OSS Se cambio un termine della serie, per esempio a_{k_0} per $n \geq k_0$ la successione S_n cambia rispetto a prima di una costante, e quindi il carattere della serie resta lo stesso. Quindi questo resta vero anche cambiando un numero finito di termini. Quindi se due successioni a_k e $\tilde{a}_k$ sono uguali definitivamente per $k \to +\infty$, le serie $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k$ e $\sum_{k=0}^{+\infty} \tilde{a}_k$ hanno lo stesso carattere.

Per questo in molti criteri sul carattere della serie basterà imporre che le ipotesi su $\{a_k\}$ siano vere definitivamente.
Per esempio, una serie <u>definitivamente</u> a termini non negativi ($a_k \geq 0 \quad \forall k \geq k_0$) può solo convergere o divergere.

CRITERIO del CONFRONTO

Siano $\{a_k\}$, $\{b_k\}$ due succ^{ni} t.c.

$$0 \leq a_k \leq b_k \quad \forall k \in \mathbb{N}. \quad (*)$$

(in realtà basta che sia vero definitivamente)

Allora:

1) se $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ converge, anche $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ converge;

2) se $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ diverge, anche $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ diverge.

DIM 1) Siano $S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$, $t_n = \sum_{k=0}^{n} b_k$

Per l'ipotesi $(*)$ si ha $S_n \leq t_n$.

se $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ converge $\Rightarrow$ le t_n sono limitate superiormente
$\Rightarrow$ le S_n sono limitate superiorm. $\Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} a_k$ converge

2) Supponiamo ora che $\sum_{k=0}^{\infty} a_k = +\infty$

Se $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ convergesse $\Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} a_k$ convergerebbe, ma ciò è falso.

$\Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} b_k = +\infty$. $\square$

Applicazioni:

$$\sum_{k=2}^{\infty} \underbrace{\frac{\log k}{k}}_{a_k}$$

OSS $a_k \geq \frac{\log 2}{k}$

$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ diverge $\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\log 2}{k}$ diverge $\Rightarrow \sum_{k=2}^{\infty} a_k$ diverge a $+\infty$.

oppure $\frac{\log k}{k} \geq \frac{1}{k}$ definitivamente

$\Rightarrow$ poiché la serie $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k}$ diverge $\Rightarrow$ anche $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{\log k}{k}$ diverge.

$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k 2^k}$ è una serie a termini positivi

OSS $\frac{1}{k 2^k} \leq \frac{1}{2^k}$

La serie $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k}$ converge (serie geometrica di ragione $\frac{1}{2}$)

quindi $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k 2^k}$ converge

Per verificare la convergenza/divergenza di una serie a termini positivi, bisogna capire "quanto velocemente" i termini a_k della serie tendono a zero.

Per fare confronti, sono particolarmente utili:

- La serie geometrica $\sum_{k=0}^{\infty} r^k$

- La serie armonica generalizzata $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha}$ $(\alpha \in \mathbb{R})$

TEOREMA La serie armonica generalizzata

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha}$$

- diverge se $\alpha \leq 1$.
- converge se $\alpha > 1$.

DIM. Parziale (manca il caso $1<\alpha<2$.)

Se $\boxed{\alpha \leq 0}$, $a_k \not\to 0 \Rightarrow$ la serie non converge $\Rightarrow$ diverge.

Se $\boxed{0 < \alpha \leq 1}$, si ha $k^\alpha \leq k$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{k^\alpha} \geq \frac{1}{k} \Longrightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha} \text{ diverge.}$$

La serie $\sum \frac{1}{k}$ diverge

$\boxed{1<\alpha<2}$ dim. in seguito.

$\boxed{\alpha = 2}$ $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$

confronto con la serie di Mengoli $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)}$, che converge.

Si ha $\frac{1}{k^2} \leq \frac{2}{k(k+1)} \quad \forall k \geq 1$

$$\Updownarrow$$

$$\frac{1}{k} \leq \frac{2}{k+1} \iff k+1 \leq 2k \iff k \geq 1$$

Poiché la serie $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{k(k+1)}$ converge, anche $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ converge

$\boxed{\alpha > 2}$ $\quad \frac{1}{k^\alpha} < \frac{1}{k^2}$. Poiché $\sum \frac{1}{k^2}$ converge, anche

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha} \text{ converge.} \qquad \square$$

Domani lezione alle 14:30 fino alle 17:30 – 18:00

CRITERIO del CONFRONTO ASINTOTICO.

Siano $\{a_k\}$, $\{b_k\}$ due successioni a termini positivi.
Supponiamo che $\exists \lim_{k\to+\infty} \frac{a_k}{b_k} = \ell \in [0,+\infty]$. Allora.

