Dim del teorema di convergenza delle serie di potenze, nell'ipotesi che

$$\exists \lim_{k\to+\infty} \frac{|a_k|}{|a_{k+1}|} = r$$

1) supponiamo $r \in (0,+\infty)$.

Poniamo $b_k = a_k (x-x_0)^k$

Applico il criterio del rapporto a $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$

$$\frac{|b_{k+1}|}{|b_k|} = \frac{|a_{k+1}|\,|x-x_0|^{\cancel{k+1}}}{|a_k|\,\cancel{|x-x_0|^k}} = |x-x_0| \boxed{\frac{|a_{k+1}|}{|a_k|}} \xrightarrow[k]{} \frac{|x-x_0|}{r}$$

- se $|x-x_0| < r \Rightarrow \frac{|x-x_0|}{r} < 1 \xRightarrow{\text{criterio del rapporto}} \sum_k b_k$ converge (assolut.)

$$\sum_k b_k = \sum a_k (x-x_0)^k$$

- se $|x-x_0| > r \Rightarrow \frac{|x-x_0|}{r} > 1 \xRightarrow{\text{crit. rapporto}} \sum_k b_k$ non converge

2) se $r = \lim_{k\to+\infty} \frac{|a_k|}{|a_{k+1}|} = +\infty$

$$\frac{|b_{k+1}|}{|b_k|} = \frac{|a_{k+1}|\,|x-x_0|^{\cancel{k+1}}}{|a_k|\,\cancel{|x-x_0|^k}} \longrightarrow 0 \Rightarrow \sum_k b_k = \sum_k a_k (x-x_0)^k$$

converge (assolut.) $\forall x \in \mathbb{R}$

$\frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} \to 0$

3) se $r = \lim_{k\to+\infty} \frac{|a_k|}{|a_{k+1}|} = 0^+$

$$\frac{|b_{k+1}|}{|b_k|} = \frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} |x-x_0| \longrightarrow +\infty \quad \text{se } x \neq x_0$$

Per il criterio del rapporto, la serie non converge per nessun $x \neq x_0$

Serie di Taylor

Siano $f \in C^\infty(a,b)$ (cioè derivabile quante volte si vuole), $x, x_0 \in (a,b)$.

Posso considerare il polinomio di Taylor centrato in x_0 di ordine n

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$$

$$f(x) = T_n(x) + E_n(x)$$

Quindi

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k = f(x) - E_n(x). \qquad (*)$$

Cosa succede se, per x_0, x fissati, faccio $n \to +\infty$?

Questa può essere considerata la somma parziale della serie

$$\underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k}_{\text{E' una serie di potenze}}.$$

serie di Taylor (Maclaurin se $x_0=0$)

Dalla $(*)$ si ottiene

La serie converge a f, cioè

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k = f(x) \iff \lim_{n\to+\infty} E_n(x) = 0$$

Vediamo il caso $f(x) = e^x$, $x_0 = 0$

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} = e^x - E_n(x)$$

$$E_n(x) = \frac{\overbrace{f^{(n+1)}(c)}^{= e^c}}{(n+1)!} x^{n+1} \xrightarrow[n \to 0]{?} 0$$

forma del resto di Lagrange.

dove c compreso tra 0 e x

$$|E_n(x)| = \frac{e^c}{(n+1)!} |x|^{n+1} <$$

OSS se $x > 0$, $0 < c < x$
$\Rightarrow e^c < e^x$
se $x < 0$ $x < c < 0$
$\Rightarrow e^c < e^0 = 1$

$$< \frac{\max\{1, e^x\}}{(n+1)!} |x|^{n+1}$$

$$\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0 \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

(fattoriale è più veloce di un esponenziale)

$E_n(x) \to 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$$\Rightarrow \boxed{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = e^x \qquad \forall x \in \mathbb{R}.}$$

$$\Rightarrow (x = 1) \Rightarrow e = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$$

$$(x = -1) \Rightarrow \frac{1}{e} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!}$$

In modo molto simile (esercizio) si dimostra che

$$\boxed{\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \qquad \forall x \in \mathbb{R}}$$

$$\boxed{\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} \qquad \forall x \in \mathbb{R}}$$

$$\boxed{\sinh x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \qquad \forall x \in \mathbb{R}}$$

$$\boxed{\cosh x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!} \qquad \forall x \in \mathbb{R}.}$$

Si può inoltre dimostrare che:

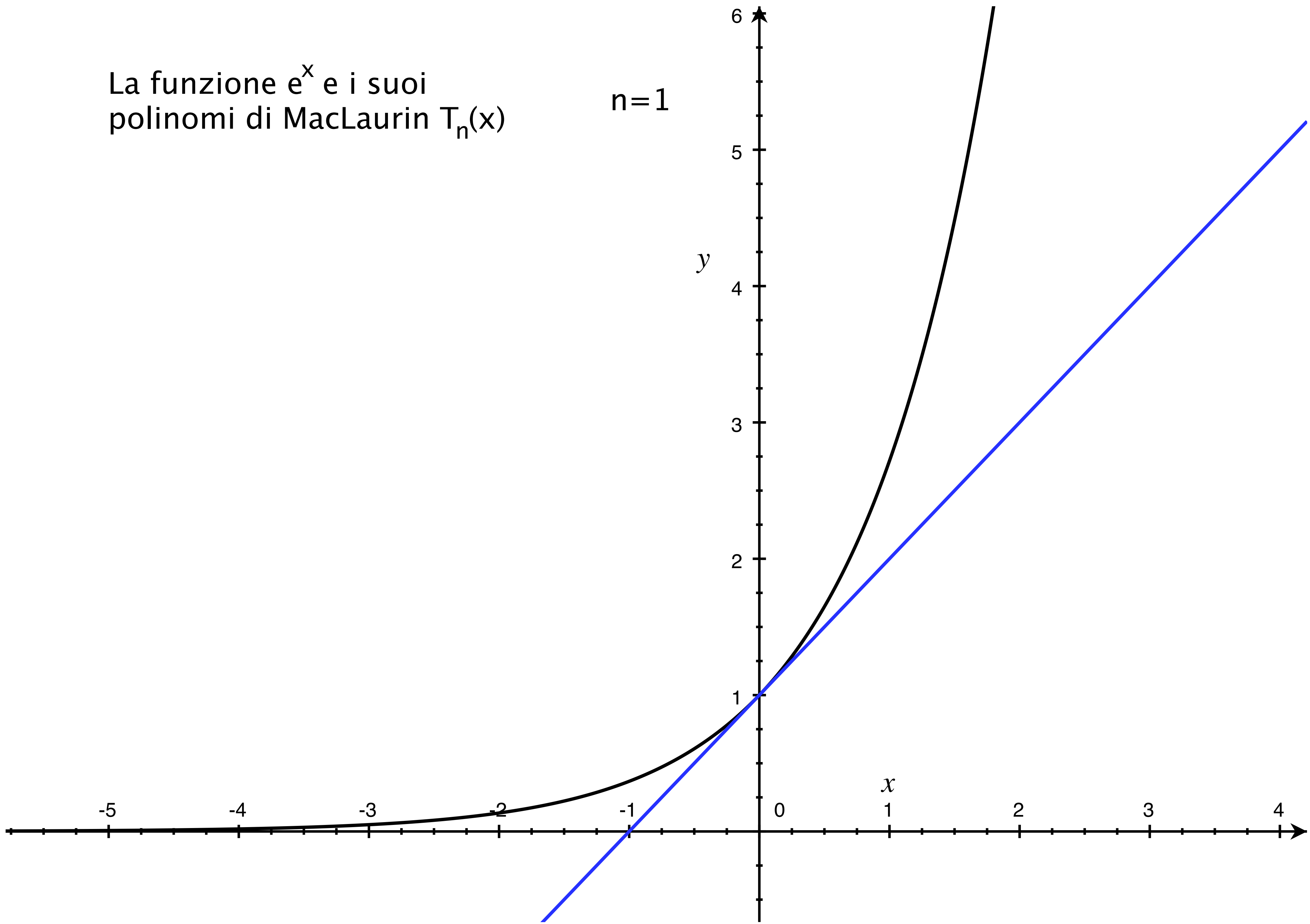
$$\boxed{\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k \qquad \forall x \in (-1,1) \quad \text{(serie geometrica)}}$$

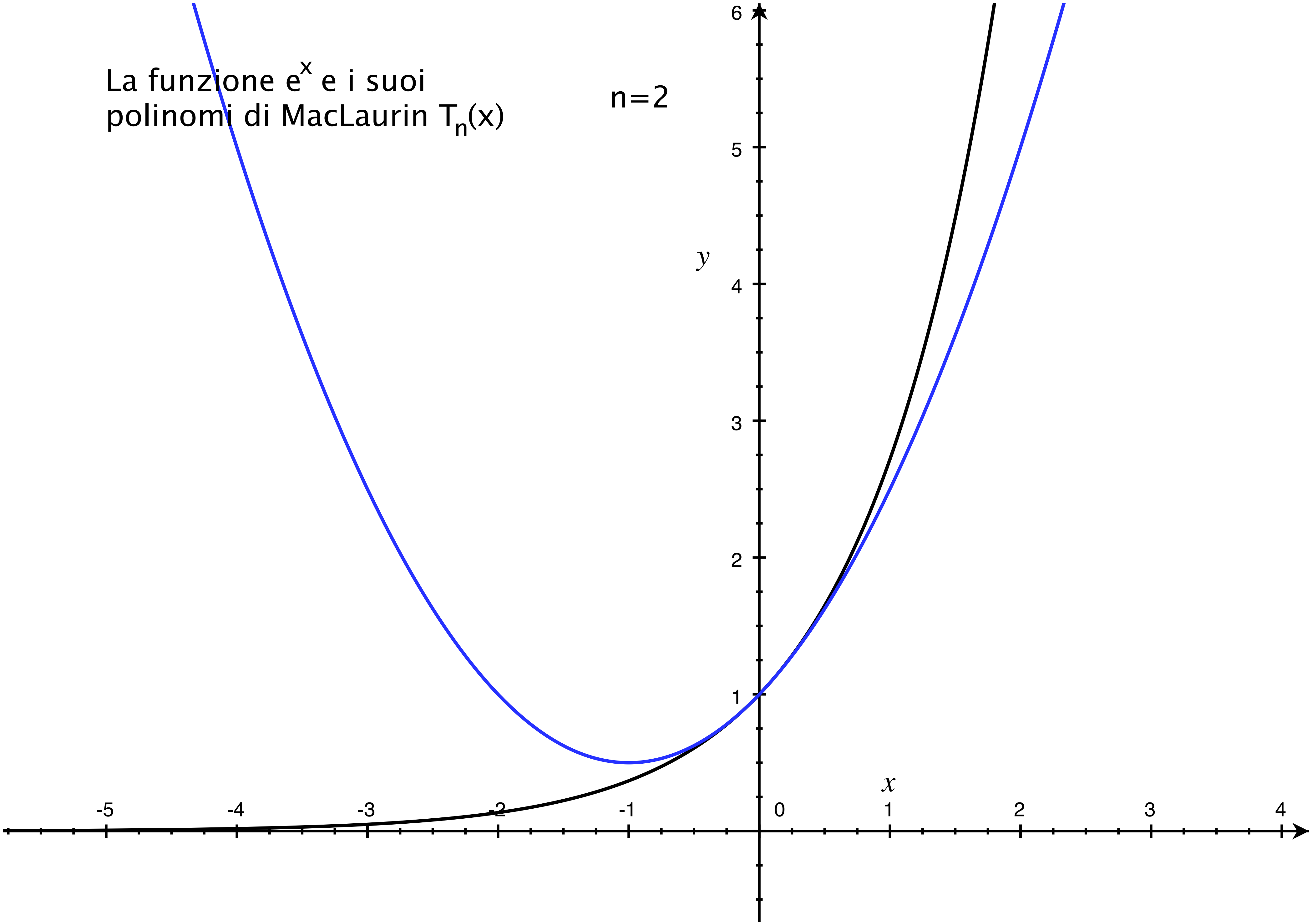
$$\boxed{(1+x)^{\alpha} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k \qquad \forall x \in (-1,1)}$$

$$\boxed{\log(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1} x^k}{k} \qquad \forall x \in (-1,1]}$$

