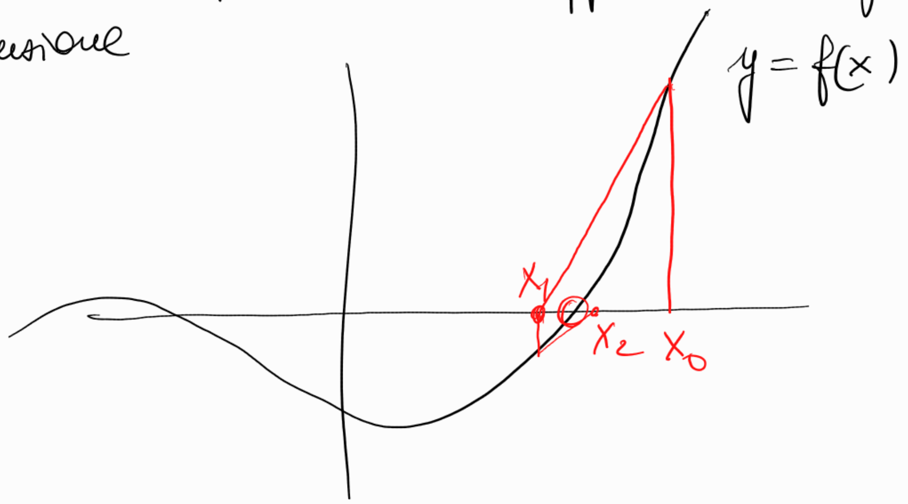
Algoritmo di Newton per il calcolo approssimato degli zeri di una funzione

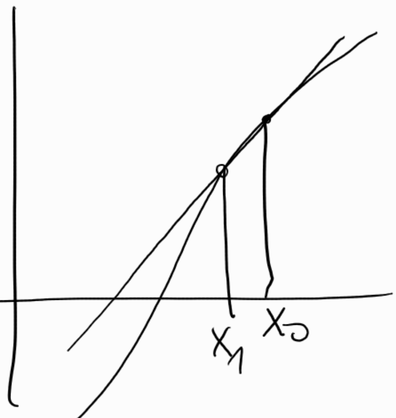


$$\begin{cases} x_0 \text{ assegnato} \\ x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)} \end{cases}$$

Sotto ipotesi di regolarità di f, se parto da x_0 abbastanza vicino a $\bar{x}$ (zero della soluzione), allora l'algoritmo di Newton fornisce una successione $\{x_n\}$ che converge molto rapidamente a $\bar{x}$.

<u>OSS</u> A volte non è possibile calcolare la derivata di f e quindi si approssima la derivata con un rapporto incrementale.

$$\begin{cases} x_0, x_1 \text{ assegnati} \\ x_{n+2} = x_{n+1} - \dfrac{f(x_{n+1})}{\left(\dfrac{f(x_{n+1}) - f(x_n)}{x_{n+1} - x_n}\right)} = \end{cases}$$



$$= \frac{f(x_{n+1})x_n - f(x_n)x_{n+1}}{f(x_{n+1}) - f(x_n)}$$

metodo della secante.

Sotto opportune ipotesi anche questo metodo converge a $\bar{x}$, anche se un po' più lentamente.

