ANALISI VETTORIALE AA 2024/25 (LT 30046) - E MONTEFUSCO - 20250127

Nome: Cognome:

ex.1	
ex.2	
ex.3	
ex.4	
tot.	

AVVERTENZE:
La valutazione degli esercizi aperti dipende dalla solidità dei ragionamenti svolti e dalla chiarezza dell'esposizione, come anche dalla correttezza dei passaggi matematici e del risultato finale.

ESERCIZIO 1 (punti: 2+3+3). *Data la funzione* $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ *di legge* $f(x_1, x_2, x_3) = x_1 x_3$
i. si spieghi perché tale funzione è differenziabile in tutto lo spazio,
ii. si verifichi che $(0, 0, 0)$ *è un punto critico di* f *e se ne determini la natura,*
iii. si trovi il massimo assoluto della funzione f *ristretta su* $K = \{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \leq 1\}$.

ESERCIZIO 2 (punti: 3+3+2). *Data la forma differenziale*

$$\omega = \frac{x_1}{x_1^2 + x_2^2} dx_1 + \frac{x_2}{x_1^2 + x_2^2} dx_2 + dx_3 \in C^1(A) \qquad \textit{con} \quad A = \{x_1^2 + x_2^2 \neq 0\} \subseteq \mathbb{R}^3$$

i. si provi che ω *è chiusa,*
ii. si provi che ω *è esatta,*
iii. si calcoli l'integrale di ω *lungo l'elica regolare di parametrizzazione* $(\cos(t), \sin(t), 2t)$, *con* $t \in [0, 2\pi]$.

ESERCIZIO 3 (punti: 2+3+3). *Dato* $E_{r,R} = \{r \leq x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \leq R\} \subseteq \mathbb{R}^3$ *(con* $0 < r < R$*), e il campo vettoriale*

$$F(x_1, x_2, x_3) = \frac{(x_1, x_2, x_3)}{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} \qquad x \neq 0$$

i. si spieghi perché $E_{r,R}$ *è limitato e misurabile secondo Lebesgue,*
ii. si calcoli il volume $m_3(E_{r,R})$,
iii. si calcoli il flusso, attraverso la superficie $\partial E_{r,R}$, *del campo vettoriale* F.

ESERCIZIO 4 (punti: 2+2+2+2). *Dato il problema di Cauchy*

$$\begin{cases} w'(x) = \dfrac{x^2}{1 - w(x)} \\ w(0) = 0 \end{cases}$$

si risponda ai seguenti quesiti esattamente nell'ordine in cui sono proposti
i. si spieghi perché il problema possiede un'unica soluzione locale w,
ii. si calcoli il polinomio di Taylor, di grado 2 con centro $x_0 = 0$, *della soluzione* w,
iii. si spieghi perché la soluzione è monotona,
iv. si ricavi l'espressione esplicita di w *e il suo dominio massimale.*

ESERCIZIO 1 (punti: 2+3+3). *Data la funzione* $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ *di legge* $f(x_1, x_2, x_3) = x_1x_3$
i. si spieghi perché tale funzione è differenziabile in tutto lo spazio,
ii. si verifichi che $(0, 0, 0)$ *è un punto critico di* f *e se ne determini la natura,*
iii. si trovi il massimo assoluto della funzione f *ristretta su* $K = \{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \leq 1\}$.

SVOLGIMENTO. i. La funzione $f \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$, essendo un polinomio, in particolare possiede le seguenti derivate parziali

$$\partial_1 f(x) = x_3 \qquad \partial_2 f(x) = 0 \qquad \partial_3 f(x) = x_1$$

che sono polinomi, quindi funzioni regolari I(in particolare continue) su tutto lo spazio, quindi il teorema del differenziale totale ci permette di concludere che f è differenziabile in $\mathbb{R}^3$.
ii. Poiché abbiamo osservato che

$$\nabla f(x_1, x_2, x_3) = (x_3, 0, x_1) \qquad \text{per ogni } x \in \mathbb{R}^3$$