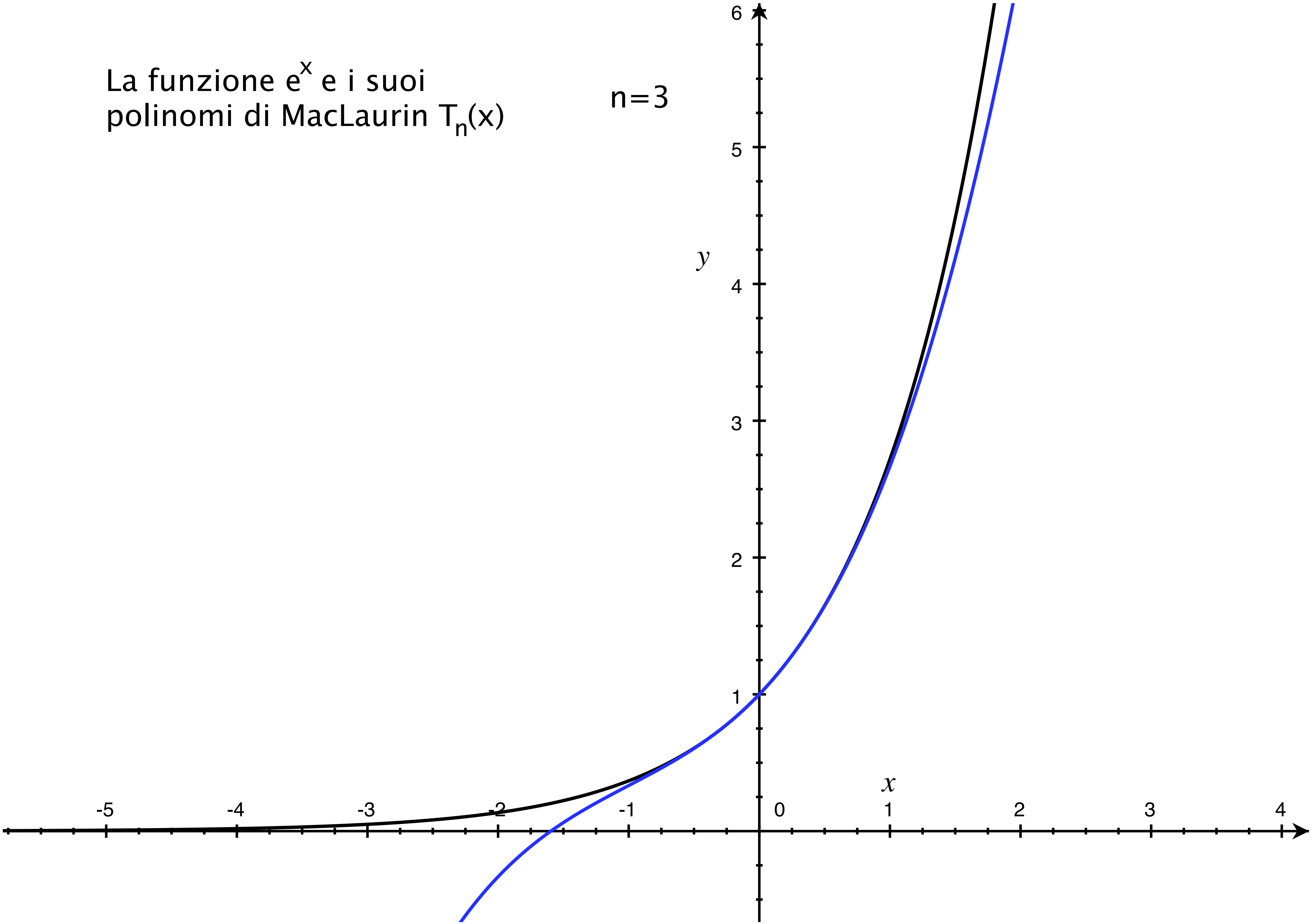
$$\boxed{\begin{aligned} \operatorname{arctg} x &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} x^{2k+1} \qquad \forall x \in [-1,1] \\ \arcsin x &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2k)!}{4^k (k!)^2 (2k+1)} x^{2k+1} \qquad \forall x \in [-1,1] \end{aligned}}$$

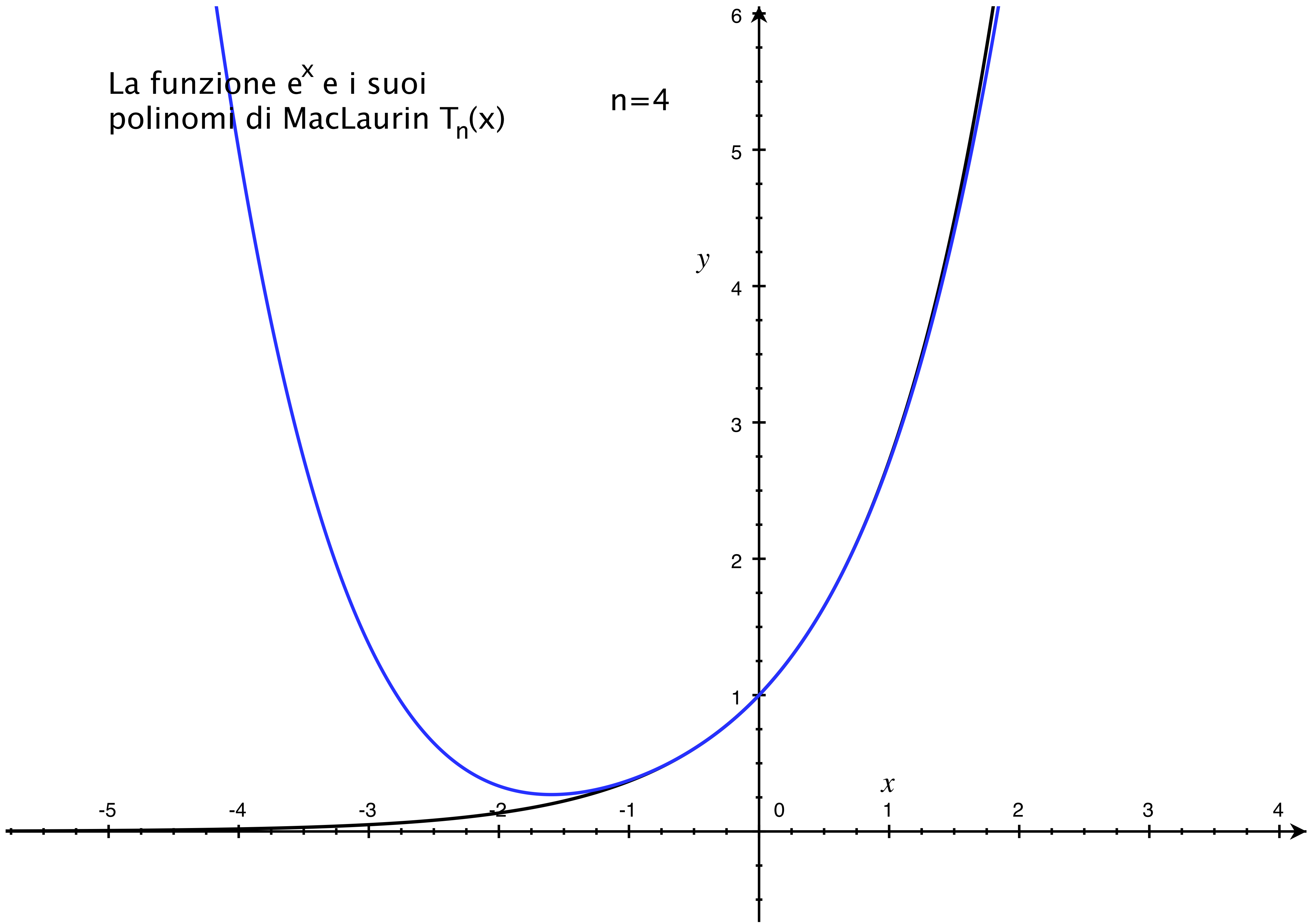
Queste proprietà di convergenza sono visualizzate nelle seguenti slides:

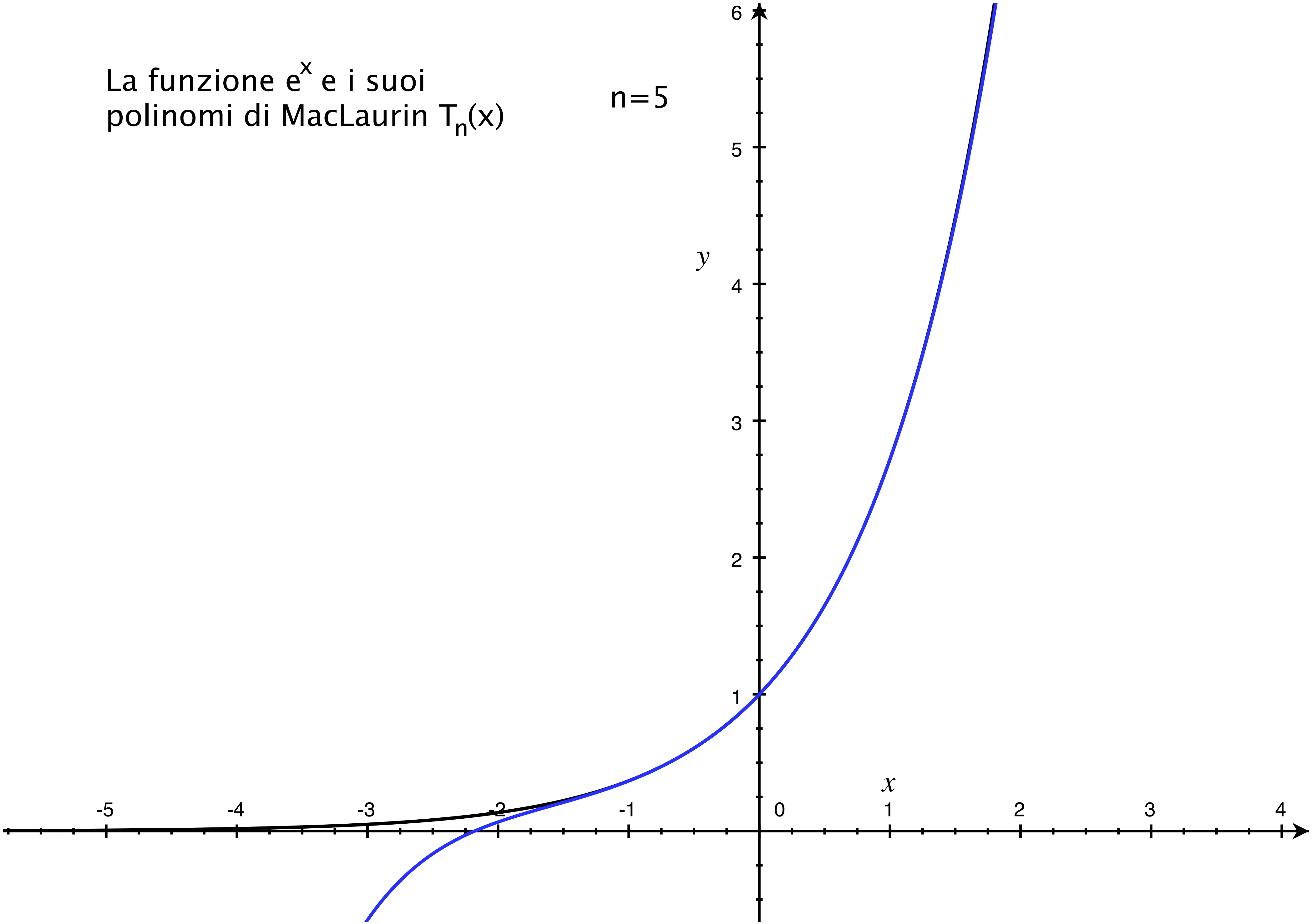

La funzione e^x e i suoi polinomi di MacLaurin $T_n(x)$
n=1
y
x
6
5
4
3
2
1
0
-5
-4
-3
-2
-1
1
2
3
4

