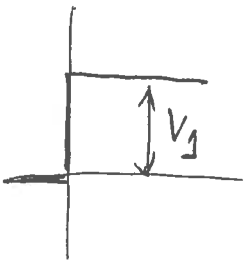
Esercizio 1

a) Il valore soglia è definito da

$$\frac{p_s^2}{2m_e} = V_1 \quad \text{per cui} \quad V_1 = \frac{(p_s c)^2}{2m_e c^2} = \frac{50^2}{2\cdot 500} = \frac{2500}{1000} = 2.5\,\text{ke}$$

b)



Risolvendo l'equazione di Schrödinger per $x<0$ e $x>0$ otteniamo

$$x<0 \quad \psi = A e^{ikx} + B e^{-ikx} \qquad k = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}$$

$$x>0 \quad \psi = C e^{i\lambda x} + D e^{-i\lambda x} \qquad \lambda = \sqrt{\frac{2m(E-V_1)}{\hbar^2}}$$

Dato che la sorgente è posta in $x=-\infty$ dobbiamo porre $D=0$. Imponendo la continuità di ψ e ψ' per $x=0$ otteniamo

$$\begin{cases} A+B=C \\ ik(A-B) = i\lambda C \end{cases} \qquad \begin{cases} A+B=C \\ A-B = \frac{\lambda}{k} C \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2A = \left(1+\frac{\lambda}{k}\right) C \\ 2B = \left(1-\frac{\lambda}{k}\right) C \end{cases} \qquad C = \frac{2}{1+\lambda/k} A \qquad B = \frac{1}{2}\left(1-\frac{\lambda}{k}\right) C = \frac{1-\lambda/k}{1+\lambda/k} A$$

Correnti $\quad J_{inc} = \frac{\hbar k}{m}|A|^2 \quad J_{rifl} = \frac{\hbar k}{m}|B|^2 \quad J_{trasm} = \frac{\hbar\lambda}{m}|C|^2$

$$T = \frac{J_{trasm}}{J_{inc}} = \frac{\lambda}{k}\frac{|C|^2}{|A|^2} = \frac{4\lambda/k}{(1+\lambda/k)^2}$$

$$T+R = 1 \quad \text{(check)}$$

$$R = \frac{J_{rifl}}{J_{inc}} = \frac{|B|^2}{|A|^2} = \frac{(1-\lambda/k)^2}{(1+\lambda/k)^2}$$

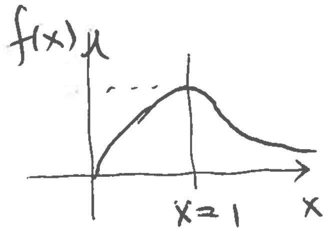
Grafico di T

Dato che $\frac{\lambda}{k} = \sqrt{1 - \frac{V_1}{E}}$, $E \geq V_1$, $\frac{\lambda}{k}$ varia tra

$\lambda/k = 0$ $[E = V_1]$ e $\lambda/k = 1$ $[E = \infty]$

Grafico di $f(x) = \frac{4x}{(1+x)^2}$ $\quad f(0) = 0 \quad \lim_{x \to \infty} f(x) = 0$

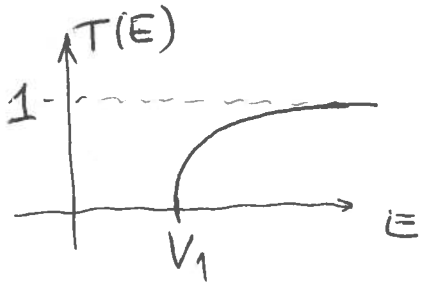
$$f'(x) = \frac{4}{(1+x)^2} - \frac{8x}{(1+x)^3} = \frac{4}{(1+x)^3}\left[1 + x - 2x\right] = \frac{4(1-x)}{(1+x)^3}$$