è immediato concludere che i punti critici di f, cioè le soluzioni del sistema $\nabla f(x) = 0$, sono tutti i punti del tipo $P(t) = (0, t, 0)$, per ogni $t \in \mathbb{R}$, cioè l'asse x_2, quindi $(0, 0, 0)$ è un punto critico. Poiché i punti critici non sono isolati sicuramente la matrice hessiana sarà una matrice semidefinita, come si ottene con alcuni calcoli

$$Hf(x) = \left(\partial_{ij} f(x)\right)_{i,j=1,2,3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{per ogni } x \in \mathbb{R}^3$$

Il polinomio caratteristico della matrice è

$$p(s) = s^3 - s = s(s-1)(s+1)$$

e poiché l'hessiana ha un autovalore positivo e uno negativo possiamo concludere che O è un punto di sella. D'altronde è anche sufficiente notare che $f(e^{-k}, 0, -e^{-k}) < 0 < f(e^{-k}, 0, e^{-k})$ e che $(e^{-k}, 0, \pm e^{-k}) \longrightarrow (0, 0, 0)$ per poter concludere che O è un punto di sella.
iii. Tutti i punti critici liberi della funzione sono punti di sella, per quanto osservato in ii., quindi il massimo assoluto che stiamo cercando deve essere assunto su ∂K, visto che il teorema di Weierstrass (si noti che f è regolare e $K = \overline{B(0, 1)}$ compatto) ne garantisce l'esistenza. Per individuare i punti di massimo assoluto utilizziamo i moltiplicatori di Lagrange, quindi studiamo

$$L(x_1, x_2, x_3, c) = x_1x_3 + c\left(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 1\right) \qquad (x_1, x_2, x_3, c) \in \mathbb{R}^4$$

Cercando i punti stazionari di L otteniamo il sistema

$$\nabla L(x, c) = \left(x_3 + 2cx_1, 2cx_2, x_1 + 2cx_3, x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 1\right) = (0, 0, 0, 0)$$

Dalla seconda equazione abbiamo che o $c = 0$ o $x_2 = 0$.
Nel primo caso segue subito che $x_1 = x_3 = 0$ e, dall'equazione di ∂K, che $x_2 = \pm 1$, questi punti non possono essere di massimo assoluto visto che $f(0, \pm 1, 0) = 0$. Se $x_2 = 0$ abbiamo il seguente sistema per le rimanenti variabili

$$\begin{cases} x_3 + 2cx_1 = 0 \\ x_1 + 2cx_3 = 0 \\ x_1^2 + x_3^2 = 1 \end{cases} \quad \text{da cui} \quad \begin{cases} x_3 = -2cx_1 \\ x_1(1 - 4c^2) = 0 \\ x_1^2(1 + 4c^2) = 1 \end{cases} \quad \text{cioè} \quad \begin{cases} x_1(1 - 4c^2) = 0 \\ x_1 = \pm \dfrac{1}{[1 + 4c^2]^{1/2}} \\ x_3 = \mp \dfrac{2c}{[1 + 4c^2]^{1/2}} \end{cases}$$

La seconda equazioni implica che $x_1 \neq 0$, quindi la prima equazione produce che $c = \pm 1/2$, da cui ricaviamo i seguenti quattro punti critici vincolati

$$A(1/\sqrt{2}, 0, 1/\sqrt{2}) \qquad B(1/\sqrt{2}, 0, -1/\sqrt{2}) \qquad C(-1/\sqrt{2}, 0, 1/\sqrt{2}) \qquad D(-1/\sqrt{2}, 0, -1/\sqrt{2})$$

osservando che $f(A) = f(D) = 1/2$ e che $f(B) = f(C) = -1/2$ possiamo affermare che $\max_K(f) = 1/2$. □

ESERCIZIO 2 (punti: 3+3+2). *Data la forma differenziale*

$$\omega = \frac{x_1}{x_1^2 + x_2^2} dx_1 + \frac{x_2}{x_1^2 + x_2^2} dx_2 + dx_3 \in C^1(A) \qquad \textit{con} \quad A = \{x_1^2 + x_2^2 \neq 0\} \subseteq \mathbb{R}^3$$

i. si provi che ω è chiusa,
ii. si provi che ω è esatta,
iii. si calcoli l'integrale di ω lungo l'elica regolare di parametrizzazione $(\cos(t), \sin(t), 2t)$, *con* $t \in [0, 2\pi]$.