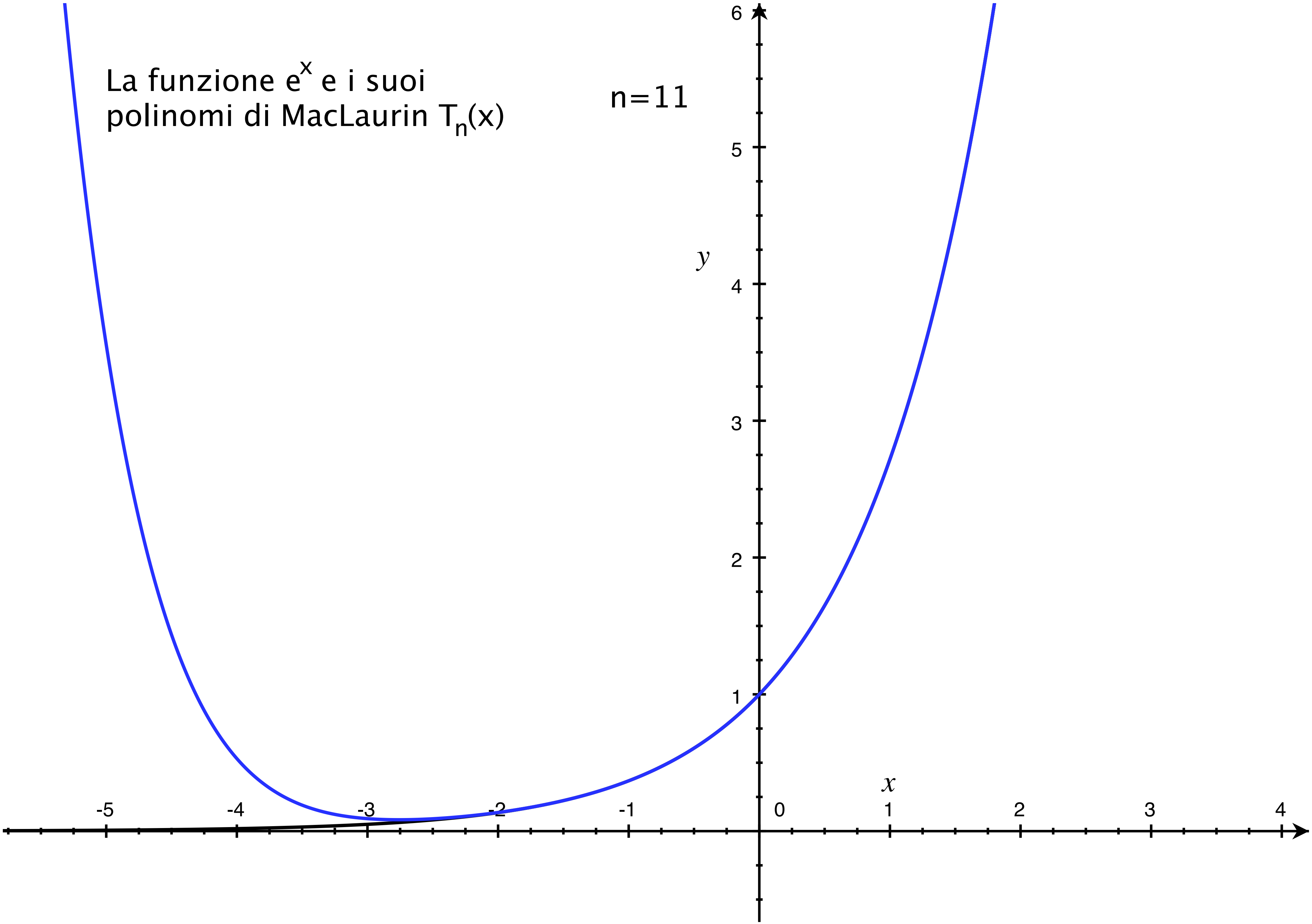


La funzione e^x e i suoi polinomi di MacLaurin $T_n(x)$
n=2
y
x
6
5
4
3
2
1
0
-5
-4
-3
-2
-1
1
2
3
4

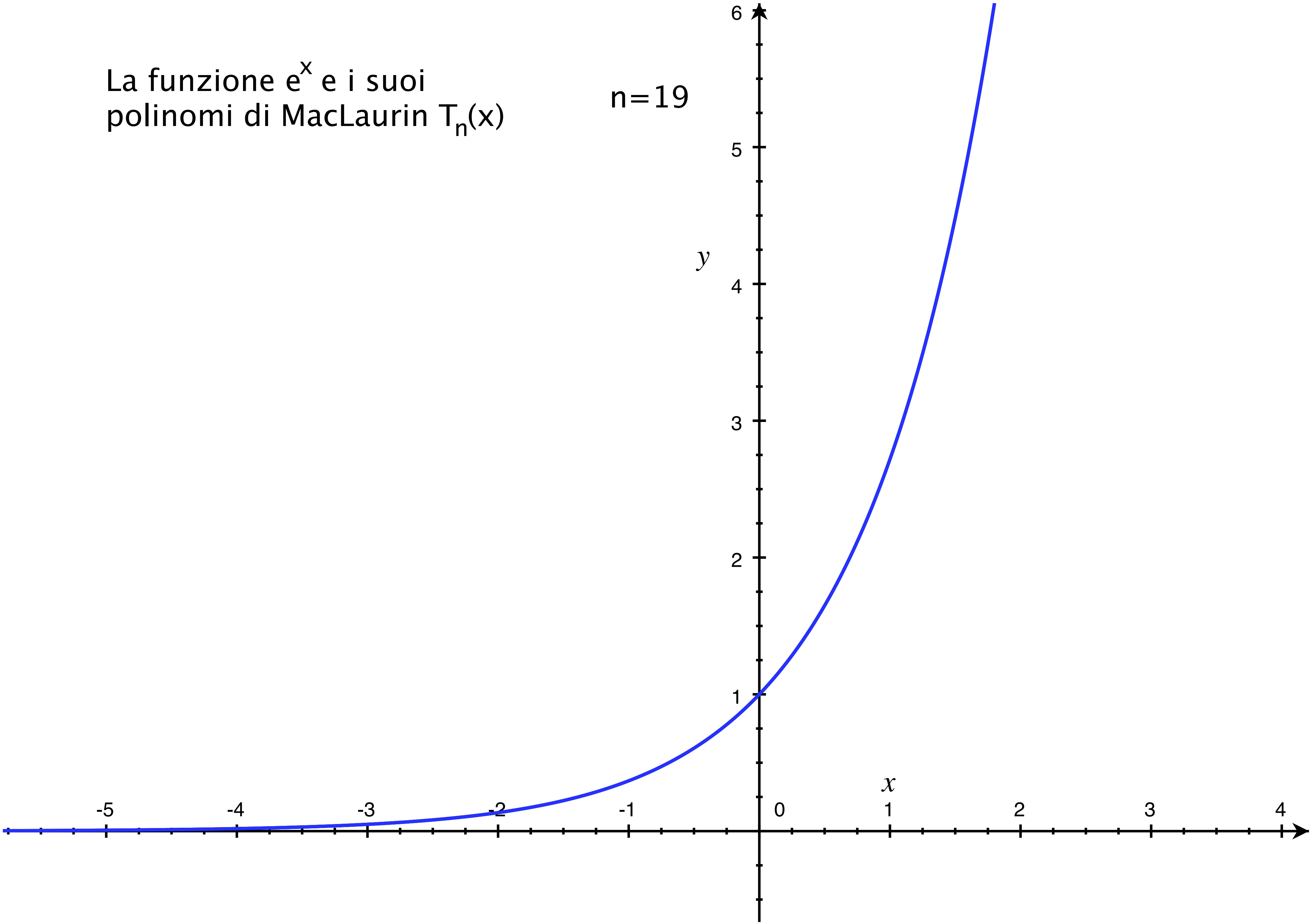

La funzione e^x e i suoi
polinomi di MacLaurin T_n(x)
n=3
y
x
6
5
4
3
2
1
0
-5
-4
-3
-2
-1
1
2
3
4


La funzione e^x e i suoi
polinomi di MacLaurin $T_n(x)$
n=4
y
x
6
5
4
3
2
1
0
-5
-4
-3
-2
-1
1
2
3
4

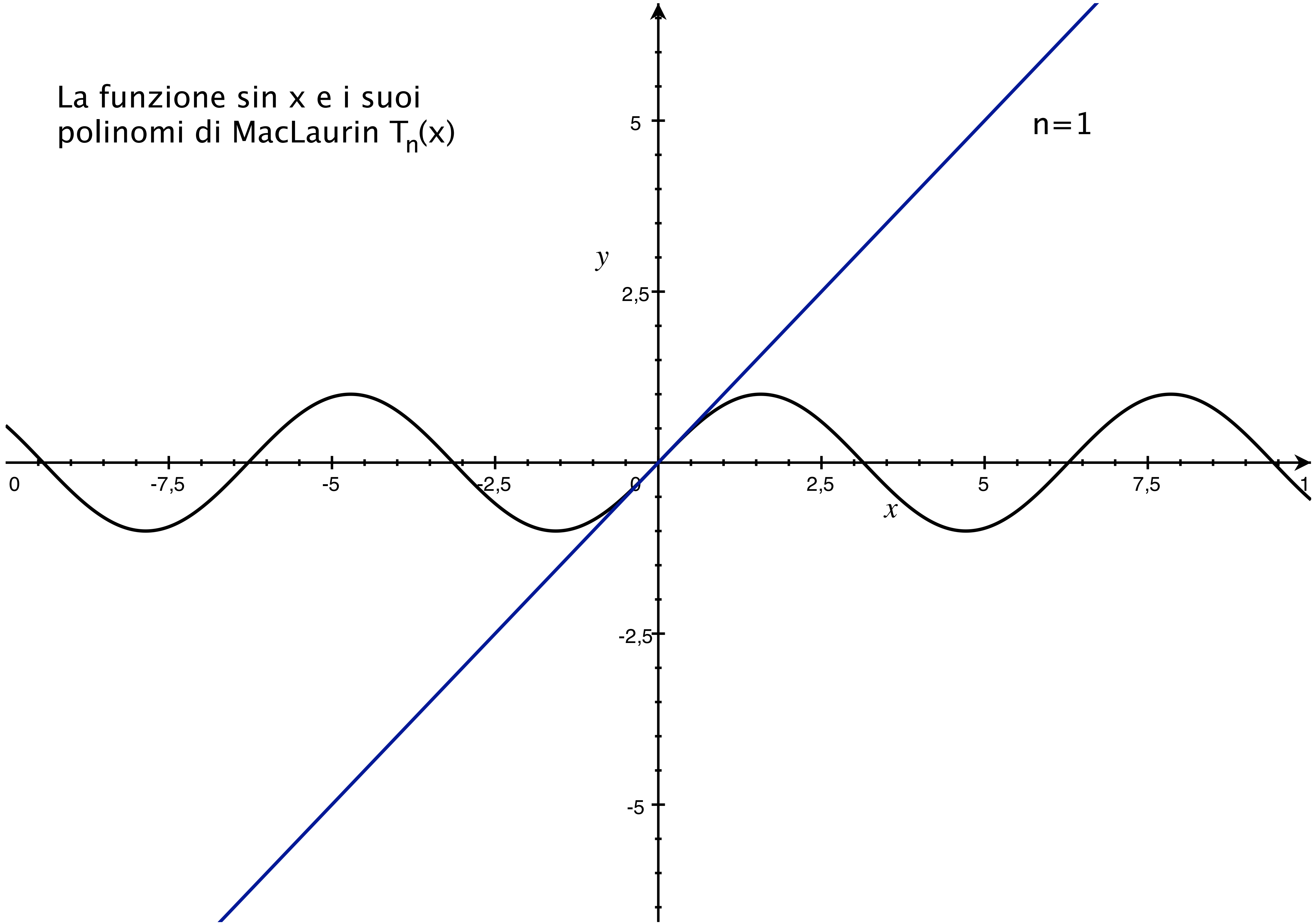

La funzione e^x e i suoi
polinomi di MacLaurin T_n(x)
n=5
y
x
6
5
4
3
2
1
0
-5
-4
-3
-2
-1
1
2
3
4



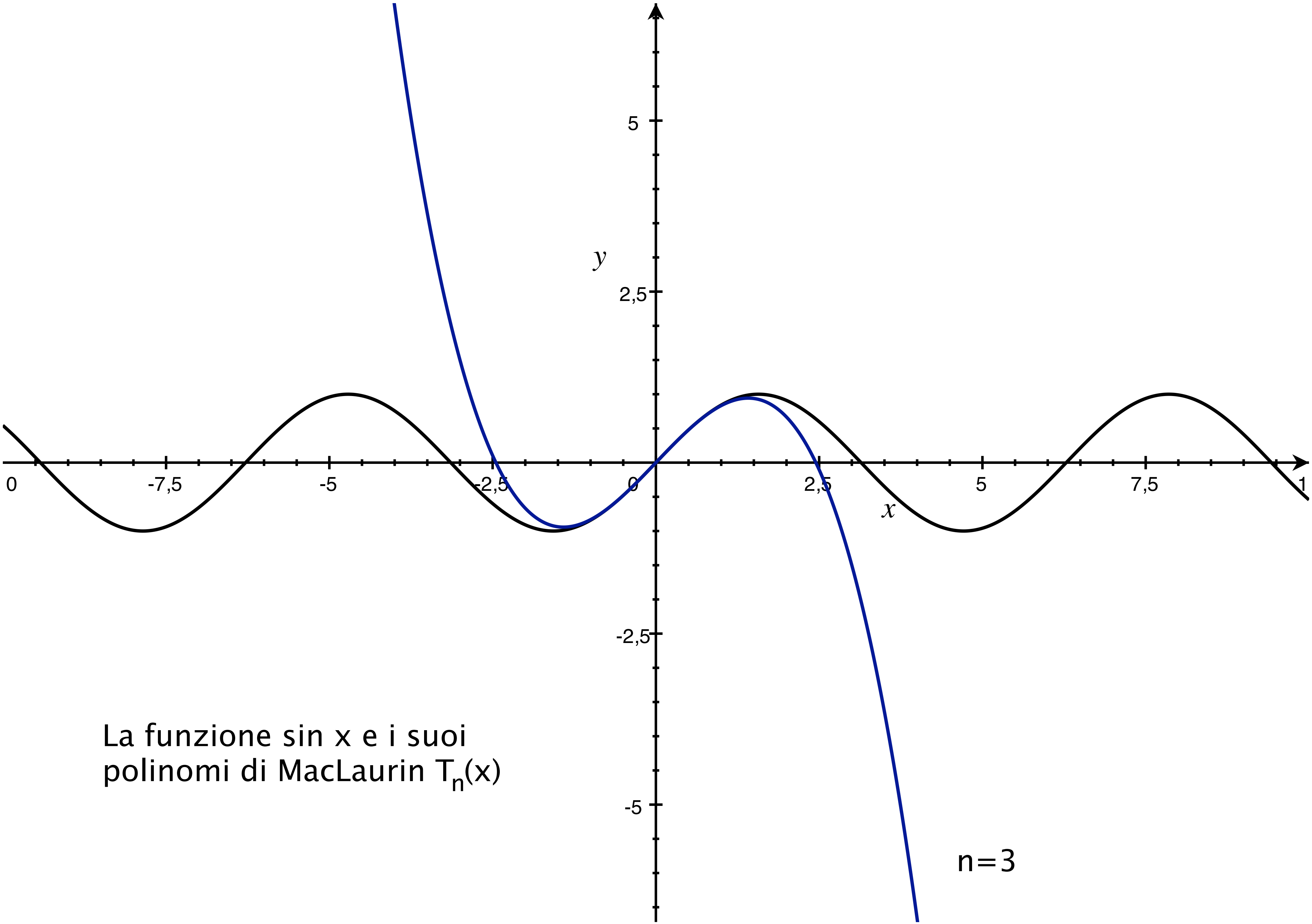
La funzione e^x e i suoi polinomi di MacLaurin $T_n(x)$
n=11
y
x
6
5
4
3
2
1
0
-5
-4
-3
-2
-1
1
2
3
4