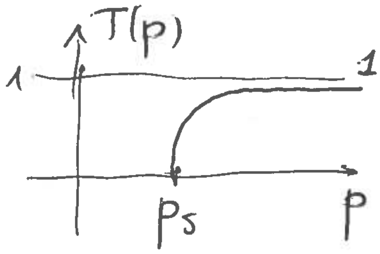


$f'(x) = 0 \Rightarrow x = 1 \quad f(1) = 1$

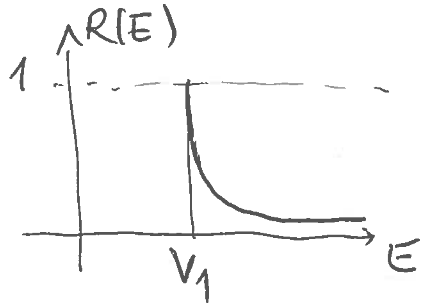
$f(x)$ è crescente per $x \in [0,1]$

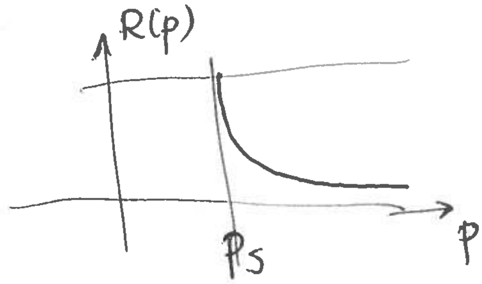
Come atteso T è funzione crescente di $\frac{\lambda}{k}$ e quindi di E che assume i valori $T = 0$ per $E = V_1$ e $T = 1$ per $E = \infty$. Per $E \approx V_1$ $\quad T \approx 4\frac{\lambda}{k} = 4\sqrt{1 - \frac{V_1}{E}} \approx 4\frac{\sqrt{E - V_1}}{\sqrt{V_1}}$

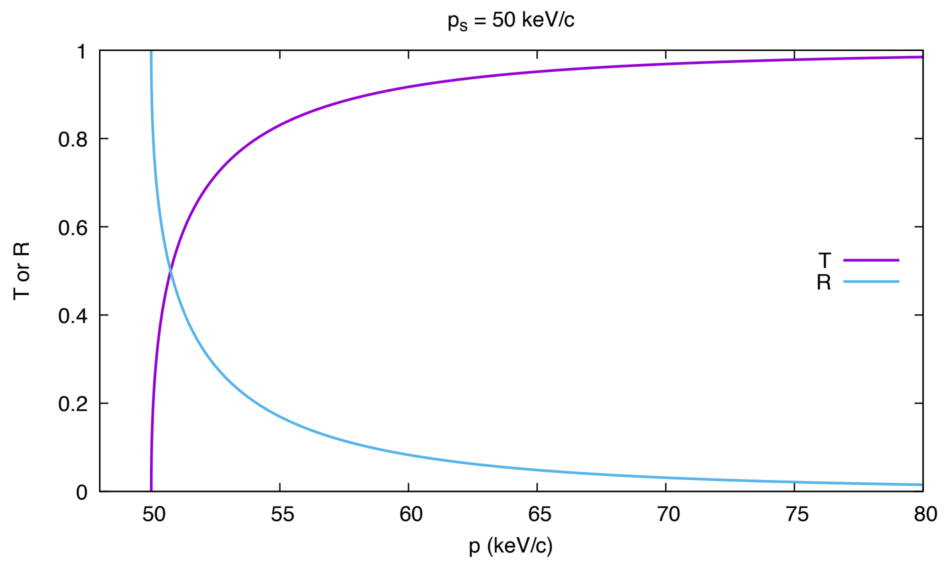




Dato che $R = 1 - T$

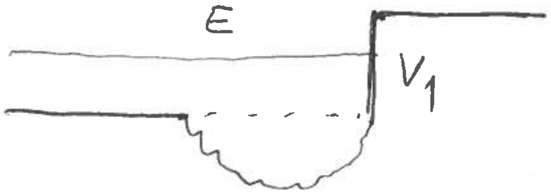






p_s = 50 keV/c
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
T or R
50
55
60
65
70
75
80
p (keV/c)
T
R

c)



