma$, si determinino gli esponenti α, β, γ con argomenti dimensionali. Se $\psi(t)$ è l'evoluto temporale di ψ , si calcoli $\langle \psi(t) | S_z | \psi(t) \rangle$.

d) Si esprimano le derivate temporali dei valori medi $\langle \psi(t) | x | \psi(t) \rangle$ e $\langle \psi(t) | p | \psi(t) \rangle$, in termini dei valori medi stessi. Si risolvano tali equazioni, determinando $\langle \psi(t) | x | \psi(t) \rangle$ e $\langle \psi(t) | p | \psi(t) \rangle$ al variare di t .