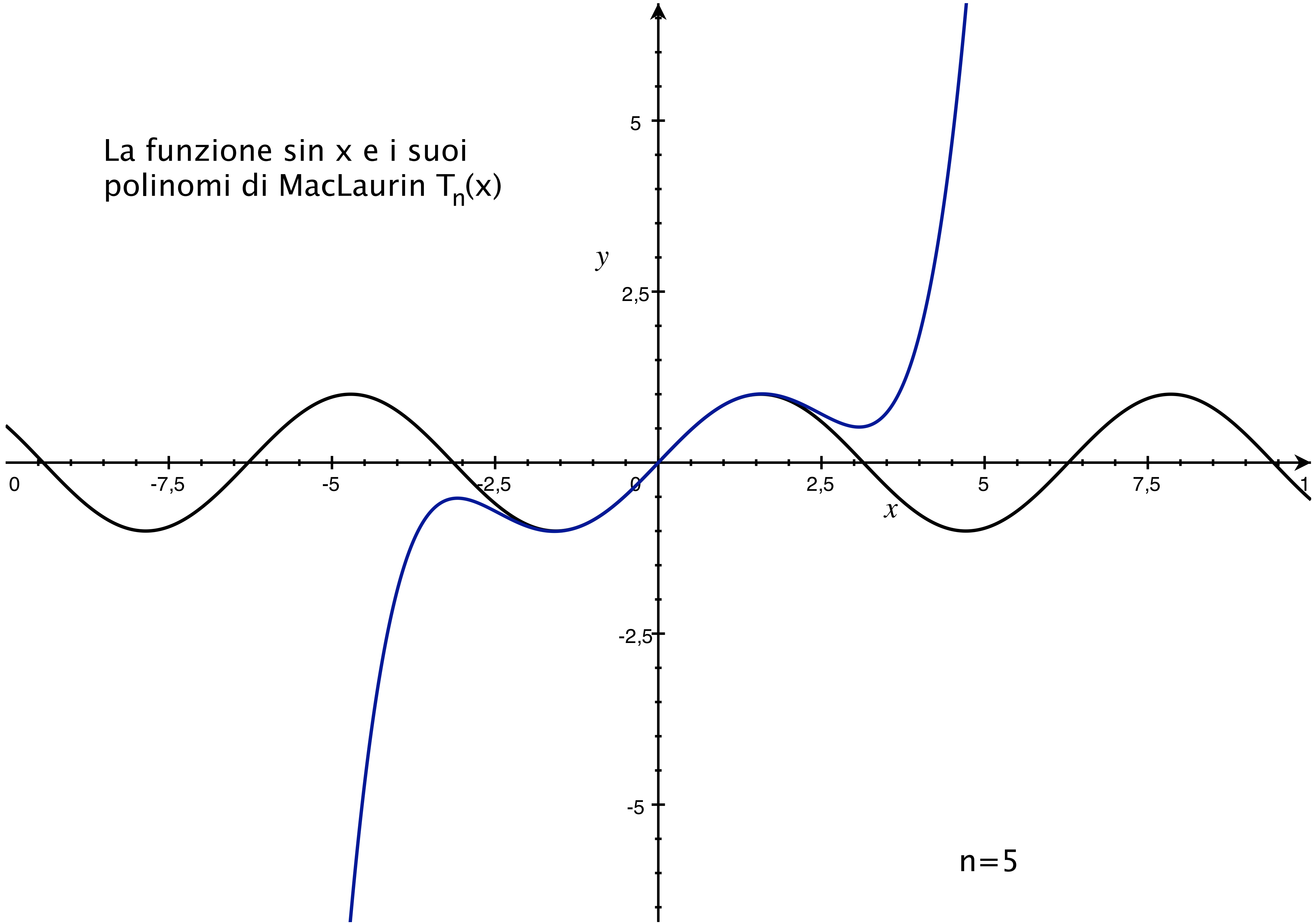
La funzione e^x e i suoi
polinomi di MacLaurin $T_n(x)$
n=19
y
x
6
5
4
3
2
1
0
-5
-4
-3
-2
-1
1
2
3
4

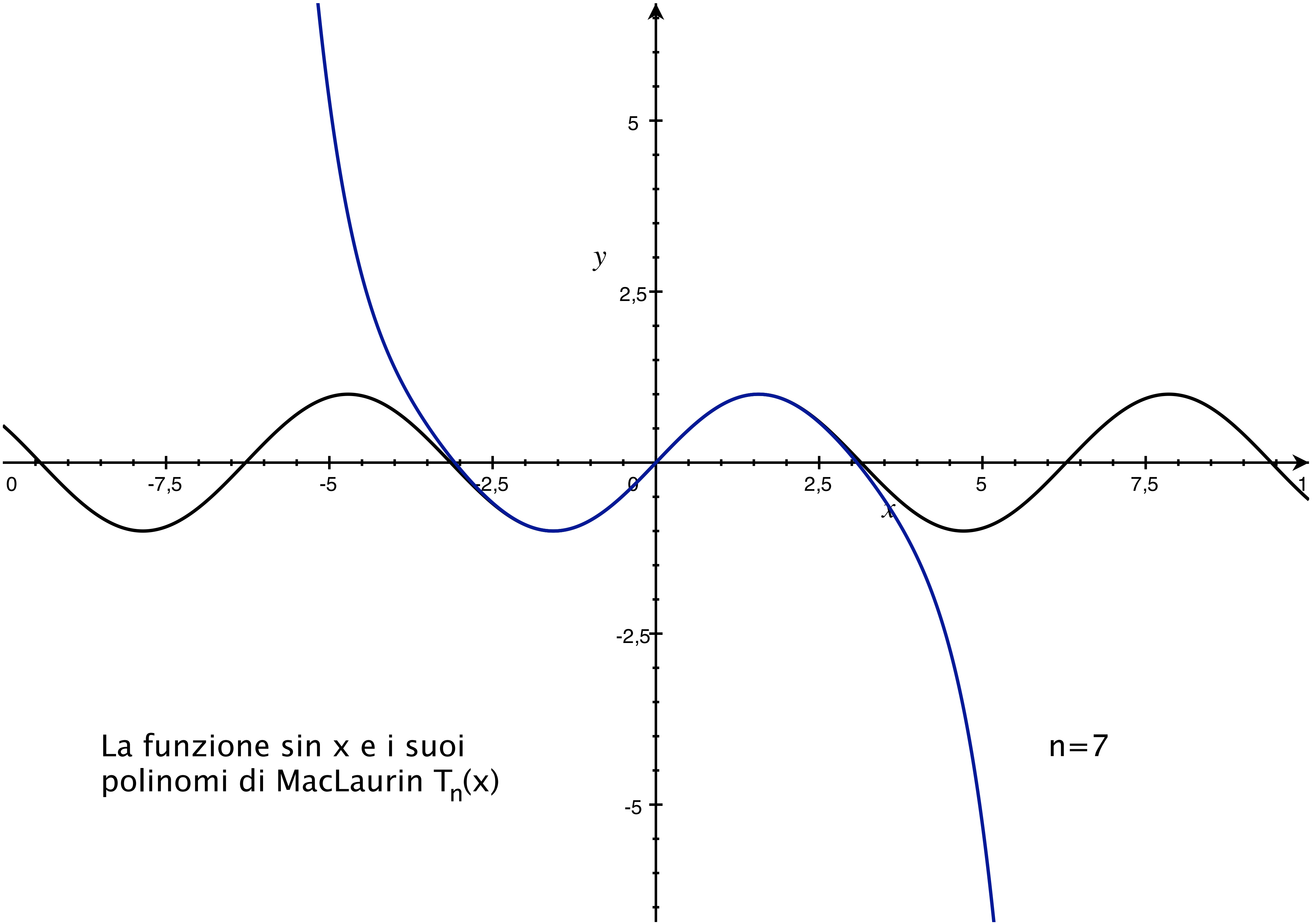


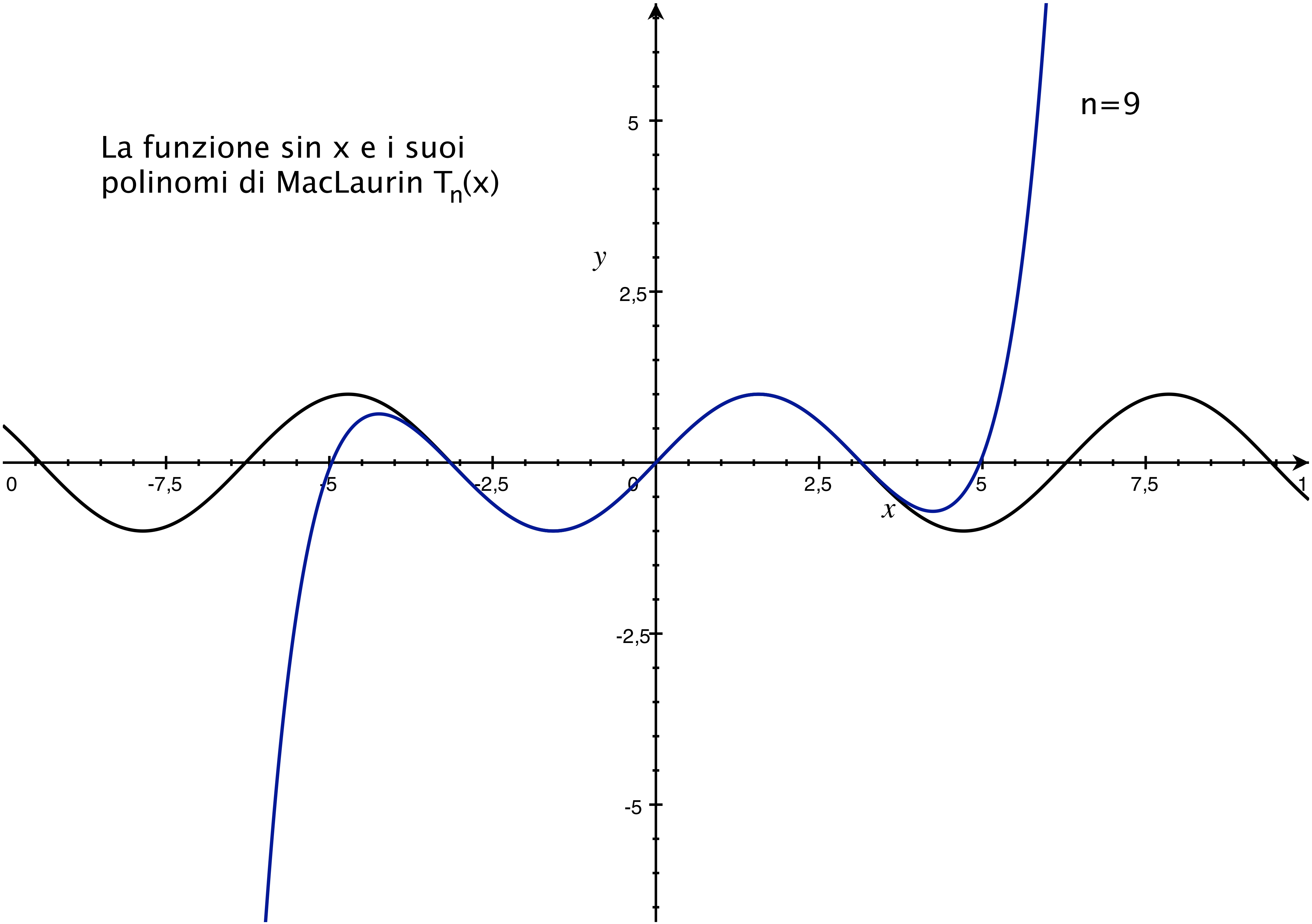
La funzione sin x e i suoi
polinomi di MacLaurin $T_n(x)$
n=1
y
x
5
2,5
-2,5
-5
0
-7,5
-5
-2,5
0
2,5
5
7,5
1

