(a) Calcoliamo preliminarmente le matrici di S_+, S_-

Dato che $\langle l\, m+1 | S_+ | l\, m \rangle = \hbar \sqrt{l(l+1) - m(m+1)}$

abbiamo ($l = \frac{3}{2}$ nella formula precedente)

$$\langle \tfrac{3}{2}\ \tfrac{3}{2} | S_+ | \tfrac{3}{2}\ \tfrac{1}{2} \rangle = \hbar \sqrt{\frac{15}{4} - \frac{3}{4}} = \sqrt{3}\,\hbar$$

$$\langle \tfrac{3}{2}\ \tfrac{1}{2} | S_+ | \tfrac{3}{2}\ -\tfrac{1}{2} \rangle = \hbar \sqrt{\frac{15}{4} + \frac{1}{4}} = 2\hbar$$

$$\langle \tfrac{3}{2}\ -\tfrac{1}{2} | S_+ | \tfrac{3}{2}\ -\tfrac{3}{2} \rangle = \hbar \sqrt{\frac{15}{4} - \frac{3}{4}} = \sqrt{3}\,\hbar$$

Quindi

$$S_+ = \hbar \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad S_- = S_+^{\dagger} = \hbar \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{3} & 0 \end{pmatrix}$$

$$S_x = \frac{1}{2}(S_+ + S_-) = \hbar/2 \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{3} & 0 & 0 \\ \sqrt{3} & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & \sqrt{3} \\ 0 & 0 & \sqrt{3} & 0 \end{pmatrix}$$

$$S_y = -\frac{i}{2}(S_+ - S_-) = -\frac{i\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{3} & 0 & 0 \\ -\sqrt{3} & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & \sqrt{3} \\ 0 & 0 & -\sqrt{3} & 0 \end{pmatrix}$$

Autovalori $\pm \frac{3}{2}\hbar, \pm \frac{1}{2}\hbar$ [come S_z]

L'operatore S_z è diagonale

$$S_z = \hbar \begin{pmatrix} 3/2 & & & 0 \\ & 1/2 & & \\ & & -1/2 & \\ 0 & & & -3/2 \end{pmatrix}$$

(b)

Vogliamo $|\psi\rangle = (a, b, c, d)$ tale che $S_x|\psi\rangle = \frac{3}{2}\hbar|\psi\rangle$

$$\frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & \sqrt{3} & 0 & 0 \\ \sqrt{3} & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & \sqrt{3} \\ 0 & 0 & \sqrt{3} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \frac{3}{2}\hbar\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \sqrt{3}b = 3a \\ \sqrt{3}a + 2c = 3b \\ 2b + \sqrt{3}d = 3c \\ \sqrt{3}c = 3d \end{cases} \qquad b = \sqrt{3}a \quad c = \sqrt{3}d$$

$$\begin{cases} \sqrt{3}a + 2\sqrt{3}d = 3\sqrt{3}a \\ 2\sqrt{3}a + \sqrt{3}d = 3\sqrt{3}d \end{cases} \qquad d = a$$

Quindi il vettore è $(a, \sqrt{3}a, \sqrt{3}a, a) = |\psi\rangle$

$\langle\psi|\psi\rangle = 8|a|^2 \Rightarrow a = \frac{1}{2\sqrt{2}}$ (con opportuna scelta di fase)

$$|\psi\rangle = \frac{1}{2\sqrt{2}}\left|\frac{3}{2}\right\rangle_z + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{2}}\left|\frac{1}{2}\right\rangle_z + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{2}}\left|-\frac{1}{2}\right\rangle_z + \frac{1}{2\sqrt{2}}\left|-\frac{3}{2}\right\rangle_z$$

(c) $\hat{S}_z(t)$ non dipende da t se e solo se $[S_z, H] = 0$

Calcoliamo

$$[S_z, S_x^2] = S_x[S_z, S_x] + [S_z, S_x]S_x$$
$$= i\hbar(S_x S_y + S_y S_x)$$

$$[S_z, S_y^2] = S_y[S_z, S_y] + [S_z, S_y]S_y$$
$$= -i\hbar S_y S_x - i\hbar S_x S_y = -i\hbar(S_x S_y + S_y S_x)$$