SVOLGIMENTO. i. La chiusura della forma differenziale è equivalente ad affermare che il campo vettoriale

$$G(x) = (G_1(x), G_2(x), G_3(x)) = \left(\frac{x_1}{x_1^2 + x_2^2}, \frac{x_2}{x_1^2 + x_2^2}, 1 \right)$$

è irrotazionale in A. In ogni caso poiché valgono le seguenti identità

$$\partial_2 G_1(x) = \partial_1 G_2(x) = -\frac{2x_1x_2}{(x_1^2 + x_2^2)^2} \qquad \partial_3 G_1(x) = \partial_1 G_3(x) = 0 \qquad \partial_3 G_2(x) = \partial_2 G_3(x) = 0$$

segue che ω è chiusa.
ii. Notamo subito che A è connesso, ma non è semplicemente connesso, essendo lo spazio tridimensionale privato di una retta (l'asse x_3), quindi non è possibile ricorrere al teorema di Poincaré, però possiamo scrivere che

$$\int G_1(x)dx_1 = \int \frac{x_1}{x_1^2 + x_2^2} dx_1 = \frac{1}{2} \ln\left(x_1^2 + x_2^2\right) + c(x_2, x_3)$$
$$\int G_2(x)dx_2 = \int \frac{x_2}{x_1^2 + x_2^2} dx_1 = \frac{1}{2} \ln\left(x_1^2 + x_2^2\right) + c(x_1, x_3)$$
$$\int G_3(x)dx_3 = \int dx_3 = x_3 + c(x_1, x_2)$$

da cui otteniamo le primitive

$$U(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{2} \ln\left(x_1^2 + x_2^2\right) + x_3 + c \qquad c \in \mathbb{R}$$

che mostrano che ω è esatta.
iii. Il calcolo dell'integrale richiesto è molto rapido visto che vale

$$\int_\gamma \omega = U(\cos(2\pi), \sin(2\pi), 4\pi) - U(\cos(0), \sin(0), 0) = 4\pi$$

in alternativa è possibile risolvere direttamente l'integrale

$$\int_\gamma \omega = \int_0^{2\pi} \left[\sum_{i=1}^{3} G_i(\phi(t))\phi_i'(t) \right] dt$$
$$= \int_0^{2\pi} \left[\frac{\cos(t)}{\cos^2(t) + \sin^2(t)} \cdot (-\sin(t)) + \frac{\sin(t)}{\cos^2(t) + \sin^2(t)} \cdot (\cos(t)) + 2 \right] dt = 4\pi$$

dove abbiamo indicato con γ il sostegno dell'elica e con ϕ la parametrizzazione della curva. □

ESERCIZIO 3 (punti: 2+3+3). *Dato* $E_{r,R} = \{r \le x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \le R\} \subseteq \mathbb{R}^3$ *(con* $0 < r < R$*), e il campo vettoriale*

$$F(x_1, x_2, x_3) = \frac{(x_1, x_2, x_3)}{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} \qquad x \neq 0$$

i. si spieghi perché $E_{r,R}$ *è limitato e misurabile secondo Lebesgue,*
ii. si calcoli il volume $m_3(E_{r,R})$,
iii. si calcoli il flusso, attraverso la superficie $\partial E_{r,R}$*, del campo vettoriale* F.

