Esame di Meccanica Quantistica 28/01/2025

Esercizio 1. La dinamica di una particella di spin 3/2 è generata dalla Hamiltoniana

$$\hat{H} = \frac{\omega}{\hbar}\left(\hat{S}_x^2 + a\hat{S}_y^2\right), \tag{1}$$

dove $\hat{S}_i$ sono le componenti cartesiane dell'operatore di spin $\hat{\mathbf{S}}$ e $\hat{S}^2$ il suo modulo quadro. Il coefficiente a è reale positivo.

a) Ricavare l'espressione matriciale degli operatori $\hat{S}_x, \hat{S}_y$ ed $\hat{S}_z$ nella rappresentazione degli autoket di $\hat{S}_z$. Quali sono gli autovalori degli operatori $\hat{S}_x$ e $\hat{S}_y$?

b) Sia $|\psi\rangle$ lo stato tale che $\hat{S}_x|\psi\rangle = \frac{3}{2}\hbar|\psi\rangle$. Si determini l'espressione di questo stato in termini degli autoket di $\hat{S}_z$.

c) Si determini a in maniera tale che l'operatore $\hat{S}_z(t)$ in rappresentazione di Heisenberg sia indipendente dal tempo. Si usi tale valore in tutte le domande successive.

d) Si determinino gli autovalori di H specificando la degenerazione e una base di autoket per ogni livello.

e) Al tempo $t = 0$ il sistema viene preparato nello stato $|\psi\rangle$ definito precedentemente. Quale è la probabilità, al generico tempo t, di ottenere il risultato $+\frac{3}{2}\hbar$ come risultato di una misura di $\hat{S}_x$?

f) Si considerino ora due particelle identiche di spin 3/2 non interagenti. La Hamiltoniana di singola particella è quella specificata sopra, quindi la Hamiltoniana di spin del sistema di due particelle è data da

$$\hat{H}_2 = \hat{H} \otimes \hat{1} + \hat{1} \otimes \hat{H} \tag{2}$$

Assumendo che la funzione d'onda degli stati sia il prodotto di una funzione d'onda spaziale simmetrica per scambio e di uno spinore per le due particelle, si determinino gli autovalori di $\hat{H}_2$ ed una base per gli autoket di spin possibili.

Esercizio 2. Si considerino due particelle di spin 1/2 e di masse m_1 e $m_2 = 2m_1$ che interagiscono con Hamiltoniana

$$H = H_0 + H_1, \quad H_0 = \frac{p_1^2}{2m_1} + \frac{p_2^2}{2m_2} + V(r), \quad H_1 = \frac{\omega}{\hbar}(J^2 + 2\boldsymbol{S}_1 \cdot \boldsymbol{S}_2),$$

dove $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1$, $r = |\boldsymbol{r}|$, $\boldsymbol{S}_1$ e $\boldsymbol{S}_2$ sono gli spin delle due particelle, $\boldsymbol{J} = \boldsymbol{L} + \boldsymbol{S}$, $\boldsymbol{L}$ è il momento angolare orbitale, $\boldsymbol{S} = \boldsymbol{S}_1 + \boldsymbol{S}_2$. Si consideri il problema nel sistema del centro di massa.
Lo spettro della Hamiltoniana H_0 nel sistema del centro di massa è supposto essere noto: le energie sono date da $E_0 < E_1 < E_2 < \ldots$; il livello fondamentale ha degenerazione 4, il primo livello eccitato ha degenerazione 12; entrambi i livelli sono discreti.

a) Assumendo $\hbar\omega \ll E_i - E_{i-1}$ per tutti gli $i \geq 1$, si calcolino le energie e le degenerazioni dei primi 5 livelli di H.

b) Se $|\psi_0\rangle$ è uno autostato di H_0 con energia E_0, vale $\langle\psi_0|r^2|\psi_0\rangle = a_0^2$, dove a_0 è supposto noto. Si calcolino i valori medi di x^2, y^2, z^2, su tutti gli stati corrispondenti al livello fondamentale ed al primo livello eccitato di H. **(continua nella pagina seguente)**

c) Si determinino tutti gli stati tali che: (i) una misura di energia fornisce sempre un risultato inferiore a $E_2 - 3\hbar\omega$; (ii) in una misura di L_z non viene mai osservato $L_z = 0$; (iii) in una misura di S_z non viene mai osservato $S_z = 0$; (iv) in una misura di J_z non vengono mai osservati $\pm 2\hbar$. Si calcoli il valor medio di H su tutti tali stati.

d) Tra tutti gli stati $|\psi\rangle$ individuati al punto c), si determinino quelli per cui $\langle\psi|L_x^2 S_x^2|\psi\rangle$ assume il valore minimo possibile.