Quindi

$$[S_z, H] = \frac{\omega}{\hbar}(i\hbar)(S_x S_y + S_y S_x)(1 - a)$$

~~Quindi~~ Verifichiamo che $S_x S_y + S_y S_x \neq 0$ [questa combinazione è nulla solo per lo spin 1/2]

$$S_x S_y = -\frac{i\hbar^2}{4}\begin{pmatrix} 0 & \sqrt{3} & 0 & 0 \\ \sqrt{3} & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & \sqrt{3} \\ 0 & 0 & \sqrt{3} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & \sqrt{3} & 0 & 0 \\ -\sqrt{3} & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & \sqrt{3} \\ 0 & 0 & -\sqrt{3} & 0 \end{pmatrix}$$

$$= -\frac{i\hbar^2}{4}\begin{pmatrix} -3 & 0 & 2\sqrt{3} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2\sqrt{3} \\ -2\sqrt{3} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2\sqrt{3} & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$S_y S_x = (S_x S_y)^{\dagger} = \frac{i\hbar^2}{4}\begin{pmatrix} -3 & 0 & -2\sqrt{3} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2\sqrt{3} \\ 2\sqrt{3} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2\sqrt{3} & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$S_x S_y + S_y S_x = \frac{i\hbar^2}{4}\begin{pmatrix} 0 & 0 & -4\sqrt{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4\sqrt{3} \\ 4\sqrt{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4\sqrt{3} & 4\sqrt{3} & 0 \end{pmatrix}$$

Dato che $S_x S_y + S_y S_x \neq 0$, necessariamente $a = 1$

d) Per $a = 1$ $\quad H = \frac{\omega}{\hbar}\left(S^2 - S_z^2\right) = \frac{15}{4}\hbar\omega - \frac{\omega}{\hbar} S_z^2$

Livelli

S.F.: $\quad S_z = \pm\frac{3}{2}\hbar \qquad E = \frac{15}{4}\hbar\omega - \frac{9}{4}\hbar\omega = \frac{3}{2}\hbar\omega$ $\quad$ deg 2

I ecc $\quad S_z = \pm\frac{\hbar}{2} \qquad E = \frac{15}{4}\hbar\omega - \frac{1}{4}\hbar\omega = \frac{7}{2}\hbar\omega$ $\quad$ deg. 2

e)

$$|\psi(t)\rangle = \frac{1}{2\sqrt{2}} e^{-iE_0 t/\hbar}\left(|\tfrac{3}{2}\rangle_z + |-\tfrac{3}{2}\rangle_z\right) + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{2}}\, e^{-iE_1 t/\hbar}\left(|\tfrac{1}{2}\rangle_z + |-\tfrac{1}{2}\rangle_z\right)$$

$$E_0 = \frac{3}{2}\hbar\omega \qquad E_1 = \frac{7}{2}\hbar\omega \qquad E_1 - E_0 = 2\hbar\omega$$

(a meno di fase) $\frac{1}{2\sqrt{2}}\left(|\frac{3}{2}\rangle_z + |-\frac{3}{2}\rangle_z\right) + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{2}}\, e^{-2i\omega t}\left(|\frac{1}{2}\rangle_z + |-\frac{1}{2}\rangle_z\right)$

La probabilità richiesta è

$$P = \left|{}_x\langle \tfrac{3}{2}|\psi(t)\rangle\right|^2$$

$$= \left|\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{3}{8}e^{-2i\omega t} + \frac{3}{8}e^{-2i\omega t}\right|^2$$

$$= \frac{1}{16}\left|1 + 3e^{-2i\omega t}\right|^2 = \frac{1}{16}(1 + 9 + 2\cos 2\omega t)$$

$$= \frac{1}{16}(10 + 2\cos 2\omega t) = \frac{1}{8}(5 + 3\cos \omega t)$$

Come atteso $P = 1$ per $t = 0$.

f) In assenza del principio di Pauli gli stati sono

i) $|\pm\frac{3}{2}\rangle_1 |\pm\frac{3}{2}\rangle_2$ (tutte le combinazioni di segni)