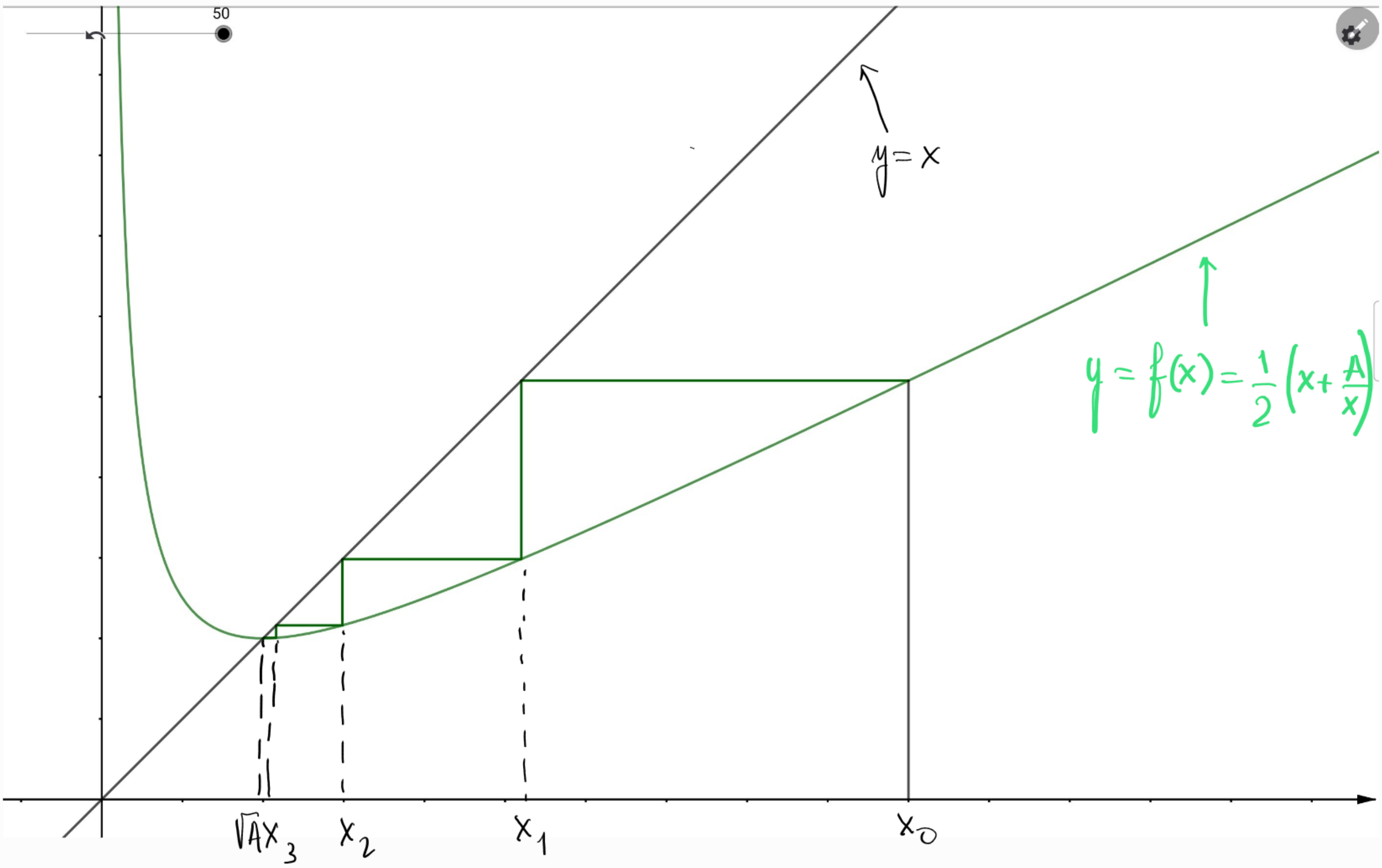
In generale, quando considero successioni iterative

$$\begin{cases} x_0 \text{ assegnato} \\ x_{n+1} = f(x_n) \end{cases}$$

possono succedere cose molto diverse.

Questo grafico mostra ciò che succede per l'algoritmo di Erone:

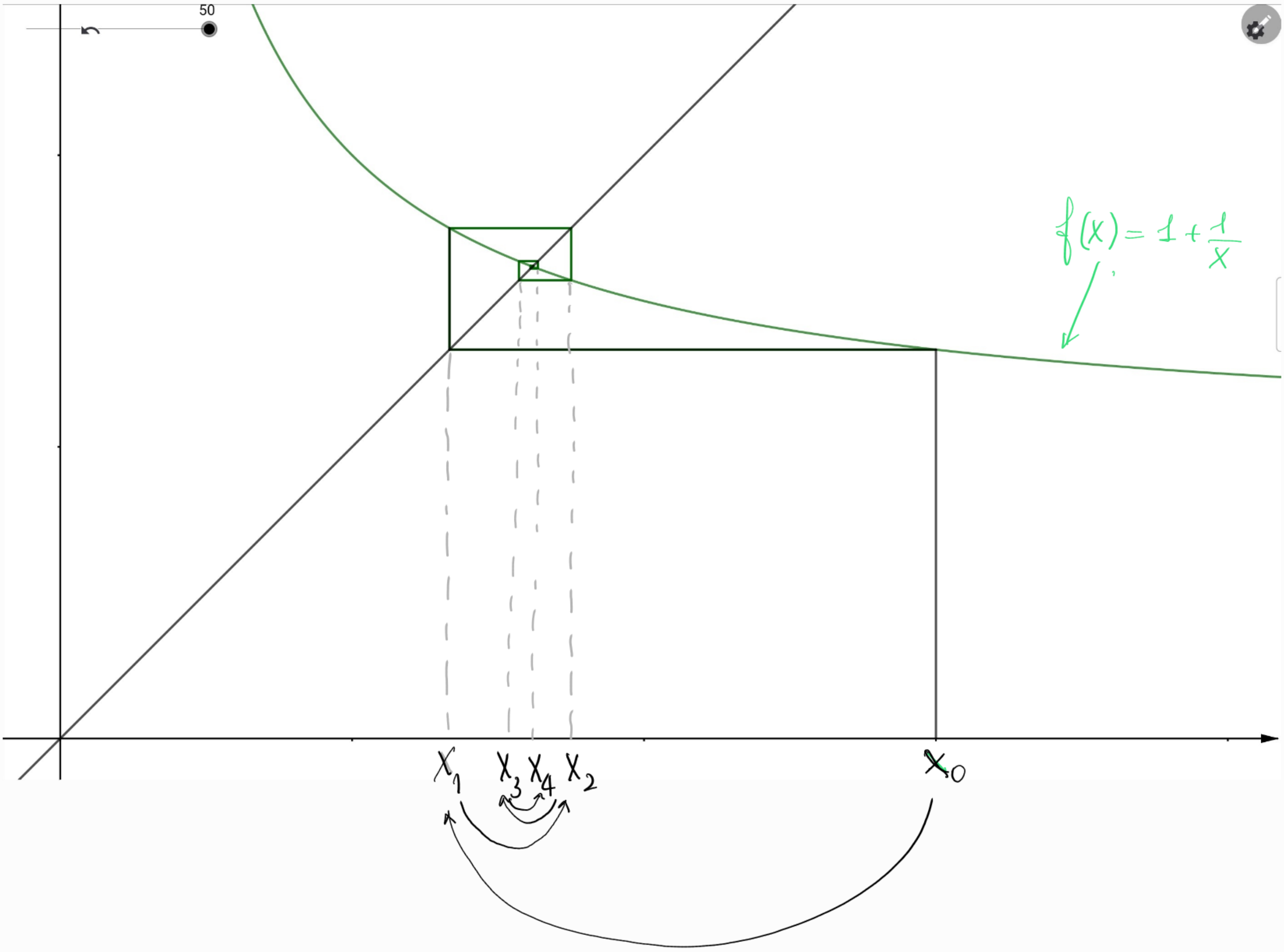
$$f(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{A}{x}\right), \quad x_{n+1} = f(x_n)$$



Come si vede, la convergenza è monotòna e rapidissima.