SVOLGIMENTO. i. Osserviamo che

$$E_{r,R} = \{r \le x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \le R\} = \overline{B\left(0, \sqrt{R}\right)} \setminus B\left(0, \sqrt{r}\right)$$

quindi $E_{r,R} \subseteq B\left(0, \sqrt{R} + 1\right)$, il che mostra che l'insieme è limitato, inoltre l'insieme è anche chiuso e, di conseguenza, misurabile secondo Lebesgue perché compatto.

ii. La precedente osservazione e il fatto che vale $m(E \setminus F) = m(E) - m(F)$, se $F \subseteq E$ sono due insiemi misurabili secondo Lebesgue, ci permette di scrivere che

$$m_3\left(E_{r,R}\right) = m_3\left(B\left(0, \sqrt{R}\right)\right) - m_3\left(B\left(0, \sqrt{r}\right)\right) = \frac{4}{3}\pi\left(R^{3/2} - r^{3/2}\right)$$

dove abbiamo utilizzato la nota espressione del volume della palla tridimensionale. Chiaramente è anche possibile eseguire il calcolo per integrazione nel seguente modo

$$\begin{aligned} m_3\left(E_{r,R}\right) &= \int_{E_{r,R}} dx = \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\int_{\sqrt{r}}^{\sqrt{R}} \rho^2 \sin(\phi) d\rho d\theta d\phi = \int_{\sqrt{r}}^{\sqrt{R}} \rho^2 d\rho \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} \sin(\phi) d\phi \\ &= \left[\frac{1}{3}\rho^3\right]_{\sqrt{r}}^{\sqrt{R}} \left[\theta\right]_0^{2\pi} \left[-\cos(\phi)\right]_0^{\pi} = \frac{4}{3}\pi\left[R^{3/2} - r^{3/2}\right] \end{aligned}$$

passando dalle variabili euclidee alle coordinate sferiche, infatti il termine $\rho^2 \sin(\phi)$ è il valore assoluto del determinante della matrice jacobiana del cambio di variabili.

iii. Come scritto in i., l'insieme $E_{r,R}$ è una corona sferica, questo significa che il suo bordo è una superficie regolare (a tratti) composta di due sfere disgiunte e concentriche, e poiché l'insieme ha chiusura contenuta nell'aperto $A = \{x \neq 0\}$ e $F \in C^1(A, \mathbb{R}^3)$, possiamo applicare il teorema della divergenza per il calcolo del flusso. Quindi abbiamo che

$$\begin{aligned} \Phi_{\partial E_{r,R}}(F) &= \int_{\partial E_{r,R}} F(x) \cdot n(x) d\sigma = \int_{E_{r,R}} \nabla \cdot F(x) dx = \int_{E_{r,R}} \frac{1}{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} dx_1 dx_2 dx_3 \\ &= \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\int_{\sqrt{r}}^{\sqrt{R}} \frac{1}{\rho^2}\rho^2 \sin(\phi) d\rho d\theta d\phi = 4\pi\left[R^{1/2} - r^{1/2}\right] \end{aligned}$$

sfruttando, come in ii., le coordinate sferiche, in quanto vale

$$\begin{aligned} \nabla \cdot F(x) &= \partial_1\left[\frac{x_1}{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}\right] + \partial_2\left[\frac{x_2}{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}\right] + \partial_3\left[\frac{x_3}{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}\right] \\ &= \frac{x_2^2 + x_3^2 - x_1^2}{\left(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2\right)^2} + \frac{x_1^2 + x_3^2 - x_2^2}{\left(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2\right)^2} + \frac{x_1^2 + x_2^2 - x_3^2}{\left(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2\right)^2} = \frac{1}{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} \end{aligned}$$

□

ESERCIZIO 4 (punti: 2+2+2+2). *Dato il problema di Cauchy*

$$\begin{cases} w'(x) = \dfrac{x^2}{1 - w(x)} \\ w(0) = 0 \end{cases}$$

si risponda ai seguenti quesiti esattamente nell'ordine in cui sono proposti
i. si spieghi perché il problema possiede un'unica soluzione locale w,
ii. si calcoli il polinomio di Taylor, di grado 2 *con centro* $x_0 = 0$*, della soluzione* w,
iii. si spieghi perché la soluzione è monotona,
iv. si ricavi l'espressione esplicita di w *e il suo dominio massimale.*