$E = \frac{3}{2}\hbar\omega + \frac{3}{2}\hbar\omega = 3\hbar\omega$ [4 STATI]

ii) $|\pm\frac{3}{2}\rangle_1 |\pm\frac{1}{2}\rangle_2$ e $|\pm\frac{1}{2}\rangle_1 |\pm\frac{3}{2}\rangle_2$ (tutte le combinazioni)

$E = \frac{3}{2}\hbar\omega + \frac{7}{2}\hbar\omega = 5\hbar\omega$ [8 STATI]

iii) $|\pm\frac{1}{2}\rangle_1 |\pm\frac{1}{2}\rangle_2$ (tutte le combinazioni)

$E = \frac{7}{2}\hbar\omega + \frac{7}{2}\hbar\omega = 7\hbar\omega$ [4 STATI]

Se la parte spaziale è simmetrica la parte di spin è antisimmetrica

stati 1) un solo stato antisimmetrico

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\left|\tfrac{3}{2}\right\rangle_1\left|-\tfrac{3}{2}\right\rangle_2-\left|-\tfrac{3}{2}\right\rangle_1\left|\tfrac{3}{2}\right\rangle_2\right)$$

stati 2) 4 stati antisimmetrici

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\left|\tfrac{3}{2}\right\rangle_1\left|\tfrac{1}{2}\right\rangle_2-\left|\tfrac{1}{2}\right\rangle_1\left|\tfrac{3}{2}\right\rangle_2\right)$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\left|\tfrac{3}{2}\right\rangle_1\left|-\tfrac{1}{2}\right\rangle_2-\left|-\tfrac{1}{2}\right\rangle_1\left|\tfrac{3}{2}\right\rangle_2\right)$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\left|-\tfrac{3}{2}\right\rangle_1\left|\tfrac{1}{2}\right\rangle_2-\left|\tfrac{1}{2}\right\rangle_1\left|-\tfrac{3}{2}\right\rangle_2\right)$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\left|-\tfrac{3}{2}\right\rangle_1\left|-\tfrac{1}{2}\right\rangle_2-\left|-\tfrac{1}{2}\right\rangle_1\left|-\tfrac{3}{2}\right\rangle_2\right)$$

stati 3) 1 stato antisimmetrico

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\left|\tfrac{1}{2}\right\rangle_1\left|-\tfrac{1}{2}\right\rangle_2-\left|-\tfrac{1}{2}\right\rangle_1\left|\tfrac{1}{2}\right\rangle_2\right.$$

SPETTRO: $\begin{cases} E=3\hbar\omega & \text{non degenere} \\ E=5\hbar\omega & \text{deg. } 4 \\ E=7\hbar\omega & \text{non degenere} \end{cases}$

ADDENDO

Alla domanda c) abbiamo verificato esplicitamente che $A=S_xS_y+S_yS_x$ non sia l'operatore nullo

Più formalmente basta notare che $A=\frac{1}{2i}(S_+^2-S_-^2)$

Se lo spin è ≥ 1 è immediato verificare $A\neq 0$

Per lo spin 1/2 $S_+^2=S_-^2=0$ e $A=0$ come atteso

D'altra parte per lo spin 1/2 $S_x^2=S_y^2=\frac{\hbar^2}{4}\mathbb{I}$ e

$$H=\frac{\omega}{\hbar}(1+a)\frac{\hbar^2}{4}\mathbb{I}$$ commuta con ogni operatore per ogni a

Alla domanda c) si poteva pure ragionare nel seguente modo, riscrivendo

$$H = \frac{\omega}{\hbar}\left(S_x^2 + a\, S_y^2 \right) \qquad S_x^2 = S^2 - S_z^2 - S_y^2$$

$$= \frac{\omega}{\hbar}\left[S^2 - S_z^2 + (a-1)\, S_y^2 \right]$$

Quindi

$$[H, S_z] = \frac{\omega}{\hbar}(a-1)\left[S_z, S_y^2 \right]$$

Si noti che $[S_z, S_y] \neq 0$ non implica necessariamente $[S_z, S_y^2] \neq 0$