Dato che $E<V_1$ non vi è trasmissione, $T=0$. $[J_{trasm}=0]$
Quindi $R=1-T=1$

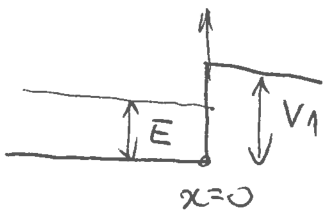
Per $x<-L$ $\psi = Ae^{ikx} + Be^{-ikx}$

$$= A\left(e^{ikx} + \frac{B}{A}e^{-ikx}\right)$$

In generale B/A è complesso con modulo 1
Infatti $R=\left|\frac{B}{A}\right|^2 = 1 \Longrightarrow \frac{B}{A} = e^{+i\varphi}$

$$\psi = A\left(e^{ikx} + e^{-ikx+i\varphi}\right)$$

Calcolo di φ per $V_{buca}(x)=0$



Per $E<V_1$

$x>0$ $\psi(x) = Ce^{-\lambda x}$ $\lambda = \sqrt{\frac{2m(V_1-E)}{\hbar^2}}$

$x<0$ $\psi(x) = Ae^{ikx} + Be^{-ikx}$ $k=\sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}$

La continuità di ψ e ψ' a $x=0$ impone

$$\begin{cases} A+B=C \\ ik(A-B) = -\lambda C \end{cases} \qquad \begin{cases} A+B=C \\ A-B = \frac{i\lambda}{k}C \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2A = \left(1+i\frac{\lambda}{k}\right)C \\ 2B = \left(1-i\frac{\lambda}{k}\right)C \end{cases} \qquad \frac{B}{A} = \frac{1-i\frac{\lambda}{k}}{1+i\frac{\lambda}{k}}$$

Definiamo a, α tali che

$$1 + i\frac{\lambda}{K} = a e^{i\alpha} \qquad a \in \mathbb{R}^+$$

$$\begin{cases} a^2 = 1 + \frac{\lambda^2}{K^2} \\ a\cos\alpha = 1 \\ a\sin\alpha = \frac{\lambda}{K} \end{cases} \qquad \begin{cases} a = \sqrt{1 + \frac{\lambda^2}{K^2}} \\ \tan\alpha = \frac{\lambda}{K} \end{cases} \qquad \alpha = \arctan\left(\frac{\lambda}{K}\right)$$

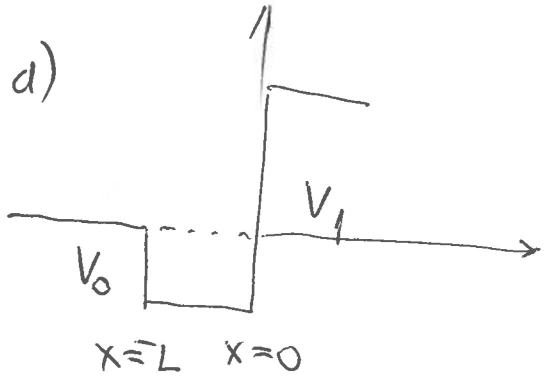
Quindi

$$\frac{B}{A} = \frac{a e^{-i\alpha}}{a e^{+i\alpha}} = e^{-2i\alpha}$$

Segue $\quad \varphi = -2\alpha = -2\arctan\frac{\lambda}{K}$

$$= -2\arctan\sqrt{\frac{V_1}{E} - 1}$$

d)