1) se $\ell \in (0,+\infty)$, allora le serie $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ e $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ hanno lo stesso carattere (entrambe convergenti o divergenti).

DIM se $\frac{a_k}{b_k} \to \ell \in (0,+\infty)$, definitivamente si avrà

$$\frac{\ell}{2} < \frac{a_k}{b_k} < \frac{3\ell}{2}$$

cioè $\frac{\ell}{2} b_k < a_k < \frac{3}{2}\ell\, b_k$. definitivamente per $k\to\infty$

Se $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ converge, anche $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{3}{2}\ell\, b_k$ converge e quindi (confronto) $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ converge.

se $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ converge, (confronto) anche $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\ell}{2} b_k$ converge, e quindi $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ converge. $\square$

- Se $\ell = +\infty$, cioè $\frac{a_k}{b_k} \to +\infty$

allora def^{te} si ha $\frac{a_k}{b_k} > 1$, cioè $a_k > b_k$ def^{te}

e quindi
- se $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ converge, anche $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ converge
- se $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ diverge, anche $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ diverge

- Se $\ell = 0$, cioè $\frac{a_k}{b_k} \to 0$, allora $\frac{b_k}{a_k} \to +\infty$

quindi valgono le conclusioni del punto precedente a ruoli invertiti:
- se $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ converge, anche $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ converge
- se $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ diverge, anche $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ diverge

Esempi:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k+7}{3k-k^2+4k^4}$$

$$a_k = \frac{k+7}{3k-k^2+4k^4} \sim \frac{1}{4k^3} \qquad \text{per } k \to +\infty$$

questo in particolare ci dice che la serie è definitamente a termini positivi.

cioè

$$\frac{a_k}{1/k^3} \to \frac{1}{4}$$

Poiché la serie $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3}$ converge (serie armonica generalizzata)

anche la serie $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ converge

$$\sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{(k+5) \sin\left(\frac{2}{k^2+\sqrt{k}}\right)}_{a_k}$$

$$a_k = \underbrace{(k+5)}_{\sim k} \underbrace{\sin\left(\frac{2}{k^2+\sqrt{k}}\right)}_{\sim \frac{2}{k^2+\sqrt{k}} \sim \frac{2}{k^2}} \sim k \cdot \frac{2}{k^2} = \frac{2}{k}$$

$\frac{2}{k^2+\sqrt{k}} \to 0$

Poiché $\sum \frac{1}{k}$ diverge, anche $\sum a_k$ diverge.

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2 \log(1+k)} \qquad a_k$$

Confronto asintotico con $\frac{1}{k^2}$

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{a_k}{1/k^2} = \lim_{k\to+\infty} \frac{1}{\log(1+k)} = 0$$

Poiché $\sum \frac{1}{k^2}$ converge, anche $\sum a_k$ converge

---

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\log(1+k)}{k^2}$$

Se faccio il confronto asintotico con $\frac{1}{k^2}$,
ottengo $\lim \frac{a_k}{1/k^2} = +\infty$, e quindi non posso dire nulla
perché $\sum \frac{1}{k^2}$ converge

Faccio il confronto con $\frac{1}{k^{3/2}}$

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{a_k}{1/k^{3/2}} = \lim k^{3/2} \frac{\log(1+k)}{k^2} = \lim_{k\to+\infty} \frac{\log(1+k)}{\sqrt{k}} = 0$$

Poiché $\sum \frac{1}{k^{3/2}}$ converge, anche $\sum a_k$ converge

---

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \sin \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

$$\downarrow$$
$$0$$

$$\sin t = t - \frac{t^3}{6} + o(t^3) \qquad \text{per } t \to 0$$

$$\operatorname{sen}\frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{6n^{3/2}} + o\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right) \qquad n\to+\infty$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{\sqrt{n}} - \sin\frac{1}{\sqrt{n}} = \cancel{\frac{1}{\sqrt{n}}} - \cancel{\frac{1}{\sqrt{n}}} + \frac{1}{6n^{3/2}} + o\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right) \sim \frac{1}{6n^{3/2}}$$