Infatti se $[A, B] \neq 0$ si può benissimo avere $[A, B^2] = 0$ oppure $[A^2, B] = 0$

Esempio $A = I$ (inversione spaziale)

$B = \hat{x}$

Vale $[I, \hat{x}] \neq 0$ ma $[I, \hat{x}^2] = [I^2, \hat{x}] = 0$

Per interpretare i dati sullo spettro di H_0 notiamo che nel CM

$$H_0 = \frac{p^2}{2\mu} + V(r)$$

che è la Hamiltoniana per un problema con potenziale centrale. Ragioniamo innanzitutto in ASSENZA DI SPIN Ricordiamo i risultati generali. Le energie dei livelli sono $\{\mathcal{E}_{p,\ell}\}$ $p: 0,1\dots$ ed ℓ è il valore del momento angolare. Vale

i) $\mathcal{E}_{0,\ell} < \mathcal{E}_{1,\ell} < \mathcal{E}_{2,\ell} \dots$
Ad ogni energia $\mathcal{E}_{p,\ell}$ è associata una UNICA funzione radiale $R_{p,\ell}(r)$. Quindi vi è una base $R_{p,\ell} Y_\ell^m$: $(2\ell+1)$ stati

ii) $\mathcal{E}_{0,0} < \mathcal{E}_{0,1} < \mathcal{E}_{0,2} < \mathcal{E}_{0,3}$
[diseguagliante strette, mai "=", dato che il contributo centrifugo è strettamente positivo]

IN ASSENZA DI SPIN

$E_0 = \mathcal{E}_{0,0}$ livello con $L=0$ NON DEGENERE

per il I eccitato 3 possibilità

$$\begin{cases} \mathcal{E}_{1,0} & \text{se } \mathcal{E}_{1,0} < \mathcal{E}_{0,1} \quad \text{livello con } L=0 \text{ non deg.} \\ \mathcal{E}_{0,1} & \text{se } \mathcal{E}_{1,0} > \mathcal{E}_{0,1} \quad \text{livello con } L=1 \text{ deg } 3 \\ \mathcal{E}_{1,0} = \mathcal{E}_{0,1} & \quad \text{livello con } L=0,1 \text{ deg. } 4 \end{cases}$$

[degenerazione accidentale come nel caso Coulombiano]

Consideriamo ora lo spin. Dato che masse sono diverse le particelle sono distinguibili. Quindi vi sono sempre 4 STATI DI SPIN POSSIBILI

Quindi

STATO FOND: $E = \mathcal{E}_{0,0}$ $L=0$ deg. $1 \times 4 = 4$

<u>I ecc</u>:

tre possibilità

$$E_1 = \begin{cases} \mathcal{E}_{1,0} & L=0 \quad \text{deg.} \quad 1\times 4 = 4 \\ \mathcal{E}_{0,1} & L=1 \quad \text{deg} \quad 3 \times 4 = 12 \\ \mathcal{E}_{1,0} = \mathcal{E}_{0,1} & L=0 \ \& \ L=1 \quad \text{deg} \quad 4 * 4 = 16 \end{cases}$$

Sapendo che il I eccitato ha degenerazione 12 concludiamo che il I eccitato e' uno stato con $L=1$

SPETTRO DI H_0

E_0 $\underline{\ L=0\ }$ deg 4

E_1 $\underline{\ L=1\ }$ deg. 12

(a)

$$H_1 = \frac{\omega}{\hbar}\left(J^2 + S^2 - S_1^2 - S_2^2\right) = \frac{\omega}{\hbar}\left(J^2 + S^2\right) - \frac{3}{2}\hbar\omega$$

dove $\bar{S} = \bar{S}_1 + \bar{S}_2$.