Soluzione generica per $E < V_1$ $(p < p_s)$

$$\begin{cases} x < -L & \psi = A e^{ikx} + B e^{-ikx} \\ -L < x < 0 & \psi = C e^{i\mu x} + D e^{-i\mu x} \\ x > 0 & \psi = F e^{-\lambda x} \end{cases}$$

$$k = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}$$

$$\mu = \sqrt{\frac{2m(E+V_0)}{\hbar^2}}$$

$$\lambda = \sqrt{\frac{2m(V_1 - E)}{\hbar^2}}$$

Per $x=0$ la continuità di ψ e ψ' impone

$$\begin{cases} C+D = F \\ i\mu(C-D) = -\lambda F \end{cases} \qquad \begin{cases} C+D = F \\ C-D = i\dfrac{\lambda}{\mu} F \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2C = \left(1+i\dfrac{\lambda}{\mu}\right) F \\ 2D = \left(1-\dfrac{i\lambda}{\mu}\right) F \end{cases} \qquad \frac{D}{C} = \frac{1-\frac{i\lambda}{\mu}}{1+\frac{i\lambda}{\mu}}$$

$$\frac{\lambda}{\mu} = \sqrt{\frac{V_1-E}{V_0+E}} = \sqrt{\frac{1-E/V_1}{\frac{V_0}{V_1}+\frac{E}{V_1}}} \longrightarrow +\infty$$

per $V_1 \gg (E, V_0)$ (ossia per $V_1 \to \infty$ a fisso E, V_0)

Quindi $D/C = -1$ nel limite

Quindi per $-L<x<0$ abbiamo

$$\psi = C(e^{i\mu x} - e^{-i\mu x})$$

con $\psi(0)=0$. Questo risultato corrisponde al caso $V_1=+\infty$ (barriera infinita) [Si poteva ovviamente dire immediatamente]

Per $x=-L$ la continuità di ψ e ψ' impone

$$\begin{cases} Ae^{-ikL} + Be^{ikL} = Ce^{-i\mu L} - Ce^{i\mu L} = -2iC\sin\mu L \\ ik(Ae^{-ikL} - Be^{ikL}) = i\mu C(e^{-i\mu L} + e^{i\mu L}) = 2i\mu C\cos\mu L \end{cases}$$

$$\begin{cases} Ae^{-ikL} + Be^{ikL} = -2iC\sin\mu L \\ Ae^{-ikL} - Be^{ikL} = 2\dfrac{\mu}{k} C\cos\mu L \end{cases}$$

$$2A e^{-ikL} = 2C\left(\frac{\mu}{k}\cos\mu L - i\sin\mu L\right)$$

$$2B e^{ikL} = -2C\left(\frac{\mu}{k}\cos\mu L + i\sin\mu L\right)$$

$$\frac{B}{A} = -e^{-2ikL}\,\frac{\frac{\mu}{k}\cos\mu L + i\sin\mu L}{\frac{\mu}{k}\cos\mu L - i\sin\mu L}$$

Definiamo, analogamente a quanto fatto alla domanda c), b, β tali che

$$\frac{\mu}{k}\cos\mu L + i\sin\mu L = b\, e^{i\beta} \qquad b \in \mathbb{R}^+$$

$$\begin{cases} b^2 = \frac{\mu^2}{k^2}\cos^2\mu L + \sin^2\mu L \\ b\cos\beta = \frac{\mu}{k}\cos\mu L \\ b\sin\beta = \sin\mu L \end{cases} \qquad \tan\beta = \frac{k}{\mu}\tan\mu L \qquad \beta = \arctan\left(\frac{k}{\mu}\tan\mu L\right)$$

Quindi $\frac{B}{A} = -e^{-2ikL}e^{2i\beta}$ $\qquad \varphi = \pi - 2kL + 2\beta$

$\uparrow$ [da $(-1) = e^{i\pi}$]

Nel limite $V_0 = 0$ abbiamo $\mu = k$, $\tan\beta = \tan\mu L = \tan kL$ e quindi $\beta = kL$, Quindi $\varphi = \pi$

Consideriamo ora la soluzione alla domanda c)

$$\varphi = -2\arctan\sqrt{\frac{V_1}{E} - 1}$$

Per $V_1/E \to +\infty$ $\quad \varphi = -2\cdot\frac{\pi}{2} = -\pi$, equivalente a $\varphi = \pi$

