Lezione Fermi 12

Luciano Maiani, AA 14-15

Buchi Neri: effetti quantistici

Sommario

Molte informazioni e figure, di questa lezione, sono prese da:
Universe, di Roger Freedman e William J. Kaufmann (2007)
La Guerra dei Buchi Neri, L. Susskind
Black Holes and Time Warps, K. Thorne

1. Entropia
2. Costante della gravtazione, unita’ naturali e Massa di Planck
3. La termodinamica di un buco nero
4. La temperatura di Hawkings
5. Epilogo

1. Entropia

- Sulla tomba di Ludwig Boltzmann (1804-1906) uno dei fondatori della Termodinamica Statistica, c'e' come epitaffio la scritta: ***S=k Log W***
- S e' l'***entropia*** di un sistema fisico, k la costante universale di Boltzmann, che converte la ***temperatura assoluta*** in ***energia***, e W e' il numero di microstati che corrispondono ad un unico stato macroscopico (k =0.86 10^{-4} eV/^{0}K $\sim 10^{-4}$ eV/^{0}K)
- l'entropia, introdotta sulla pura base di considerazioni termodinamiche, appare cosi' la misura della complessita' di un sistema
- la legge, scoperta dai termodinamici, che l'entropia di un sistema isolato non puo' che crescere, $\Delta S>0$, trova una spiegazione convincente: lasciato a se stesso, un sistema evolve verso ***stati piu' probabili***, ovvero stati che si possono realizzare in modi crescente di microstati
- un uovo puo' cadere e rompersi, ma e' estremamente improbabile che una frittata si ricomponga nell'uovo di partenza
- il concetto di probabilita' riconcilia la irreversibilita' dei fenomeni macroscopici con la reversibilita' delle leggi della meccanica, che regolano il comportamento dei costituenti elementari (atomi) della materia
- un teorema di Poincare' afferma che ogni sistema meccanico ripassa per lo stato iniziale dopo un certo tempo, ma se l' stato iniziale e' l'uovo, il tempo per ritornarci a partire dalla frittata supera ampiamente il tempo di vita del nostro Universo

Energia e Entropia in termodinamica

$$\text{Primo Principio}: \quad dU = \delta L + \delta Q$$

$$\text{Secondo Principio}: \quad dS = \frac{(\delta Q)_{rev}}{T}$$

- Il ***Primo Principio*** riguarda l' Energia, U, che e' una "funzione di stato" del sistema: dipende cio' dalle variabili che definiscono lo stato, ma non dipende da come ci siamo arrivati;
- l'energia si puo' cambiare in modi diversi, compiendo lavoro sul sistema, δL, es. comprimendo, e comunicando calore, δQ
- queste due forme di energia non sono funzioni di stato, non corripondono ad una proprieta' del sistema, e i loro valori possono cambiare a seconda del tipo di trasformazione scelta, ad es. comunichiamo calore scaldando, o per frizione, o altro, ma la somma δL+δQ, esprime una proprieta' intrinseca del sistema, la variazione della sua energia
- in gergo: δL e δQ non sono ***differenziali esatti*** (variazioni di una funzione delle variabili di stato); il Primo Principio afferma che la loro somma lo e'.
- Il **Secondo Principio** afferma che 1/T e' un fattore integrante di δQ, cioe' che la moltiplicazione per 1/T produce un differenziale esatto, dS (la specifica "rev" chiede che δQ sia comunicato in modo "reversibile", in pratica molto, molto lentamente)
- Lord Kelvin dimostra che ***1/T e' l'unico fattore integrante di δQ***, a meno di una costante moltiplicativa
- ovvero: se calcoliamo dS con Boltzmann (dalla variazione di W) e conosciamo il δQ corrispondente ***allora possiamo definire T= δQ/dS***

Entropia e bits

- L'Entropia e' informazione.
- supponiamo di avere un sistema fatto di bit: n celle in cui ci puo' essere 1 o 0. Quante configurazioni (parole) ci sono? e qual'e' l'entropia?
  - ogni bit puo' stare un due stati, quindi ho 2^n configurazioni
  - poniamo $S=k\,\sigma$ e usiamo Boltzmann: $\sigma= \text{Log}\,(2^n)=n\,\text{Log}\,2$; $S=kn\,\text{Log}2$
- Quanto varia S se aggiungiamo 1 bit?
  - $d\sigma=\sigma(n+1)-\sigma(n)=\text{Log}2$, $dS=k\,\text{Log}2 \sim k$
- nel seguito consideriamo solo ordini di grandezza, quindi diremo che $(d\sigma)_{1bit} = 1$, $dS_{\,1bit} = k$

2. Costante della gravitazione, Unita' Naturali e Massa di Planck

- la costante della gravitazione di Newton, G, caratterizza l'intensita' delle forze:
  - $F=GMm/r^2$; $\Phi=-GMm/r=$ energia=[E]
- unita' naturali: c= $\hbar = 1$,
  - [c]=[lt^{-1}];[$\hbar$]=[E t]
  - [m]=E; [l]=[E^{-1}]; [G]=[Em^{-2} l]=[m^{-2}]
- usando c e $\hbar$, G si puo' esprimere come l'inverso di una massa al quadrato, la Massa di Planck, ovvero come il quadrato di una lunghezza, la Lunghezza di Planck, ovvero come un tempo al quadrato, il tempo di Planck:

$$\frac{G}{\hbar c} = 6.71\ 10^{-39}\ \text{GeV}^{-2}$$

$$M_{Pl} = \frac{1}{\sqrt{G}} = 1.22\ 10^{19}\ \ \text{GeV}$$

$$L_{Pl} = 1.61\ 10^{-33}\ \text{cm} = 1.61\ 10^{-20}\ \text{fermi}$$

La Gravita' vive su scale di energia e lunghezza completamente estranee al mondo nucleare
E' il ***Problema della Gerarchia*** con cui ci confrontiamo ormai da un secolo