- stati di energia E_0 per H_0

Vi sono 4 stati con parte spaziale $L=0$ e parte di spin χ_{spin}. Una base è

$$\overset{n\ \ell\ m}{|0\,0\,0\rangle}\overset{S\ S_z}{|0\,0\rangle}, \quad |0\,0\,0\rangle|1\ S_z\rangle$$

Dato che $L=0$, $J=1,0$. Quindi il livello si separa in

- $L=0$ $S=0$ $J=0$ $E = E_0 - \frac{3}{2}\hbar\omega$ deg. 1
- $L=0$ $S=1$ $J=1$ $E = E_0 + 4\hbar\omega - \frac{3}{2}\hbar\omega$ deg. 3

$$= E_0 + \frac{5}{2}\hbar\omega$$

- stati con energia E_1 per H_0

Una base è (per H_0)

$$|1\,1\,m\rangle|0\,0\rangle \qquad L=1 \quad S=0 \longrightarrow J=1$$

$$|1\,1\,m\rangle|1\,s_z\rangle \qquad L=1 \quad S=1 \begin{cases} J=2 \\ J=1 \\ J=0 \end{cases}$$

Quindi le energie sono

$L=1 \quad S=0 \quad J=1 \qquad E = E_1 + \frac{\omega}{\hbar}\hbar^2(2) - \frac{3}{2}\hbar\omega = E_1 + \frac{\hbar\omega}{2}$

$L=1 \quad S=1 \quad J=2 \qquad E = E_1 + \hbar\omega\, 8 - \frac{3}{2}\hbar\omega = E_1 + \frac{13}{2}\hbar\omega$

$L=1 \quad S=1 \quad J=1 \qquad E = E_1 + \hbar\omega\, 4 - \frac{3}{2}\hbar\omega = E_1 + \frac{5}{2}\hbar\omega$

$L=1 \quad S=1 \quad J=0 \qquad E = E_1 + \hbar\omega\, 2 - \frac{3}{2}\hbar\omega = E_1 + \frac{\hbar\omega}{2}$

Quindi (spettro): $n\ \ell\ s\ J\ J_z$

$E = E_1 + \frac{\hbar\omega}{2} \qquad \begin{cases} |1\,2\,1\,0\,1\,J_z\rangle & \text{deg } 3 \\ |1\,2\,1\,1\,0\,0\rangle & \text{deg } 1 \end{cases} \Big\}\ \text{deg. } 4$

$E = E_1 + \frac{5}{2}\hbar\omega \qquad |2\,1\,1\,1\,J_z\rangle \qquad$ deg. 3

$E = E_1 + \frac{13}{2}\hbar\omega \qquad |2\,1\,1\,2\,J_z\rangle \qquad$ deg. 5

b)

Gli autostati di H_0 (energia E_0) e gli autostati di H corrispondenti ai due livelli più bassi sono tutti della forma $\psi(r)\chi_{spin}$ con $\psi(r)$ uguale ~~pe~~ per tutti gli stati. Inoltre $\psi(r)$ dipende solo da $|r|$ dato che è uno stato con $\ell=0$. Quindi

$$\langle\psi_0|r^2|\psi_0\rangle = \int d^3r\, |\psi(r)|^2 r^2$$

$$\langle \text{autost di } H | \begin{matrix} x^2 \\ y^2 \\ z^2 \end{matrix} | \text{autostati di } H\rangle = \int d^3r\, |\psi(r)|^2 \begin{pmatrix} x^2 \\ y^2 \\ z^2 \end{pmatrix}$$

Dato che $\psi(r)$ non dipende dagli angoli segue $\langle x^2\rangle = \langle y^2\rangle = \langle z^2\rangle$. Tenuto conto che $\langle r^2\rangle = \langle x^2+y^2+z^2\rangle = a_0^2 \longrightarrow$

$$\langle \text{autost } H \,|\, x^2 \,|\, \text{autost } H\rangle = \frac{1}{3}a_0^2$$
$$\langle \text{autost } H \,|\, y^2 \,|\, \text{autost } H\rangle = \frac{1}{3}a_0^2$$
$$\langle \text{autost } H \,|\, z^2 \,|\, \text{autost } H\rangle = \frac{1}{3}a_0^2$$

Si poteva ottenere lo stesso risultato IN MODO <u>MOLTO PIÙ LABORIOSO</u> facendo il calcolo esplicito.