Nel prossimo caso $f(x) = 1 + \frac{1}{x}$,

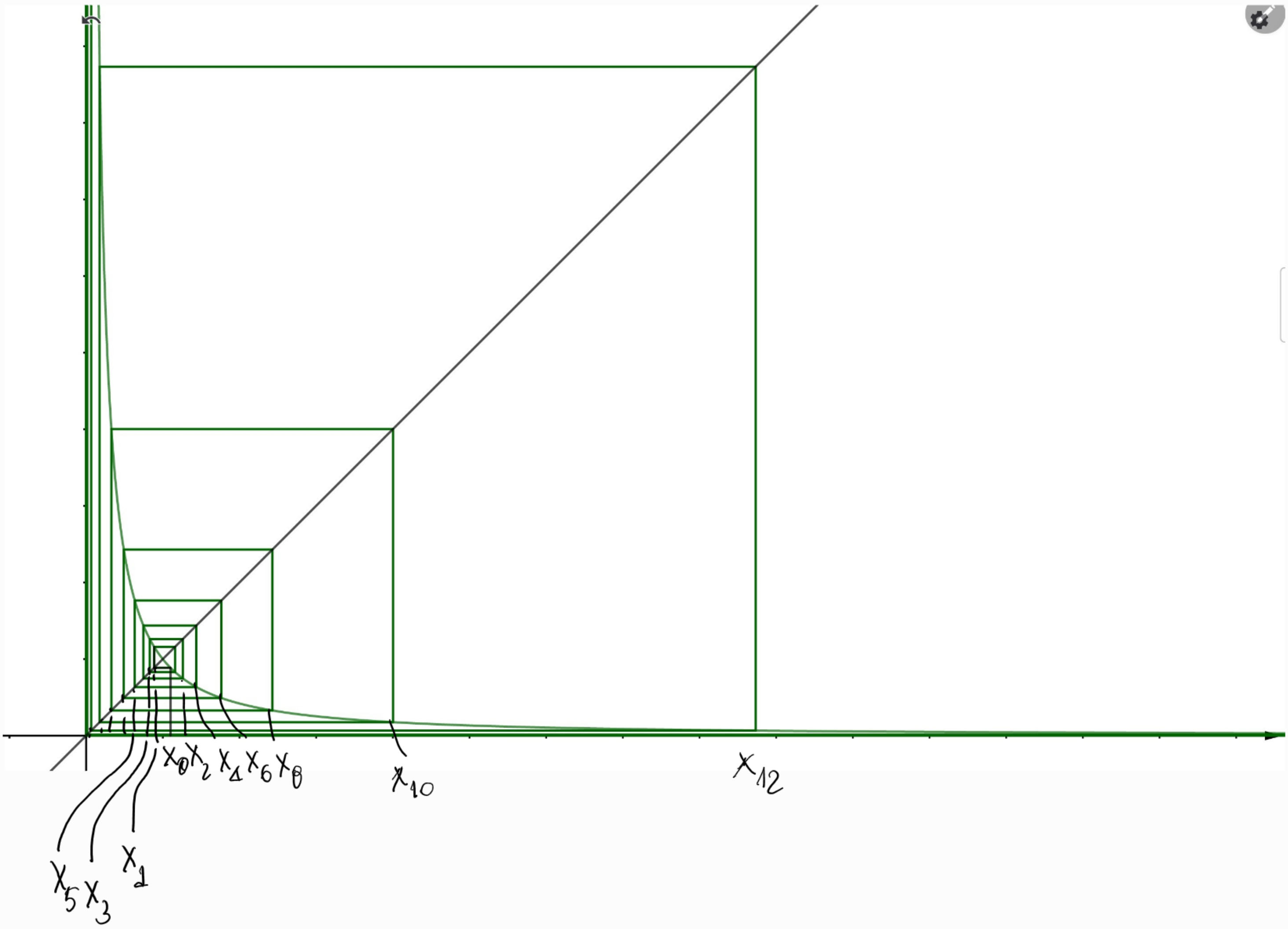
come si vede l'approssimazione è non monotòna, oscillante intorno alla soluzione



