

Cognome e nome N. matricola

ISTRUZIONI

1. **Svolgere 5 dei seguenti 6 esercizi**, motivando le risposte in modo chiaro ed esauriente. Nel caso di dubbi sul testo, chiedere chiarimenti al docente. Non è consentito l'uso di dispositivi elettronici.
2. Al termine del tempo disponibile, riconsegnare l'elaborato **scritto in modo chiaro e leggibile** insieme a questo foglio. Scrivere nome e cognome **su ogni foglio** che si consegna.

1. Studiare la convergenza puntuale e uniforme della serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{n!} (x^2 - 1)^{2n},$$

e calcolarne la somma.

2. Dire per quali valori del parametro reale α il campo vettoriale piano

$$\mathbf{F}(x, y) = \left(\frac{2xy}{y - \alpha}, 2 - \frac{4x^2}{(y - \alpha)^2} \right)$$

è conservativo nell'aperto $y > \alpha$, e, per tale valore di α , calcolarne il lavoro compiuto lungo la curva di equazione polare $\rho = \frac{\theta}{\pi}$, $0 \leq \theta \leq \pi$.

3. Trovare e classificare i punti critici di

$$f(x, y) = x^3 y - 3xy - y^2.$$

Successivamente calcolarne estremo superiore e inferiore in \mathbf{R}^2 .

4. Calcolare la posizione del baricentro della regione piana

$$D = \left\{ (x, y) \in \mathbf{R}^2 : 4 \leq x^2 + y^2 \leq 4x \right\}.$$

5. Mostrare che in un opportuno intorno del punto $(0, 1)$ le soluzioni dell'equazione

$$x \operatorname{sen}(\pi y) + \frac{1+x}{y} = e^x$$

sono i punti del grafico di una funzione $y = f(x)$ oppure $x = f(y)$, e scrivere il polinomio di Taylor del secondo ordine della f con punto iniziale $x_0 = 0$ oppure $y_0 = 1$.

6. Dire se esistono i seguenti limiti

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^4 + y^4}{x^2 - y^2}, \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^4 + y^4}{x^2 + |y|}.$$

Cognome e nome N. matricola

ISTRUZIONI

1. **Svolgere 5 dei seguenti 6 esercizi**, motivando le risposte in modo chiaro ed esauriente. Nel caso di dubbi sul testo, chiedere chiarimenti al docente. Non è consentito l'uso di dispositivi elettronici.
2. Al termine del tempo disponibile, riconsegnare l'elaborato **scritto in modo chiaro e leggibile** insieme a questo foglio. Scrivere nome e cognome **su ogni foglio** che si consegna.

1. Studiare la convergenza puntuale e uniforme della serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+2}{n!} (x-1)^{2n},$$

e calcolarne la somma.

2. Dire per quali valori del parametro reale α il campo vettoriale piano

$$\mathbf{F}(x, y) = \left(-\frac{y^2}{(x-\alpha)^2} + 1, \frac{xy}{x-\alpha} \right)$$

è conservativo nell'aperto $x > \alpha$, e, per tale valore di α , calcolarne il lavoro compiuto lungo la curva di equazione polare $\rho = \frac{\theta}{\pi}$, $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$.

3. Trovare e classificare i punti critici di

$$f(x, y) = 4xy^3 - 3xy + 2x^2.$$

Successivamente calcolarne estremo superiore e inferiore in \mathbf{R}^2 .

4. Calcolare la posizione del baricentro della regione piana

$$D = \left\{ (x, y) \in \mathbf{R}^2 : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 2y \right\}.$$

5. Mostrare che in un opportuno intorno del punto $(1, 0)$ le soluzioni dell'equazione

$$y \cos(\pi x) - e^y + \frac{1+y}{x^2} = 0$$

sono i punti del grafico di una funzione $y = f(x)$ oppure $x = f(y)$, e scrivere il polinomio di Taylor del secondo ordine della f con punto iniziale $x_0 = 1$ oppure $y_0 = 0$.

6. Dire se esistono i seguenti limiti

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^4 + y^4}{x - y^2}, \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^4 + y^4}{|x| + y^2}.$$