Il controllo si poteva pure fare direttamente sul rapporto B/A. Per $V_0 = 0$ la soluzione diventa

$$\frac{B}{A} = - e^{-2ikL} \frac{\mu/k \cos \mu L + i \sin \mu L}{\frac{\mu}{k} \cos \mu L - i \sin \mu L} = \quad (\mu = k)$$

$$= - e^{-2ikL} \frac{\cos kL + i \sin kL}{\cos kL - i \sin kL} =$$

$$= - e^{-2ikL} \frac{e^{ikL}}{e^{-ikL}} = -1$$

La soluzione al punto c) è

$$\frac{B}{A} = \frac{1 - i\lambda/k}{1 + i\lambda/k} = \quad \left(\frac{\lambda}{k} \to +\infty\right)$$

$$= -1 \qquad \text{come sopra}$$

Esercizio 2

a)

Definiamo $f_+(x) = a e^{-x^2/2\sigma^2} e^{ikx}$ con a tale da rendere $f_+(x)$ normalizzata

$$\int dx\, |f_+(x)|^2 = |a|^2 \int_{-\infty}^{+\infty} dx\, e^{-x^2/\sigma^2} = |a|^2 \sigma \sqrt{\pi} \Rightarrow a = \frac{1}{\sqrt{\sigma}\,\pi^{1/4}}$$

Quindi $$f_+(x) = \frac{1}{\sqrt{\sigma}\,\pi^{1/4}} e^{-x^2/2\sigma^2} e^{ikx}$$

$$f_-(x) = f_+(x)^* = \frac{1}{\sqrt{\sigma}\,\pi^{1/4}} e^{-x^2/2\sigma^2} e^{-ikx}$$

Quindi

$$\psi = A \sqrt{\sigma}\,\pi^{1/4} \left(f_+(x) \chi_+ + i\sqrt{2} f_-(x) \chi_- \right)$$

Quindi

$$\langle \psi | \psi \rangle = |A|^2 \sigma \sqrt{\pi} \left[\underbrace{\int dx\, |f_+(x)|^2}_{=1} + 2 \underbrace{\int dx\, |f_-(x)|^2}_{=1} \right]$$

$$= 3 |A|^2 \sigma \sqrt{\pi}$$

Quindi possiamo prendere $A = \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{1}{\sqrt{\sigma}\,\pi^{1/4}}$

Segue

$$\psi = \frac{1}{\sqrt{3}} f_+(x) \chi_+ + i \sqrt{\frac{2}{3}} f_-(x) \chi_-$$

Segue

$$\mathrm{Prob}(S_z = +\hbar) = \frac{1}{3}$$

$$\mathrm{Prob}(S_z = -\hbar) = \frac{2}{3}$$

b)

$$\langle\psi|x|\psi\rangle = \frac{1}{3}\int dx\, x\, |f_+(x)|^2 + \frac{2}{3}\int dx\, x\, |f_-(x)|^2 = 0$$

funzioni pari

$$\langle\psi|p|\psi\rangle = \frac{1}{3}\int dx\, f_+^*(x)\, p\, f_+(x) + \frac{2}{3}\int dx\, f_-^*(x)\, p\, f_-(x)$$

Ora

$$\int dx\, f_+^*(x)\, p\, f_+(x) = -i\hbar \int dx\, f_+^*(x)\, f_+'(x)$$

$$= -i\hbar \int dx\, f_+^*(x)\left(-\frac{2x}{\sigma^2} + ik\right) f_+(x)$$

$$= -i\hbar \int dx \left(-\frac{2x}{\sigma^2}|f_+(x)|^2 + ik|f_+(x)|^2\right)$$

$$= \frac{2i\hbar}{\sigma^2}\underbrace{\int dx\, x\, |f_+(x)|^2}_{=0} + \hbar k \underbrace{\int dx\, |f_+(x)|^2}_{=1} = \hbar k$$