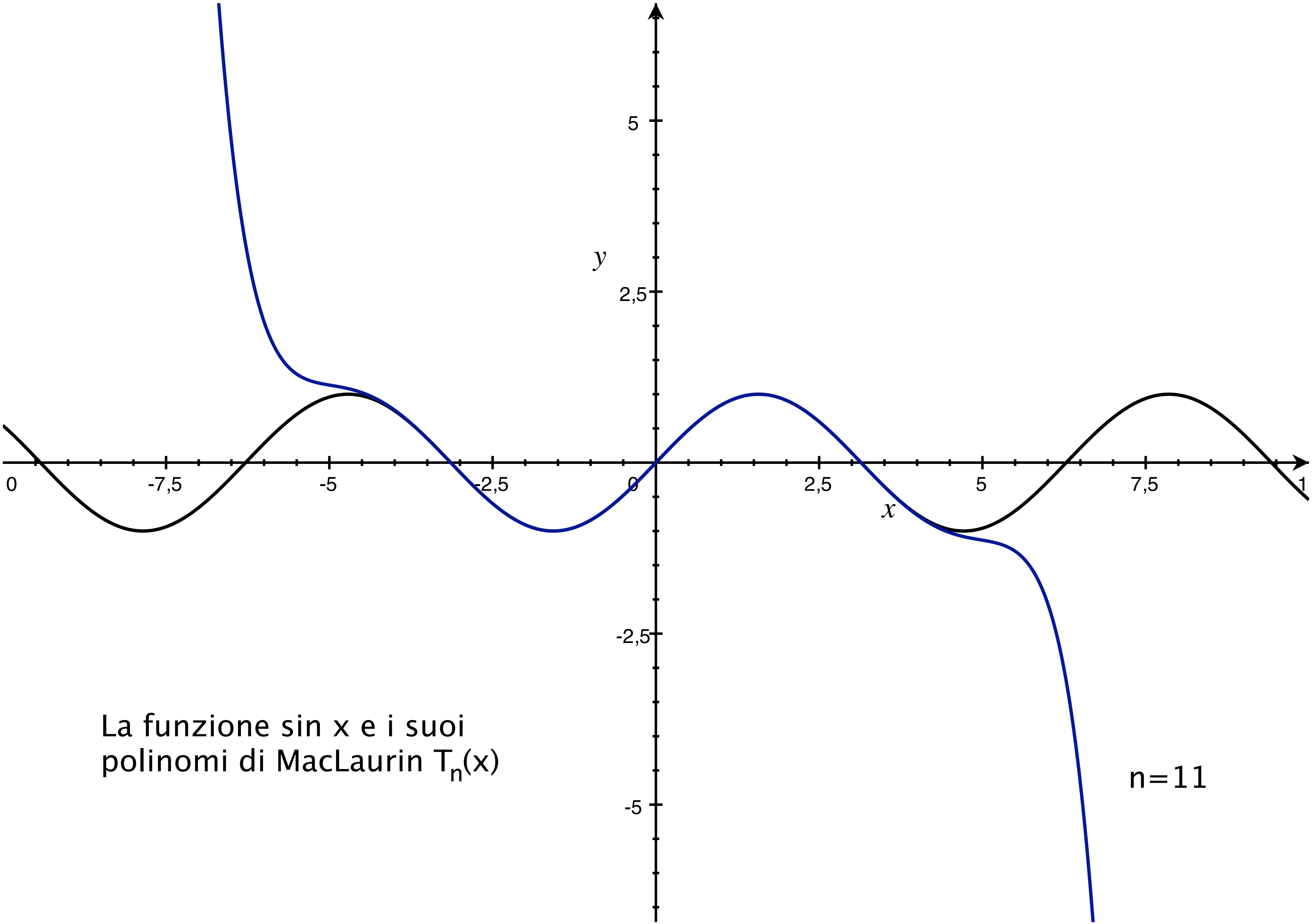


y
5
2,5
-2,5
-5
0
-7,5
-5
-2,5
0
2,5
5
7,5
1
x
La funzione sin x e i suoi
polinomi di MacLaurin $T_n(x)$
n=3

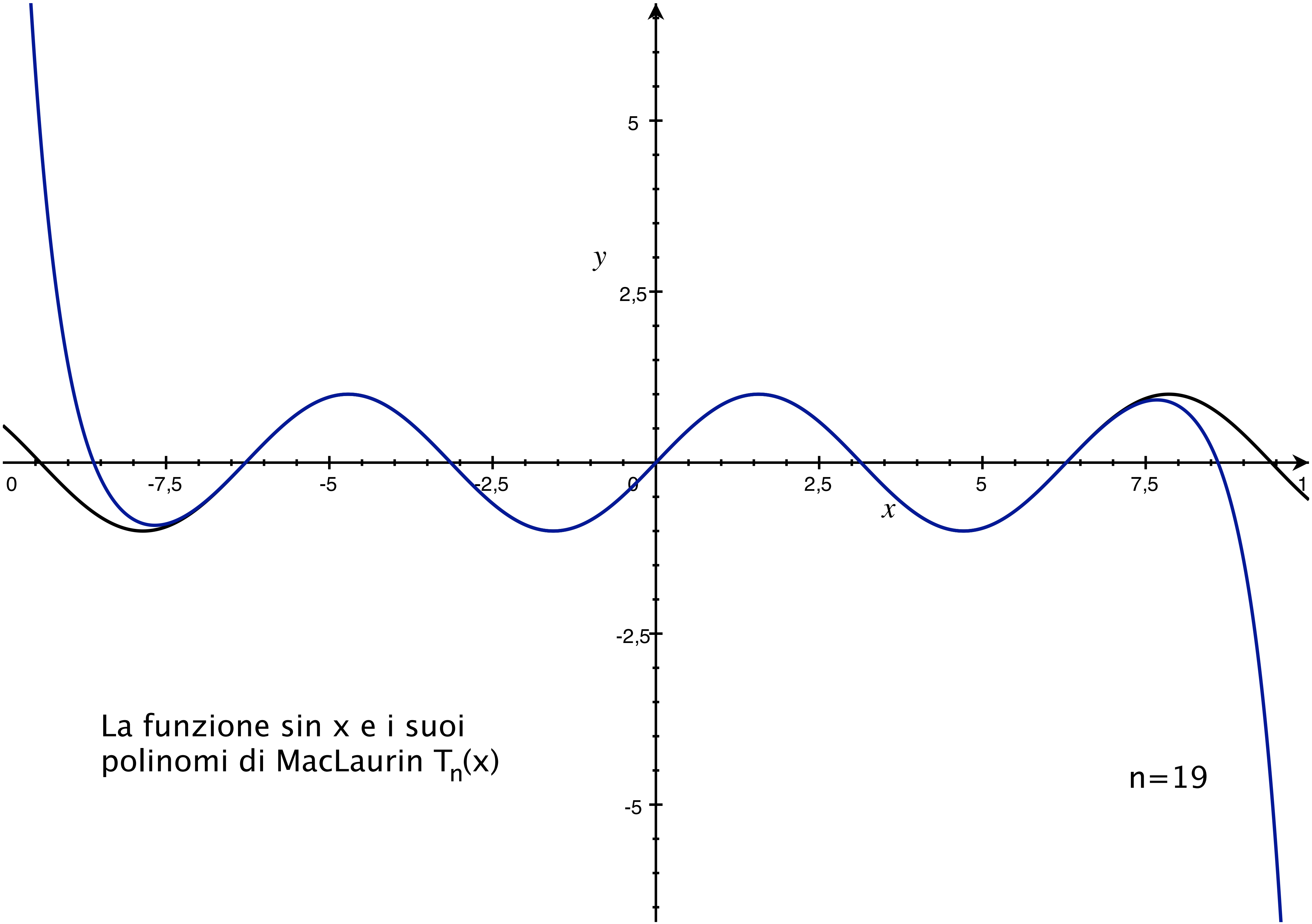

La funzione sin x e i suoi
polinomi di MacLaurin $T_n(x)$
y
5
2,5
-2,5
-5
x
0
-7,5
-5
-2,5
0
2,5
5
7,5
1
n=5


y
5
2,5
-2,5
-5
0
-7,5
-5
-2,5
0
2,5
5
7,5
1
x
La funzione sin x e i suoi
polinomi di MacLaurin $T_n(x)$
n=7

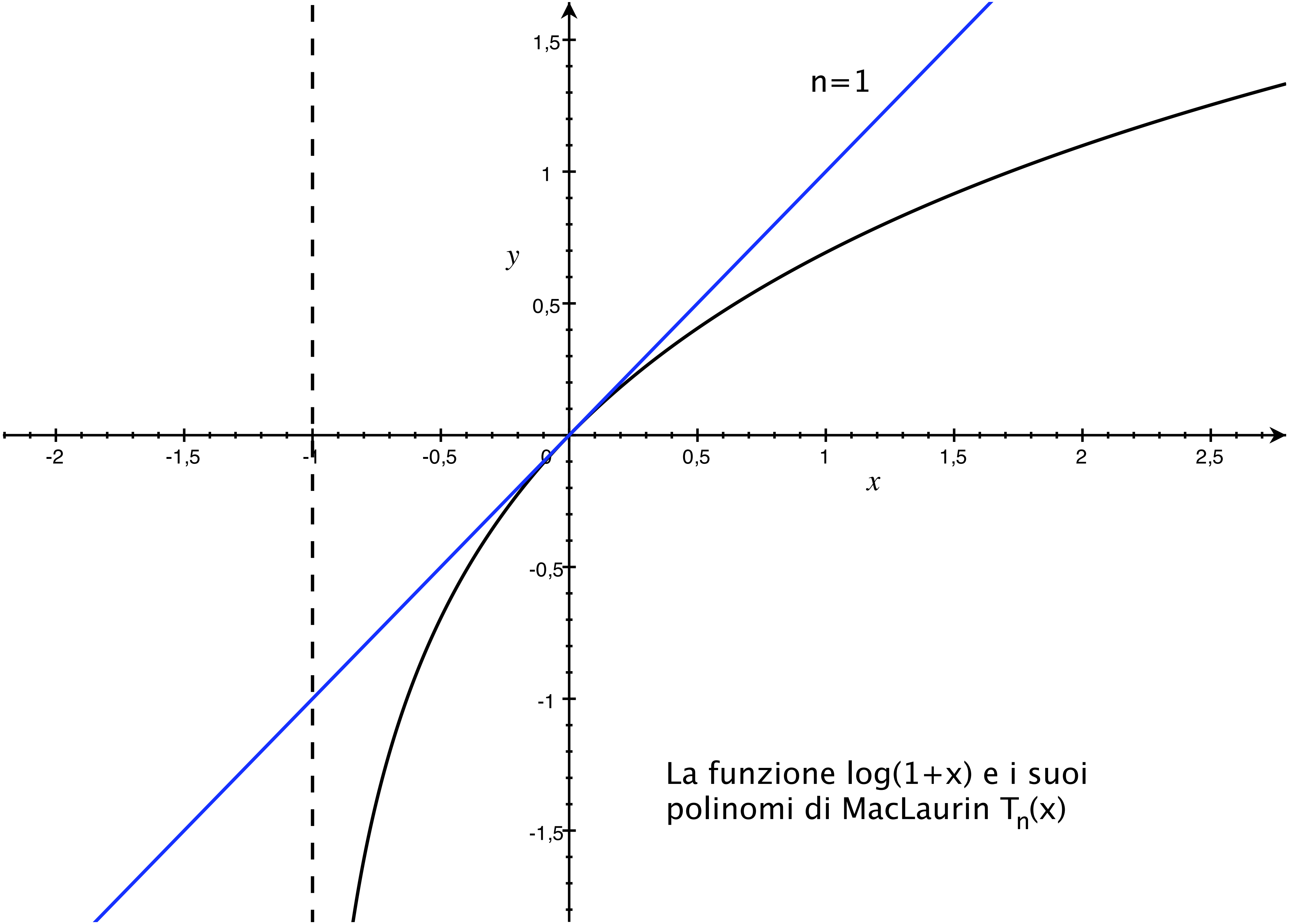

La funzione sin x e i suoi
polinomi di MacLaurin $T_n(x)$
n=9
y
x
5
2,5
-2,5
-5
0
-7,5
-5
-2,5
0
2,5
5
7,5
1