SVOLGIMENTO. i. il problema di Cauchy che stiamo studiando coinvolge un'equazione del primo ordine in forma normale con $f(x, s) = x^2/(1 - s)$, notiamo subito che $f \in C^{\infty}(A) \subseteq C^1(A)$ con $A = \{s \neq 1\} \subseteq \mathbb{R}^2$, quindi la funzione f è continua nell'aperto A e localmente lipschitziana nella seconda variabile, visto che ha derivate continue, in ultimo $(0, 0) \in A$. L'osservazione appena fatta ci permette di affermare che il teorema di Picard e Lindelöff si applica e prova l'esistenza e l'unicità della soluzione del sistema.

ii. Ricordiamo l'espressione del polinomio di Taylor di ordine 2 centrato nel punto x_0

$$T_{2,w}(x, x_0) = w(x_0) + w'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2}w''(x_0)(x - x_0)^2$$

Dalla precedente formula deduciamo la necessità di calcolare i valori di $w(0)$, $w'(0)$ e $w''(0)$ per rispondere alla rchiesta del testo, d'altronde il problema di Cauchy contiene le seguenti informazioni

$$w(0) = 0 \qquad w'(0) = \frac{0^2}{1 - w(0)} = 0$$

e deriviamo l'equazione per ricavare il valore della derivata seconda in $x_0 = 0$

$$w''(x) = \frac{2x(1-w(x)) - x^2(-w'(x))}{(1-w(x))^2} \qquad \text{da cui} \qquad w''(0) = 0$$

quindi il polinomio desiderato ha la seguente espressione $T_{2,w}(x, x_0) = 0$.
iii. Notiamo che la funzione f non è definita per il suo secondo argomento s = 1, questo implica che il grafico delle soluzioni dell'equazione differenziale deve appartenere solo ad una delle due componenti connesse in cui A è diviso, cioè $A = A_- \dot{\cup} A_+$, dove vale $A_\pm = \{s \gtrless 1\} \subseteq \mathbb{R}^2$. In particolare questo significa che $w(x) < 1$ per ogni $x \in \mathrm{dom}(w)$, quindi otteniamo che

$$w'(x) = \frac{x^2}{1-w(x)} \geq 0 \qquad \text{per ogni } x \in \mathrm{dom}(w)$$

il che significa che la soluzione è monotona non decrescente.
iv. Per ricavare l'espressione della legge di w seguiamo la strategia risolutiva delle equazioni differenziali a variabili separabili, quindi (spostata l'incognita w a primo membro) abbiamo che

$$(1-w(x))w'(x) = x^2 \qquad \text{e passando alle primitive} \qquad w(x) - \frac{1}{2}w^2(x) = \frac{1}{3}x^3 + C = \frac{1}{3}x^3$$

dove, ponendo x = 0, si ricava che C = 0. La relazione ottenuta può essere riscritta come segue

$$w^2(x) - 2w(x) + \frac{2}{3}x^3 = 0 \qquad \text{da cui} \qquad w_{1,2}(x) = 1 \mp \sqrt{1 - \frac{2}{3}x^3}$$

si noti che la formula risolutiva del'equazione di secondo grado contiene le espressioni delle due funzioni che si ottengono restringendo opportunamente la funzione quadratica che coinvolge w in modo da poter scrivere la funzione inversa. Abbiamo osservato che la nostra soluzione produce risposte in A_-, quindi la soluzione che stiamo cercando è

$$w(x) = 1 - \sqrt{1 - \frac{2}{3}x^3}$$

il segno + fornisce la soluzione del problema di Cauchy relativo al dato iniziale w(0) = 2, il cui grafico è contenuto in A_+. □