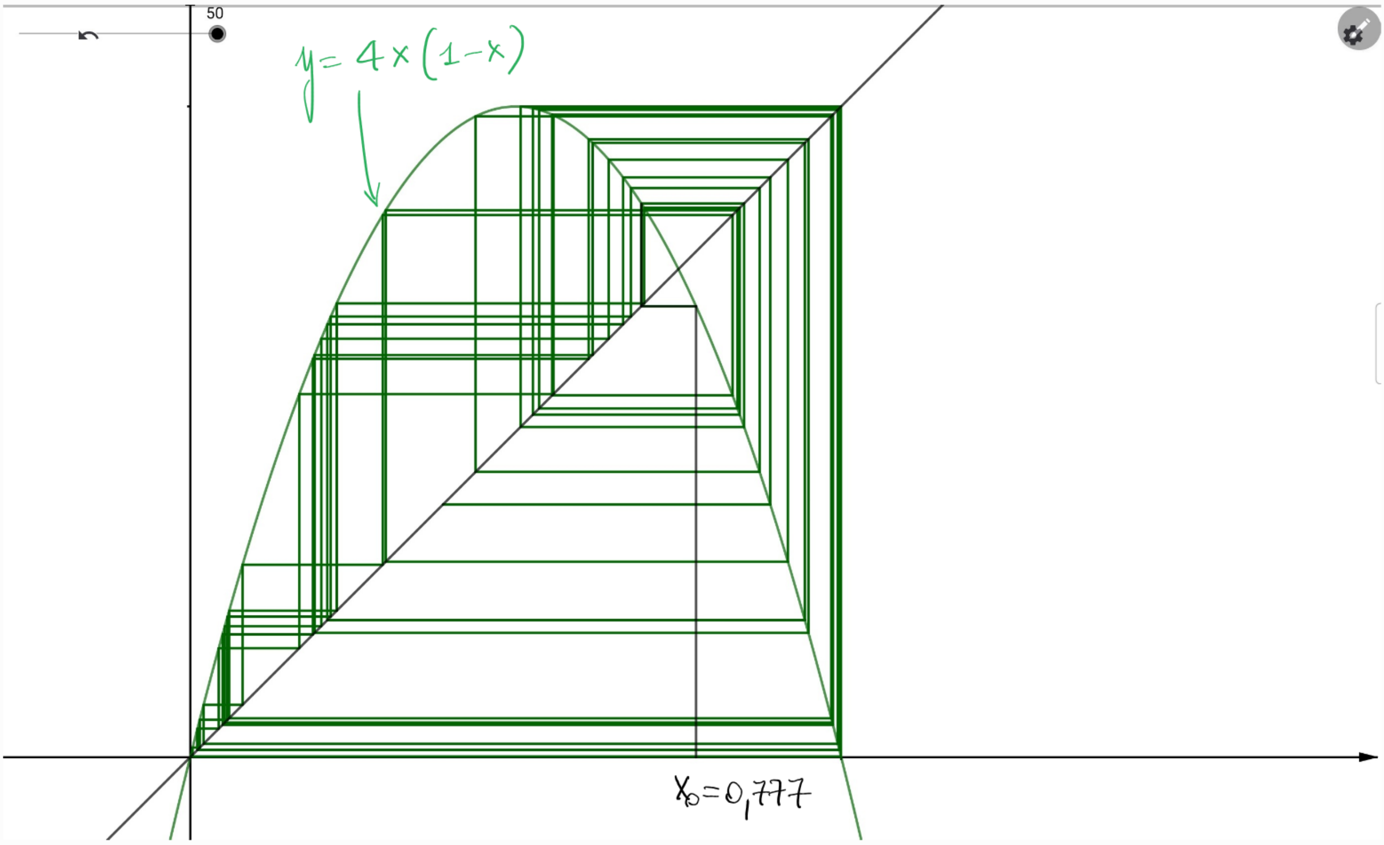
Nel prossimo caso: $f(x) = x^{-5/4}$,

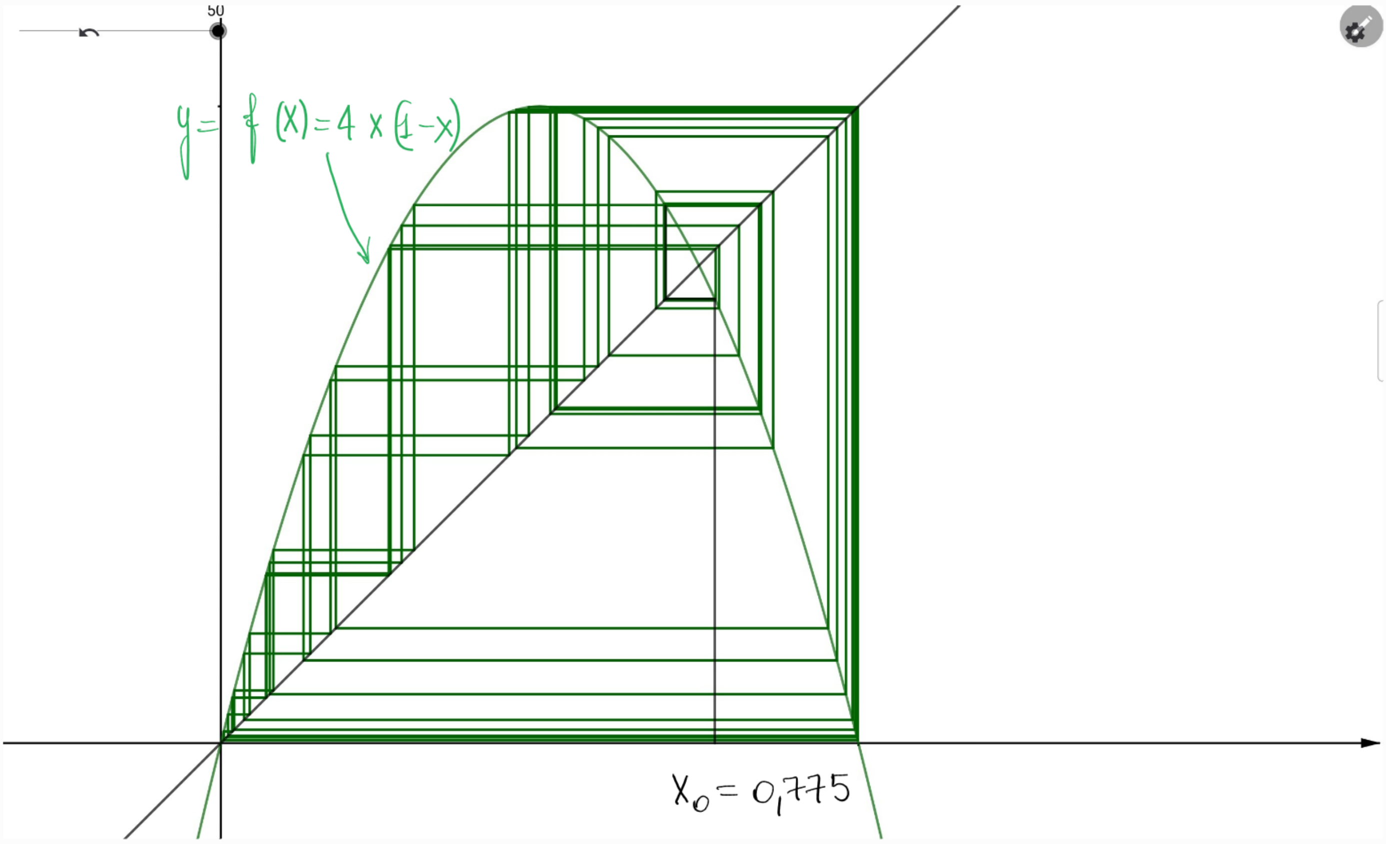
non c'è convergenza: la sottosuccessione x_{2n} diverge a $+\infty$,

la sottosuccessione x_{2n+1} tende a 0^+



Nel caso di $f(x) = 4x(1-x)$, il comportamento è "disordinato", e si possono generare successioni completamente diverse con piccole modifiche del dato iniziale x_0.
Le prossime immagini descrivono il comportamento per $x_0 = 0{,}777$ e per $x_0 = 0{,}771$.





Questi sono i più semplici esempi di "sistemi caotici", nel senso che a piccole variazioni delle condizioni iniziali corrispondono comportamenti molto diversi del sistema.