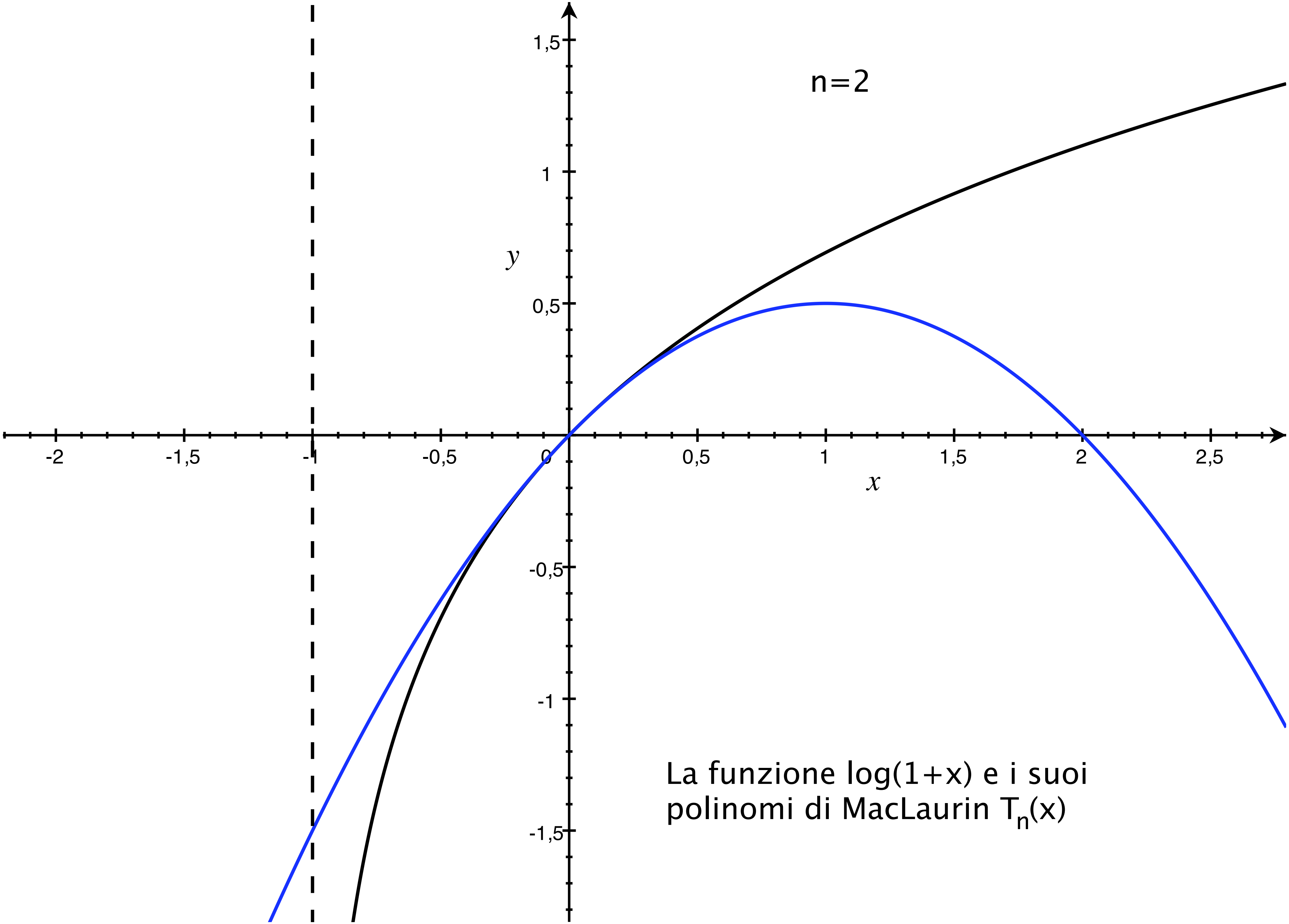
y
x
5
2,5
-2,5
-5
0
-7,5
-5
-2,5
0
2,5
5
7,5
1
La funzione sin x e i suoi polinomi di MacLaurin $T_n(x)$
n=11

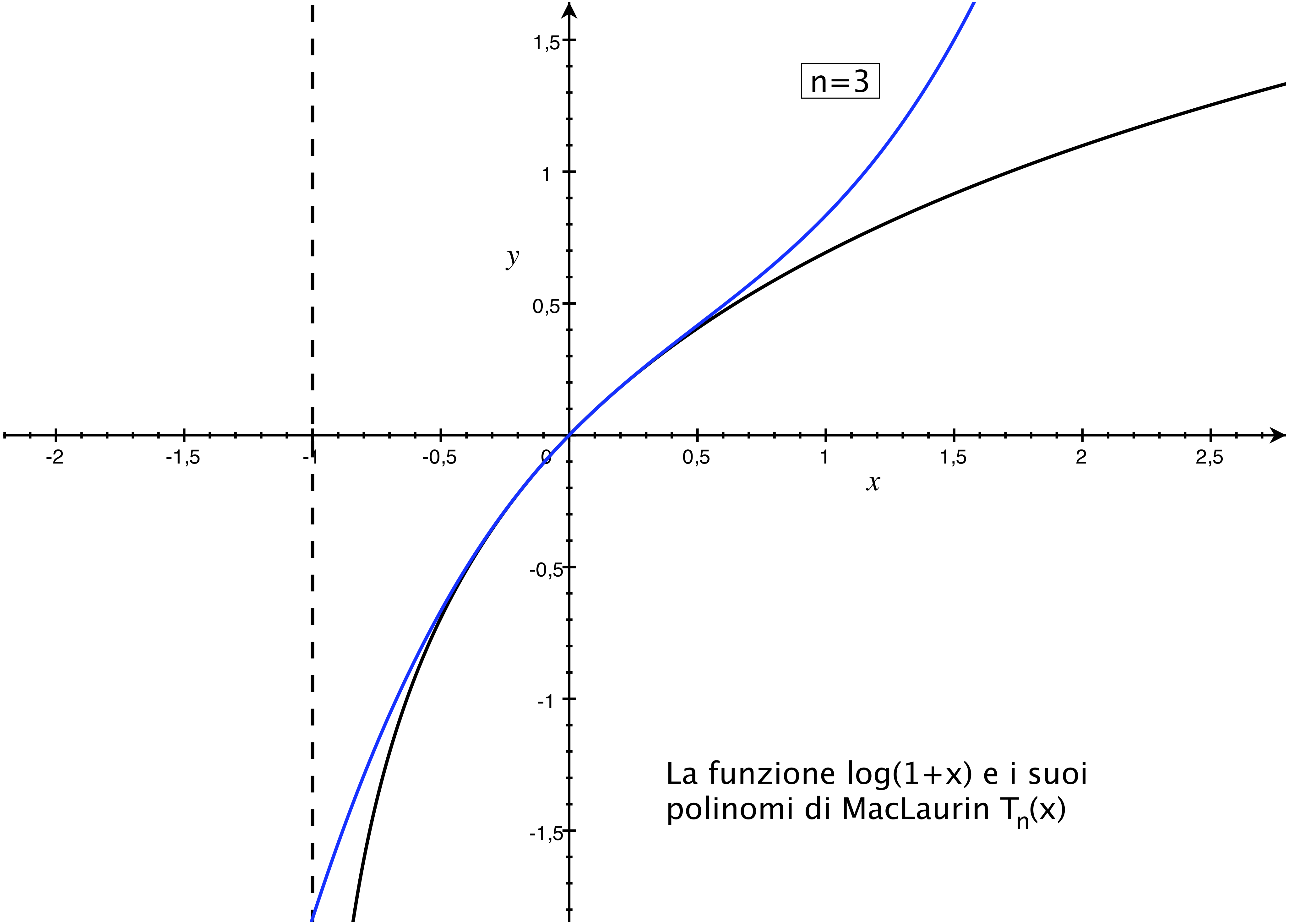


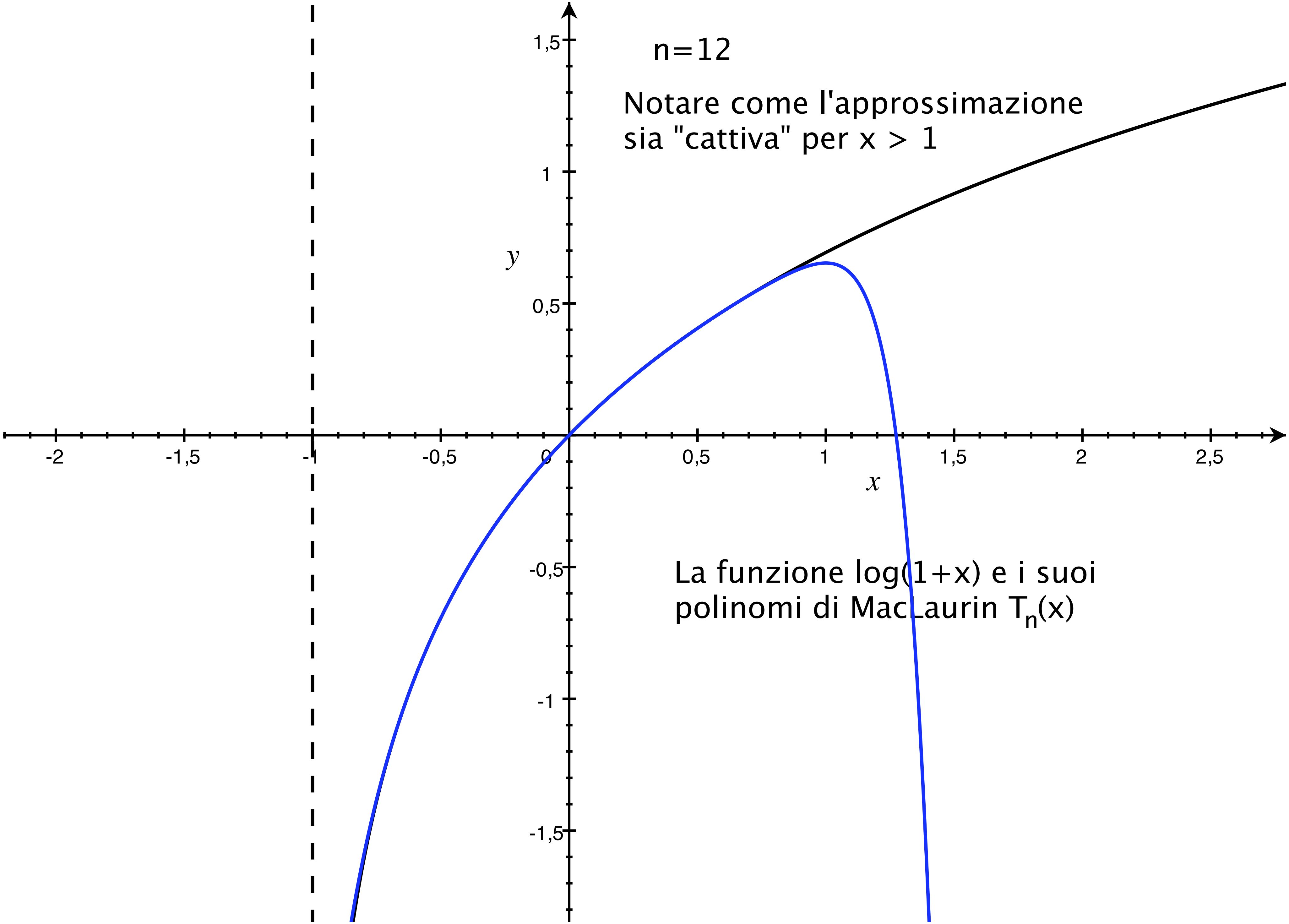
y
5
2,5
-2,5
-5
0
-7,5
-5
-2,5
0
2,5
5
7,5
1
x
La funzione sin x e i suoi
polinomi di MacLaurin $T_n(x)$
n=19



La funzione log(1+x) e i suoi polinomi di MacLaurin $T_n(x)$


n=2
y
x
1,5
1
0,5
-0,5
-1
-1,5
-2
-1,5
-1
-0,5
0
0,5
1
1,5
2
2,5
La funzione log(1+x) e i suoi
polinomi di MacLaurin T_n(x)


n=3
y
x
1,5
1
0,5
-0,5
-1
-1,5
-2
-1,5
-1
-0,5
0
0,5
1
1,5
2
2,5
La funzione log(1+x) e i suoi
polinomi di MacLaurin $T_n(x)$


n=12
Notare come l'approssimazione
sia "cattiva" per x > 1
La funzione log(1+x) e i suoi
polinomi di MacLaurin $T_n(x)$
y
x
1,5
1
0,5
0
-0,5
-1
-1,5
-2
2
2,5

Integrali impropri.