Analogamente

$$\int dx\, f_-^*(x)\, p\, f_-(x) = -\hbar k$$

Quindi

$$\langle\psi|p|\psi\rangle = \frac{\hbar k}{3} - \frac{2}{3}\hbar k = -\frac{\hbar k}{3}$$

c)

Notiamo che $[S_z, H] = 0$. Quindi

$$\langle\psi(t)|S_z|\psi(t)\rangle = \langle\psi(0)|S_z|\psi(0)\rangle$$

$$= \frac{1}{3}\hbar + \frac{2}{3}(-\hbar) = -\frac{\hbar}{3}$$

d)

Ricordiamo per qualsiasi operatore A

$$\frac{d}{dt}\langle\psi(t)|A|\psi(t)\rangle$$

$$\frac{d}{dt}\langle\psi(0)|e^{iHt/\hbar}A\,e^{-iHt/\hbar}\psi(t)\rangle$$

$$= \frac{i}{\hbar}\langle\psi(t)|[H,A]|\psi(t)\rangle$$

$$[H,p] = \left[\frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2x^2 + bxS_z\,,\,p\right]$$

$$= \frac{1}{2}m\omega^2\,i\hbar\,2x + b\,i\hbar\,S_z$$

$$= i\hbar\left[m\omega^2x + bS_z\right]$$

Quindi

$$\frac{d}{dt}\langle\psi(t)|p|\psi(t)\rangle = -m\omega^2\langle\psi(t)|x|\psi(t)\rangle - b\langle\psi(t)|S_z|\psi(t)\rangle$$

$$= -m\omega^2\langle\psi(t)|x|\psi(t)\rangle + \frac{b\hbar}{3}$$

$$[H,x] = \left[\frac{p^2}{2m},x\right] = \frac{1}{2m}(-i\hbar)2p = -i\hbar\frac{p}{m}$$

Quindi

$$\frac{d}{dt}\langle\psi(t)|x|\psi(t)\rangle = \langle\psi(t)|\frac{p}{m}|\psi(t)\rangle$$

equazioni di Hamilton per la Hamiltoniana H

Per risolvere queste equazioni notiamo che

$$\frac{d^2}{dt^2}\langle\psi(t)|x|\psi(t)\rangle = \frac{1}{m}\frac{d}{dt}\langle\psi(t)|p|\psi(t)\rangle$$

$$= -\omega^2\langle\psi(t)|x|\psi(t)\rangle + \frac{b\hbar}{3m}$$

Si tratta di un oscillatore armonico con forza costante

Se definiamo $x(t) = \langle \psi(t) | x | \psi(t) \rangle$
$p(t) = \langle \psi(t) | p | \psi(t) \rangle$

abbiamo
$$\begin{cases} \ddot{x} = -\omega^2 x + \dfrac{b\hbar}{3m} \\ p = m\dot{x} \end{cases}$$

La soluzione corrisponde a oscillazioni armoniche attorno al punto di equilibrio $x_{eq} = \dfrac{b\hbar}{3m\omega^2}$

Quindi
$$\begin{cases} x(t) = \dfrac{b\hbar}{3m\omega^2} + C\cos\omega t + D\sin\omega t \\ p(t) = -mC\omega\sin\omega t + mD\omega\cos\omega t \end{cases}$$

Per calcolare C, D imponiamo

$$x(t=0) = 0 \quad \Longrightarrow \quad C = -\frac{b\hbar}{3m\omega^2}$$

$$p(t=0) = -\frac{\hbar k}{3} \quad \Longrightarrow \quad D = -\frac{\hbar k}{3m\omega}$$

Quindi
$$\begin{cases} x(t) = \dfrac{b\hbar}{3m\omega^2}(1-\cos\omega t) - \dfrac{\hbar k}{3m\omega}\sin\omega t \\ p(t) = \dfrac{b\hbar}{3\omega}\sin\omega t - \dfrac{\hbar k}{3}\cos\omega t \end{cases}$$

Analisi dimensionale [punto c)]

bxS_z deve avere le unità di una energia.