3. Termodinamica di un buco nero

- Che succede su butto un secchio d'acqua in un buco nero (o un frigorifero, un televisore, etc.)?
  - l'Universo fuori del buco nero perde entropia,
  - se il buco nero non avesse entropia (no-hair theorem ???) l'entropia dell'Universo diminuirebbe
  - ?????
- J. Bekenstein, nel 1973, concluse che un buco nero ***deve*** avere un'entropia, in modo da salvare il Secondo Principio, e propose un modo per stimarla
  - supponiamo di buttare un fotone all'orizzonte del buco nero
  - vogliamo che il fotoni porti un solo bit di informazione (c'e' o non c'e') in modo che sia $d\sigma=1$
  - per avere un solo bit, il fotone deve entrare appena nel BH, quindi avere $\lambda=R_s$, ovvero $E=h\nu=h/R_s=h/(GM)$
  - la variazione di massa del buco nero e' $dM \sim h/R_s$,
  - la variazione del Raggio di S e' $d\,R_s= hG/R_s$,
  - la variazione dell'area della sfera di raggio R_s ($A=4\pi\, R_s^2$) e' $dA\sim R_s d\, R_s \sim hG$
- La variazione di area corrispondente ad 1 bit e' 1 area di Planck!!
- $(d\sigma)_{1bit}$ corrisponde ad un'area di $1L_{Pl}^2$,
- quindi l'entropia di un BH di area A e': $\sigma \approx \dfrac{A}{L_{Pl}^2}$,

$$\boxed{S = k\frac{A}{L_{Pl}^2} = k\frac{(GM)^2}{L_{Pl}^2} = kGM^2}$$

4. La temperatura di Hawkings

- abbiamo trovato che $(d\sigma)_{1bit}$ corrisponde ad un $\delta Q = dM \sim h/R_s$
- possiamo usare la definizione di T data prima per trovare

$$kT = \frac{\delta Q}{d\sigma} \approx \frac{hR_s}{1} = \frac{h}{GM} \approx \frac{M_{Pl}^2}{m_p B_{Sun}}$$

$$kT = 1.3\ 10^{-10}\ \mathrm{eV}\ \frac{M_{Sun}}{M}$$

- a meno di fattori numerici, questo e' proprio il risultato trovato da Hawkings
- che si indica anche dicendo che la temperatura e' circa pari alla accelerazione di gravita' all'orizzonte, che vale $GM/R_s^2 = GM/(2GM)^2 = 1/(4GM)$
- Le formula precise trovate da Hawkings sono:

$$S = k\frac{A}{4L_{Pl}^2} = k\frac{\pi R_s^2}{L_{Pl}^2} = k(4\pi GM^2)$$

$$(kT)^{-1} = \frac{dS}{\delta Q} = \frac{\partial S}{\partial M} = 8\pi GM$$

$$kT = \frac{M_{PL}^2}{8\pi m_p B_{Sun}} \frac{M_{Sun}}{M} \approx 5.3\ 10^{-12}\ \mathrm{eV}\ \frac{M_{Sun}}{M} \approx 5.3\ 10^{-8}\ {}^0\mathrm{K}\ \frac{M_{Sun}}{M}$$

la radiazione di Hawkings

- Un buco nero quindi si comporta come un corpo nero a temperatura T,
- non e' assolutamente nero, perche' irraggia energia con lo spettro di Planck alla temperatura T
- per tutte i BH di origine astronomica, la temperatura del BH e' inferiore alla temperatura cosmica di oggi (circa 3 ^{0}K)
- ..e la dimostrazione dell'esistenza di questa temperatura, di enorme valore concettuale, non ha implicazioni pratiche al momento
- gli sviluppi successivi
  - A. Strominger e C. Vafa calcolano l'entropia di una black hole supersymmetrica nella teoria delle stringhe, ritrovando il risultato di Bekenstein-Hawkings
  - G. 't-Hooft e L. Susskind usano la termodinamica del BH per arguire a favore del Principio Olografico, che asserisce che una teoria quantistica della gravita' deve poter essere mappata in una teoria con un numero minore di dimensioni, un principio centrale per la dimostrazione dell'equivalenza tra gravita' in AntideSitter space e teorie di campo con Invarianza Conforme

5. Epilogo

- Quando i buchi neri al centro delle galassie si saranno mangiati tutte le stelle e i gas e quando la temperatura del Cosmo sara' scesa al di sotto della temperatura di Hawkings dei buchi neri
- i buchi neri inizieranno a perdere energia per irraggiamento
- -> la massa diminuisce-> la temperatura sale ->l'irraggiamento cresce
- ogni buco nero evaporera' in uno stato finale che conserva la carica elettrica totale (che e' zero), il momento angolare, e niente altro!!
- che fine fa il numero barionico?
- sembra dire che non ci sono leggi di conservazione assolute per quantita' che non siano accoppiate a campi di gauge di massa zero
- e' proprio l'argomento che ha condotto Sakarov a pensare che il n. barionico sia violato
- possiamo dimostrarlo con la quantum gravity ?????

- la regola aurea dei seminari dice che lo speaker, verso la fine del seminario, puo' parlare anche di cose che personalmente non capisce..e poi deve tacere
- e' arrivato il momento di tacere