Se $\int d^3r\, |\psi(r)|^2 r^2 = a_0^2 \Rightarrow \int_0^\infty r^2 dr\, |\psi(r)|^2 r^2 = \frac{a_0^2}{4\pi}$

Quindi

$$\int d^3r\, |\psi(r)|^2 x^2 = \int r^2 dr\, |\psi(r)|^2 r^2 \int d\Omega \sin^2\theta \cos^2\phi$$
$$= \frac{a_0^2}{4\pi}\int_{-1}^{1} d\cos\theta\,(1-\cos^2\theta)\int_0^{2\pi} d\phi\, \frac{1+\cos 2\phi}{2}$$
$$= \frac{a_0^2}{4\pi}\cdot 2\int_0^1 dx\,(1-x^2)\cdot\frac{2\pi}{2}$$
$$= \frac{a_0^2}{2}\left(1-\frac{1}{3}\right) = \frac{a_0^2}{3}$$

$$\int d^3r\, |\psi(r)|^2 y^2 = \int r^2 dr\, |\psi(r)|^2 r^2 \int d\Omega \sin^2\theta \sin^2\phi =$$
$$(\text{come sopra}) = \frac{a_0^2}{3}$$

$$\int d^3r\, |\psi(r)|^2 z^2 = \int r^2 dr\, |\psi(r)|^2 r^2 \int d\Omega \cos^2\theta$$
$$= \frac{a_0^2}{4\pi}\, 2\pi \int d\cos\theta \cos^2\theta = \frac{a_0^2}{2}\cdot\frac{2}{3} = \frac{a_0^2}{3}$$

(c)

La condizione $E < E_2 - 3\hbar\omega$ implica che devono essere considerati solo gli stati dei primi 5 livelli di H che sono combinazioni lineari degli autostati di H_0 (primi due livelli). Dato che le informazioni sugli stati riguardano L_z, S_z, $J_z = L_z + S_z$ è comodo vedere lo stato cercato come combinazione degli stati

$$\begin{array}{l} \quad\; n\;\; l\;\; m \quad\; s\;\; S_z \\ \left\{ \begin{array}{l} |0\;0\;0\rangle|0\;0\rangle \\ |0\;0\;0\;|1\;S_z\rangle \\ |1\;1\;m\rangle|0\;0\rangle \\ |1\;1\;m\rangle|1\;S_z\rangle \end{array} \right. \end{array}$$

Dato che $L_z = 0$ non è mai osservato, abbiamo

$m = \pm 1$ e $l = 1$

Dato che $S_z = 0$ non è mai osservato, abbiamo

$S_z = \pm 1$ e $S = 1$

Dato che una misura di J_z non fornisce mai $\pm 2\hbar$ deve valere $m + S_z \neq 2$ e $m + S_z \neq -2$.

Vi sono quindi due soli stati possibili

$$|1\;1\;1\rangle|1\;-1\rangle \quad \text{e} \quad |1\;1\;-1\rangle|1\;1\rangle$$

Quindi gli stati possibili sono

$$|\psi\rangle = \alpha|1\;1\;1\rangle|1\;-1\rangle + \beta|1\;1\;-1\rangle|1\;1\rangle$$

con $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$ affinché $\langle\psi|\psi\rangle = 1$

~~Calcoliamo il~~ Esprimiamo $|\psi\rangle$ nella base

$|n\ l\ s\ j\ j_z\rangle_J$

Tabelle CG 1×1:

$$|1\,1\,1\rangle|1\,-1\rangle = \sqrt{\tfrac{1}{6}}\,|1\,1\,1\,2\,0\rangle + \sqrt{\tfrac{1}{2}}\,|1\,1\,1\,1\,0\rangle + \sqrt{\tfrac{1}{3}}\,|1\,1\,1\,0\,0\rangle$$

$$|1\,1\,-1\rangle|1\,1\rangle = \sqrt{\tfrac{1}{6}}\,|1\,1\,1\,2\,0\rangle - \sqrt{\tfrac{1}{2}}\,|1\,1\,1\,1\,0\rangle + \sqrt{\tfrac{1}{3}}\,|1\,1\,1\,0\,0\rangle$$