Per gli integrali di Riemann $\int_a^b f(x)\,dx$ dovevamo richiedere:

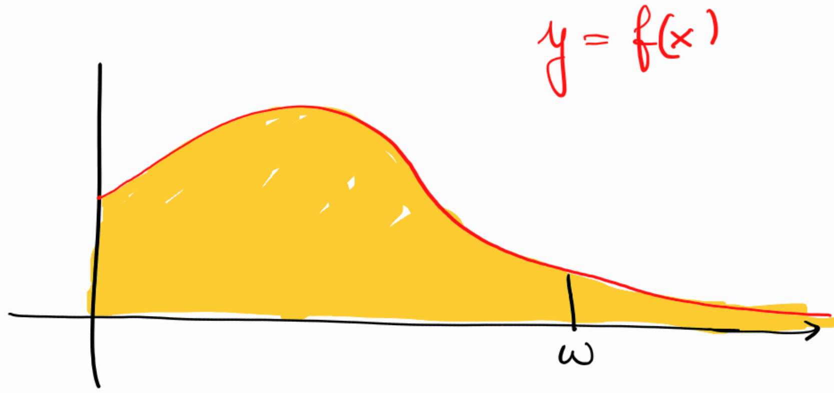
$[a,b]$ limitato, f limitata.

Cosa succede se una di queste ipotesi non è verificata?

$f : [0,+\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ continua.

Vorrei definire $\int_0^{+\infty} f(x)\,dx$

(Per semplicità $f \geq 0$)



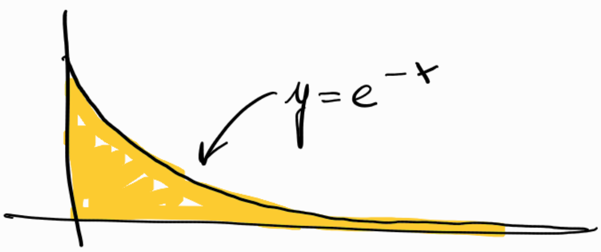
Idea

$$\int_0^{+\infty} f(x)\,dx \overset{\text{def}}{=} \lim_{\omega \to +\infty} \int_0^{\omega} f(x)\,dx$$

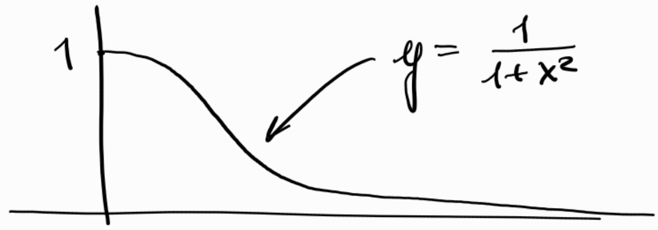
$$\int_0^{+\infty} e^{-x}\,dx = \lim_{\omega \to +\infty} \int_0^{\omega} e^{-x}\,dx =$$

$$= \lim_{\omega \to +\infty} -e^{-x}\Big|_0^{\omega} = \lim_{\omega \to +\infty} \left(1 - e^{-\omega}\right) = 1.$$

$$\int_0^{+\infty} e^{-x}\,dx = 1.$$

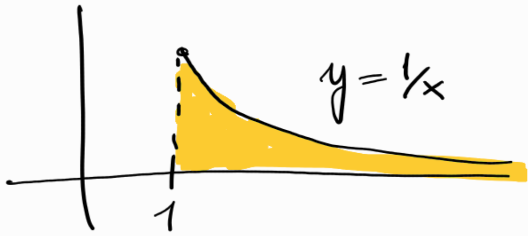


$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} =$$



$$= \lim_{\omega \to +\infty} \underbrace{\int_0^{\omega} \frac{dx}{1+x^2}}_{= \operatorname{arctg} \omega} = \lim_{\omega \to +\infty} \operatorname{arctg} \omega = \frac{\pi}{2}$$

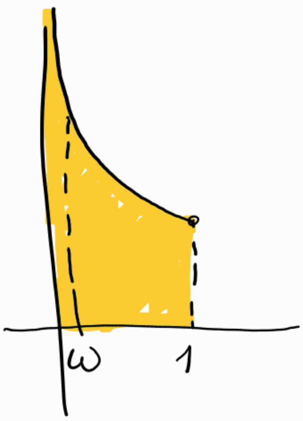
$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x} = \lim_{\omega \to +\infty} \int_1^{\omega} \frac{dx}{x} =$$



$$= \lim_{\omega \to +\infty} \log \omega = +\infty$$

Altra situazione: $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ in $[0,1]$.

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$$



In questo caso il pb. è che $\frac{1}{\sqrt{x}}$ non è limitata vicino a zero.

In questo caso definisco

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{\omega \to 0^+} \int_{\omega}^{1} \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{\omega \to 0^+} 2\sqrt{x}\Big|_{\omega}^{1} =$$

$$= \lim_{\omega \to 0^+} \left(2 - 2\sqrt{\omega}\right) = 2$$

DEF. <u>Integrale improprio.</u>

1) Supponiamo $f : [a, b) \to \mathbb{R}$ $b > a$, $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$
e che $f \in \mathcal{R}(a, \omega)$ $\forall\, \omega \in (a, b)$.

Definiamo l'integrale improprio

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\omega \to b^-} \int_a^\omega f(x)\,dx$$ se questo limite esiste.

In tal caso l'integrale improprio si dirà:

- convergente se il limite è finito
- divergente se il limite vale $\pm\infty$.

2) Supponiamo $f : (a, b] \to \mathbb{R}$ $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ t.c.
$f \in \mathcal{R}(\omega, b)$ $\forall\, \omega \in (a, b)$.
Definiamo l'integrale improprio

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\omega \to a^+} \int_\omega^b f(x)\,dx$$ se questo limite esiste

In tal caso l'integrale improprio si dirà:

- convergente se il limite è finito
- divergente se il limite vale $\pm\infty$.

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} \quad (\alpha > 0)$$ Già calcolato per $\alpha = 1$ ($\Longrightarrow$ diverge a $+\infty$).

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{\omega \to +\infty} \int_1^\omega \frac{dx}{x^\alpha} \overset{(\alpha \neq 1)}{=} \lim_{\omega \to +\infty} \frac{1}{1-\alpha} \, x^{1-\alpha} \Big|_1^\omega =$$

$$= \lim_{\omega \to +\infty} \frac{1}{1-\alpha} \left(\omega^{1-\alpha} - 1 \right) = \qquad = \begin{cases} \dfrac{1}{\alpha - 1} & \alpha > 1 \\ +\infty & 0 < \alpha < 1 \end{cases}$$

$$\omega^{1-\alpha} \to \begin{cases} +\infty & \text{se } 0 < \alpha < 1 \\ 0 & \text{se } \alpha > 1 \end{cases}$$

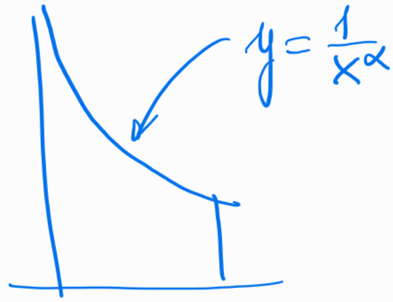
L'integrale improprio $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$ $\begin{cases} \text{converge se e solo se } \alpha > 1 \\ \text{diverge se e solo se } \alpha \leq 1. \end{cases}$

Ricorda la serie armonica generalizzata (non è un caso!)

Voglio studiare ora

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha} \qquad \alpha > 0$$

(già calcolato per $\alpha = 1/2$).



$$\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{\omega \to 0^+} \int_\omega^1 \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{\omega \to 0^+} \frac{1}{1-\alpha} x^{1-\alpha} \Big|_\omega^1$$

(se $\alpha \neq 1$; $\alpha = 1$ lo facciamo dopo)

$$= \lim_{\omega \to 0^+} \frac{1}{1-\alpha} \Big(1 - \underbrace{\omega^{1-\alpha}}_{\begin{cases} 0 & \text{se } 0<\alpha<1 \\ +\infty & \text{se } \alpha > 1 \end{cases}} \Big) = \begin{cases} \dfrac{1}{1-\alpha} & \text{se } 0 < \alpha < 1 \\ +\infty & \text{se } \alpha > 1. \end{cases}$$

Se $\alpha = 1$

$$\int_0^1 \frac{dx}{x} = \lim_{\omega \to 0^+} \int_\omega^1 \frac{dx}{x} = \lim_{\omega \to 0^+} \log x \Big|_\omega^1 =$$

$$= \lim_{\omega \to 0^+} (-\log \omega) = +\infty$$

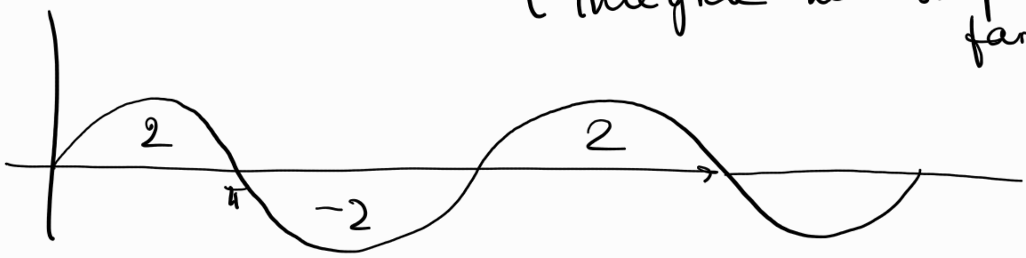
Ricapitolando:

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha} \begin{cases} \text{converge se e solo se } \alpha < 1 \\ \text{diverge se } \alpha \geq 1. \end{cases}$$

$$\int_0^{+\infty} \sin x \, dx = \lim_{\omega \to +\infty} \int_0^{\omega} \sin x \, dx =$$

$$= \lim_{\omega \to +\infty} -\cos x \Big|_0^{\omega} = \lim_{\omega \to +\infty} \underline{(1 - \cos \omega)} \nexists$$

l'integrale non si può fare!



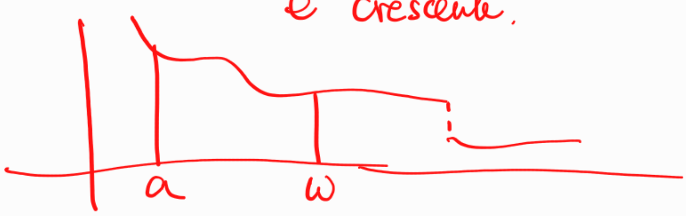
Come per le serie, in molti casi ci accontentiamo di stabilire se un integrale improprio converge oppure no, senza calcolarlo esplicitamente.

Per esempio, vorrei capire se $\int_0^{+\infty} f(x)\,dx$ converge o no.

<u>Caso importante</u>: Quello in cui $f(x) \geq 0$.

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{\omega \to +\infty} \underbrace{\int_a^{\omega} f(x)dx}_{\varphi(\omega)} \quad \exists \text{ (finito o infinito)}$$

<u>OSS.</u> se $f \geq 0$,
la funzione $\varphi(\omega) = \int_a^{\omega} f(x)dx$
è crescente.



Come per le serie. (se $f \geq 0$)

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx \text{ converge } \Leftrightarrow \varphi(\omega) \text{ limitata sup.}$$

$$\text{diverge a } +\infty \Leftrightarrow \varphi(\omega) \text{ illimitata sup.}$$

Usando questa osservazione, si possono provare i teoremi di confronto e confronto asintotico.

TEOREMA 1 Siano $f, g : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$ t.c.

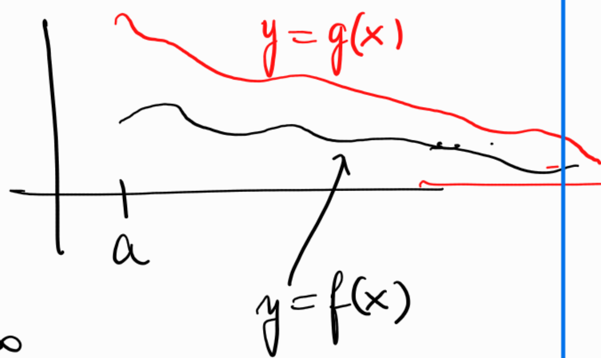
$\boxed{0 \leq f(x) \leq g(x)}$ $\forall x \in [a, +\infty)$

t.c. $f, g \in R(a, \omega)$ $\forall \omega \in (a, +\infty)$. (per esempio ok se sono continue)

Allora:

1) Se $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ converge,

anche $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ converge.



2) se $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ diverge, anche $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ diverge.

Criterio del confronto asintotico:

Siano $f(x), g(x) : [a, +\infty) \to (0, +\infty)$ continue

. Supponiamo che $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell \in (0, +\infty)$.