Quindi

$$[b][x][S_z] = [E]$$

$$[b][L][\hbar] = [E]$$

$$[m]^{\alpha}[\hbar]^{\beta}[\omega]^{\gamma}[L][\hbar] = [E]$$

$$[m]^{\alpha}[mL^2T^{-1}]^{\beta+1}[T]^{-\gamma}[L] = [mL^2T^{-2}]$$

Quindi

$$\begin{cases} \alpha+\beta+1 = 1 & [m] \\ 2(\beta+1)+1 = 2 & [L] \\ -(\beta+1)-\gamma = -2 & [T] \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} \alpha = -\beta = 1/2 \\ \beta = -1/2 \\ \gamma = -\beta+1 = 3/2 \end{cases}$$

$$b = m^{1/2}\hbar^{-1/2}\omega^{3/2}$$

METODO PIÙ VELOCE:

In un oscillatore armonico vi è una scala di lunghezza $\xi = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}$ e una scala di energia $\hbar\omega$

Quindi possiamo scrivere

$$b x S_z = (b\xi\hbar)\left(\frac{x}{\xi}\right)\left(\frac{S_z}{\hbar}\right)$$

$(b\xi\hbar)$ è una energia. Quindi $b\xi\hbar = \hbar\omega$

ossia $b = \frac{\omega}{\xi} = \omega\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} = m^{1/2}\hbar^{-1/2}\omega^{3/2}$

Si noti che

$$\frac{b\hbar}{3m\omega^2} = \frac{b}{3\omega}\left(\frac{\hbar}{m\omega}\right) = \frac{1}{3\omega}\,\frac{\omega}{\xi}\cdot\xi^2 = \frac{\xi}{3}$$

per cui

$$x(t) = \xi\left[\frac{1}{3}(1-\cos\omega t) - \frac{k\xi}{3}\sin\omega t\right] \quad (k\xi \text{ è adimensionale})$$

$$p(t) = m\omega\xi\left[\frac{1}{3}\sin\omega t - \frac{k\xi}{3}\cos\omega t\right] \qquad m\omega\xi = \frac{\hbar}{\xi}$$

Soluzione in rappresentazione di Heisenberg

E' anche possibile rispondere alla domanda d) utilizzando la rappresentazione di Heisenberg.
Se $x_H(t)$, $p_H(t)$, $\xi_{zH}(t)$ sono gli operatori abbiamo

$$\begin{cases} \dfrac{dx_H}{dt} = \dfrac{1}{m} p_H \\ \dfrac{dp_H}{dt} = -m\omega^2 x_H - b S_{zH} \\ \dfrac{dS_{zH}}{dt} = 0 \end{cases}$$

Ne segue $S_{zH}(t) = S_z$

$$\frac{d^2 x_H}{dt} = -\omega^2 x_H - \frac{b}{m} S_z$$

da cui $x_H = -\dfrac{b}{m\omega^2} S_z + C\cos\omega t + D\sin\omega t$

dove C e D sono operatori che vengono determinati imponendo

$$x = x_H(t=0) = -\frac{b}{m\omega^2} S_z + C \quad \Rightarrow \quad C = \left(x + \frac{b}{m\omega^2} S_z\right)$$

$$p = p_H(t=0) = m D\omega \qquad D = \frac{p}{m\omega}$$

Quindi

$$\begin{cases} x_H(t) = -\dfrac{b}{m\omega^2} S_z (1-\cos\omega t) + x\cos\omega t + \dfrac{p}{m\omega}\sin\omega t \\ p_H(t) = -\dfrac{b}{\omega} S_z \sin\omega t - m\omega x \sin\omega t + p\cos\omega t \end{cases}$$

Prendendo il valor medio si ottiene il risultato precedente