Quindi

$$|\psi\rangle = \sqrt{\tfrac{1}{6}}(\alpha+\beta)|1\,1\,1\,2\,0\rangle + \sqrt{\tfrac{1}{2}}(\alpha-\beta)|1\,1\,1\,1\,0\rangle + \sqrt{\tfrac{1}{3}}(\alpha+\beta)|1\,1\,1\,0\,0\rangle$$

$$\begin{aligned}
\langle\psi|H|\psi\rangle &= \frac{1}{6}|\alpha+\beta|^2\left(E_1+\frac{13}{2}\hbar\omega\right) + \frac{1}{2}|\alpha-\beta|^2\left(E_1+\frac{5}{2}\hbar\omega\right) + \frac{1}{3}|\alpha+\beta|^2\left(E_1+\frac{\hbar\omega}{2}\right) \\
&= \frac{1}{6}|\alpha+\beta|^2\left(3E_1+\frac{15}{2}\hbar\omega\right) + \frac{1}{2}\left(E_1+\frac{5}{2}\hbar\omega\right)|\alpha-\beta|^2 \\
&= \left(|\alpha+\beta|^2+|\alpha-\beta|^2\right)\frac{1}{2}\left(E_1+\frac{5}{2}\hbar\omega\right) \\
&= \left(|\alpha|^2+|\beta|^2+\alpha^*\beta+\alpha\beta^*+|\alpha|^2+|\beta|^2-\alpha^*\beta-\alpha\beta^*\right)\frac{1}{2}\left(E_1+\frac{5\hbar\omega}{2}\right) \\
&= \left(|\alpha|^2+|\beta|^2\right)\left(E_1+\frac{5}{2}\hbar\omega\right) = E_1+\frac{5}{2}\hbar\omega
\end{aligned}$$

d)

$$\langle\psi|L_x^2 S_x^2|\psi\rangle = \left\| L_x S_x|\psi\rangle \right\|^2$$

Se

$$|\psi\rangle = \alpha|1\,1\,1\rangle|1\,-1\rangle + \beta|1\,1\,-1\rangle|1\,1\rangle$$

calcoliamo

$$L_+|\psi\rangle = \beta\hbar\sqrt{2}\,|1\,1\,0\rangle|1\,1\rangle$$

$$L_-|\psi\rangle = \alpha\hbar\sqrt{2}\,|1\,1\,0\rangle|1\,-1\rangle$$

Quindi

$$L_x|\psi\rangle = \frac{1}{2}(L_+ + L_-)|\psi\rangle = \hbar\frac{\sqrt{2}}{2}|1\,1\,0\rangle\left(\alpha|1\,-1\rangle + \beta|1\,1\rangle\right)$$

Se $\chi = \alpha|1\,-1\rangle + \beta|1\,1\rangle$ è la parte di spin

$$S_x\chi = \frac{S_+}{2}\chi + \frac{S_-}{2}\chi$$

$$= \frac{\hbar}{2}\sqrt{2}\,\alpha|1\,0\rangle + \frac{\hbar}{2}\sqrt{2}\,\beta|1\,0\rangle$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\hbar(\alpha+\beta)|1\,0\rangle$$

Quindi

$$L_x S_x|\psi\rangle = \hbar\frac{\sqrt{2}}{2}|1\,1\,0\rangle \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}\hbar(\alpha+\beta)|1\,0\rangle$$

$$= \frac{\hbar^2}{2}(\alpha+\beta)|1\,1\,0\rangle|1\,0\rangle$$

Quindi

$$\langle\psi|L_x^2 S_x^2|\psi\rangle = \frac{\hbar^4}{4}|\alpha+\beta|^2$$

Il valore minimo si ottiene per $\alpha+\beta=0$, $\alpha=-\beta$

Dato che $|\alpha|^2+|\beta|^2=1$ segue $\alpha=-\beta=\frac{1}{\sqrt{2}}$ a meno di fase comune

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\overset{n\,\ell\,m}{|1\,1\,1\rangle}\overset{s\,s_z}{|1\,-1\rangle} - |1\,1\,-1\rangle|1\,1\rangle\right]$$