Allora i due integrali impropri

$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ e $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ hanno lo stesso carattere

(entrambi convergenti o entrambi divergenti).

$$\int_1^{+\infty} \frac{\overset{\sim x}{\boxed{x + 5\log x}}}{\underset{\sim x^3}{\boxed{x^3 + 3x + \sqrt{x}}}}\,dx$$ per $x \to +\infty$

$f(x) \sim \frac{1}{x^2}$ per $x \to +\infty$,

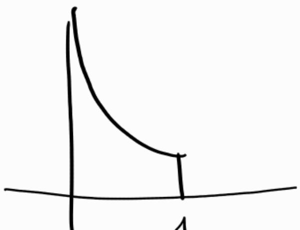
Poiché $\int^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$ converge, anche la nostra funzione ha integrale convergente.

Il teorema del confronto non vale solo se l'integrale ha un problema in $+\infty$, ma anche negli altri casi.

$$\int_0^1 \frac{3 + x^4}{x^{1/3}}\,dx$$ converge o diverge?

Il problema è per $x \to 0^+$

$\frac{3+x^4}{x^{1/3}} \sim \frac{3}{x^{1/3}}$ per $x \to 0^+$



Poiché $\int_0^1 \frac{dx}{x^{1/3}}$ converge, anche il nostro integrale converge.

Dire per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ converge l'integrale

$$\int_3^{+\infty} \underbrace{\frac{x^2-1}{(x-2)^6}\Big(\underbrace{\sin\frac{1}{x^2}}_{\sim \frac{1}{x^2}}\Big)^{\alpha}}_{f(x)}\,dx$$ e calcolarlo per $\alpha = 0$

Cerco di capire come si comporta

$$f(x) = \frac{x^2-1}{(x-2)^6}\left(\sin\frac{1}{x^2}\right)^{\alpha}$$ per $x \to +\infty$

$$\underbrace{\frac{\overbrace{x^2-1}^{\sim x^2}}{(x-2)^6}}_{\sim x^6} \underbrace{\left(\sin\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)^{\alpha}}_{\sim x^{-2\alpha}} \sim x^{2-2\alpha-6} = x^{-2\alpha-4} = \frac{1}{x^{2\alpha+4}}$$

Ricordiamo che $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{\beta}}$ converge se e solo se $\beta > 1$.

Il nostro integrale converge se e solo se $2\alpha+4>1$

$$\boxed{\alpha > -\frac{3}{2}}$$

Calcoliamolo per $\alpha = 0$ (l'integrale converge)

$$\int_3^{+\infty} \frac{x^2-1}{(x-2)^6}\,dx$$

$$\int \frac{x^2-1}{(x-2)^6}\,dx =$$

$x-2=t$
$x=2+t$
$dx=dt$

$$= \int \frac{(2+t)^2-1}{t^6}\,dt = \int \frac{t^2+4t+3}{t^6}\,dt =$$

$$= \int \left(\frac{1}{t^4}+\frac{4}{t^5}+\frac{3}{t^6}\right)dt =$$

$$= -\frac{1}{3t^3} - \frac{4}{4t^4} - \frac{3}{5t^5} + c$$

$$= -\frac{1}{3t^3} - \frac{1}{t^4} - \frac{3}{5t^5} + C$$

$$= -\frac{1}{3(x-2)^3} - \frac{1}{(x-2)^4} - \frac{3}{5}\frac{1}{(x-2)^5} + C$$

$$\int_3^{+\infty} \frac{x^2-1}{(x-2)^6}\,dx = \lim_{\omega\to+\infty} \int_3^{\omega} \frac{x^2-1}{(x-2)^6}\,dx =$$

$$= \lim_{\omega\to+\infty} \left(+ \frac{1}{3(x-2)^3} + \frac{1}{(x-2)^4} + \frac{3}{5}\,\frac{1}{(x-2)^5} \right)_{\omega}^{3} =$$

$$= \lim_{\omega\to+\infty} \left(\frac{1}{3} + 1 + \frac{3}{5} - \underbrace{\frac{1}{3(\omega-2)^3}}_{\downarrow\, 0} - \underbrace{\frac{1}{(\omega-2)^4}}_{\downarrow\, 0} - \frac{3}{5}\underbrace{\frac{1}{(\omega-2)^5}}_{\downarrow\, 0} \right) =$$

$$= \frac{1}{3} + 1 + \frac{3}{5} = \frac{5+15+9}{15} = \frac{29}{15} \qquad \square$$

TEOREMA di collegamento tra integrali impropri e serie

Sia $f : [1, +\infty) \to (0, +\infty)$ decrescente.

(Voglio confrontare tra loro $\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$ e $\sum_{k=1}^{+\infty} f(k)$)

L'integrale improprio $\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$ e la serie $\sum_{k=1}^{+\infty} f(k)$ hanno lo stesso carattere (entrambi convergenti o entrambi divergenti).

Applicazione.

$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$ converge se e solo se $\alpha > 1$.

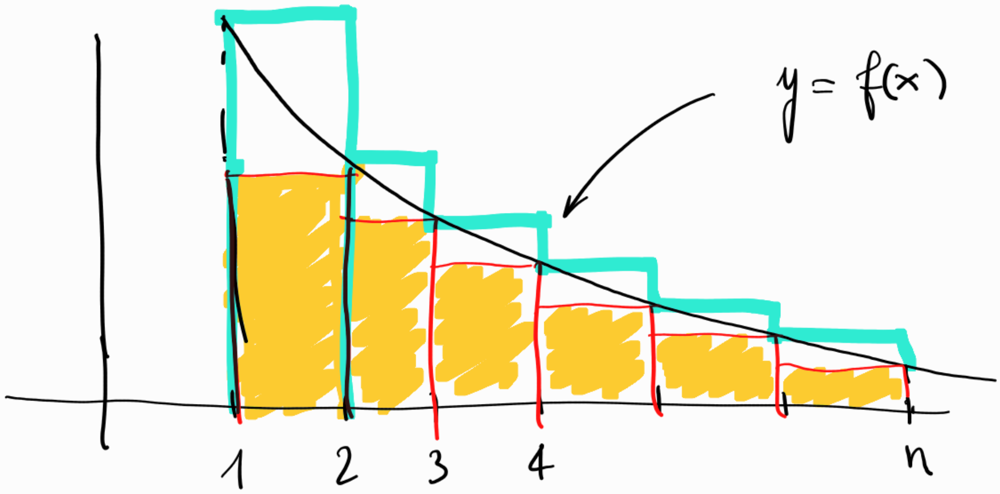
$f(x) = \frac{1}{x^\alpha}$ decrescente se $\alpha > 0$.

Il teorema ci dice che la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} f(k) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha}$$ converge se e solo se $\alpha > 1$.

Quindi abbiamo provato il carattere della serie armonica generalizzata (non avevamo fatto la dim. per $1<\alpha<2$)

Dim.



Calcolo l'area dei rettangoli gialli:

$$f(2)+f(3)+\dots+f(n)$$

Come si vede dal disegno

$$\int_1^n f(x)\,dx \geq f(2)+f(3)+\dots+f(n)=\sum_{k=2}^{n} f(k)$$

Se $\int_1^{+\infty} f$ converge, allora $\int_1^n f(x)dx$ è limitata, quindi

$\sum_{k=2}^{n} f(k)$ è limitato, quindi la serie $\sum_{k=2}^{+\infty} f(k)$ converge.

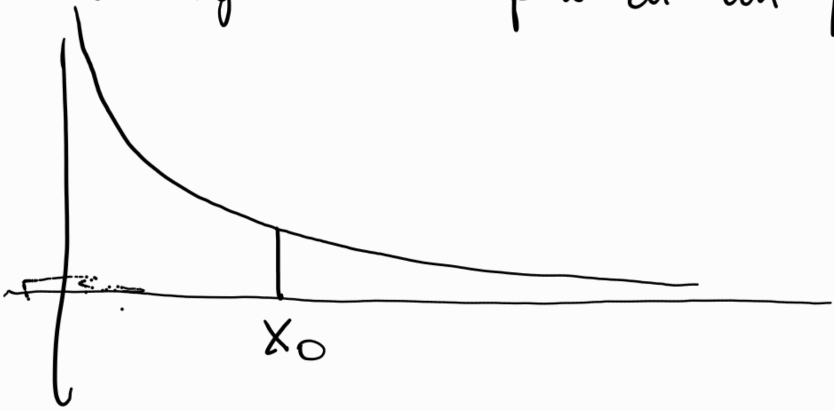
Sempre dal disegno, si ottiene

$$\int_1^n f(x)\,dx \leq f(1)+f(2)+\dots+f(n-1)=\sum_{k=1}^{n-1} f(k)$$

Se la serie converge, allora $\sum_{k=1}^{n-1} f(k)$ è limitato, quindi

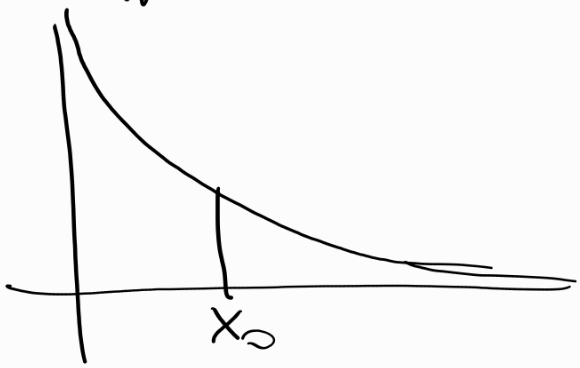
$\int_1^n f(x)dx$ è limitato, quindi l'integrale converge.

Cosa succede se l'integrale ha "più di un problema"?



Spesso gli integrali in modo da affrontare un pb. per volta.

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x} + x^2}$$



ha problemi per $x \to 0^+$ e $x \to +\infty$

Si fissa un pto intermedio x_0, per es. $x_0 = 1$, e si considerano separatamente gli integrali impropri

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x} + x^2} \quad \text{e} \quad \int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x} + x^2}$$

Se entrambi convergono, diremo che l'integrale $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x} + x}$ converge

e porremo

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x} + x^2} = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x} + x^2} + \int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x} + x^2}$$

converge perché

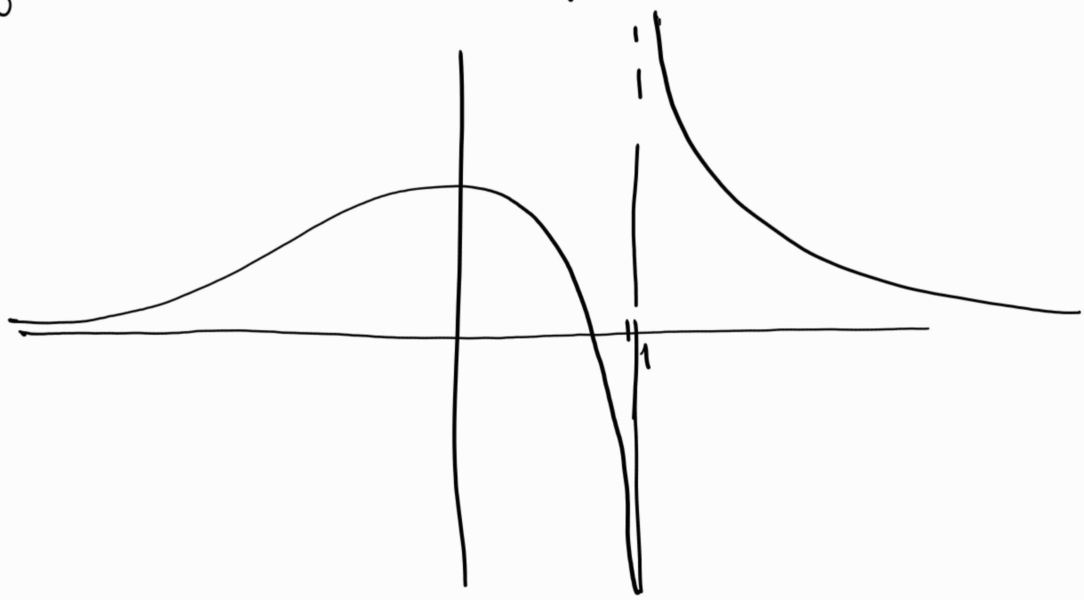
$$\frac{1}{\sqrt{x} + x^2} \sim \frac{1}{\sqrt{x}} \quad \text{per } x \to 0$$

converge perché

$$\frac{1}{\sqrt{x} + x^2} \sim \frac{1}{x^2} \quad x \to +\infty$$

Supponiamo di avere un integrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$$ con f fatta così



L'integrale "ha 4 problemi"

$x \to -\infty$
$x \to 1^-$
$x \to 1^+$
$x \to +\infty$.

Quindi posso spezzare l'integrale così:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{1} f(x)\,dx + \int_{1}^{2} f(x)\,dx + \int_{2}^{+\infty} f(x)\,dx$$

e poi si sommano, salvo che si trovi una somma $+\infty - \infty$.