La serie converge perché $\frac{3}{2} > 1$.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt[3]{8n^3+3n} - 2n\right)^{\alpha} \qquad \text{Per quali } \alpha\in\mathbb{R} \text{ converge?}$$

$$\sqrt[3]{8n^3+3n} - 2n = 2n\left(\sqrt[3]{1+\frac{3\cancel{n}}{8n^{\cancel{3}\,2}}} - 1\right) =$$

$$= 2n\underbrace{\left(\sqrt[3]{1+\frac{3}{8n^2}} - 1\right)}_{\frac{1}{8n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\sim\frac{1}{8n^2}} \sim \frac{2n}{8n^2} = \frac{1}{4n}$$

$$\sqrt[3]{1+t} = 1 + \frac{t}{3} + o(t) \qquad \text{per } t\to 0$$

$$\sqrt[3]{1+\frac{3}{8n^2}} = 1 + \frac{1}{8n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \qquad \text{per } n\to+\infty$$

$$\left(\sqrt[3]{8n^3+3n} - 2n\right)^{\alpha} \sim \left(\frac{1}{4n}\right)^{\alpha} = \frac{1}{4^{\alpha}\, n^{\alpha}}$$

Per il confronto con la serie armonica generalizzata, la serie data converge se e solo se $\alpha > 1$.
Per $\alpha \leq 1$ diverge.

Altri due criteri per serie a termini positivi.

Criterio del rapporto per le serie.

Sia $\{a_k\}$ una succ^{ne} a termini def^{te} positivi.
Supponiamo che

$$\exists \lim_{k \to +\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \ell .$$

- Se $\ell \in (1, +\infty]$ (criterio del rapporto per successioni) allora $a_k \to +\infty$ e quindi $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ diverge a $+\infty$

- Se $\ell \in [0, 1)$, allora $a_k \to 0$, che non basta per concludere.
Tuttavia (vedere la dim. del criterio del rapporto per succ^{ni}) si dimostra che, $\forall\, m$ t.c. $\ell < m < 1$ si ha definitivamente $a_k < C\, m^k$.
Poiché la serie geom. $\sum_{k=0}^{\infty} m^k$ converge $(m<1)$, anche $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ converge, per il confronto.

Il teor. non dice nulla quando $\ell = 1$.

Esempio $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^k}{k!}$ a_k.

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{2^{\cancel{k+1}}}{(k+1)\cancel{!}} \frac{\cancel{k!}}{\cancel{2^k}} = \frac{2}{k+1} \longrightarrow 0 < 1$$

$\Rightarrow$ la serie converge.

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{3^k}{k^2} \quad a_k \qquad\qquad \frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{3^{\cancel{k+1}}}{(k+1)^2} \frac{k^2}{\cancel{3^k}} \longrightarrow 3 > 1$$

$\downarrow$
1

$\Rightarrow$ la serie diverge.

OSS In tutti i casi in cui $a_k \sim c k^{\alpha}$
il limite viene 1, quindi in questo caso il criterio è inutile.

Vale anche un criterio "gemello":

CRITERIO DELLA RADICE

Sia $\{a_k\}$ una succ^{ne} a termini def^{te} positivi.

Supponiamo che $\exists \lim_{k \to +\infty} \sqrt[k]{a_k} = \ell.$

Allora:

1) se $\ell \in (1, +\infty]$, allora la serie $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ diverge a $+\infty$.

2) se $\ell \in [0, 1)$, allora la serie $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ converge.

DIM. 1) Supponiamo $\sqrt[k]{a_k} \to \ell > 1$.

Def^{te} $\sqrt[k]{a_k} > 1 \Rightarrow a_k > 1^k = 1$ def^{te}

$\rightarrow a_k \not\to 0 \Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} a_k$ diverge.

2) Supponiamo $\sqrt[k]{a_k} \to \ell < 1$.

Sia m t.c. $\ell < m < 1$

Si ha def^{te} $\sqrt[k]{a_k} < m$

cioè $a_k < m^k$ def^{te}

Poiché $\sum_{k=0}^{\infty} m^k$ converge, (serie geometrica di ragione $m \in (0,1)$),

anche $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ converge. $\square$

Anche qui, se $\ell = 1$ non si può dire nulla.

Applicazione:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{\left(1+\frac{1}{k}\right)^{-k^2}}_{a_k}$$

$$\sqrt[k]{a_k} = \left[\left(1+\frac{1}{k}\right)^{-k^2}\right]^{\frac{1}{k}} = \left(1+\frac{1}{k}\right)^{-k} \xrightarrow[k\to+\infty]{} \frac{1}{e} < 1$$

Quindi $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ converge.

Si può dimostrare che

se esistono $\lim_{k\to+\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k}$ e $\lim_{k\to+\infty} \sqrt[k]{a_k}$,

questi due limiti sono uguali.

Esercizi sulle serie a termini positivi:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{\left(\operatorname{tg}\left(\frac{2}{k}\right) - \frac{\alpha}{k}\right)}_{a_k}$$

Se $\alpha < 2 \Rightarrow \operatorname{tg}\frac{2}{k} - \frac{\alpha}{k} = \frac{1}{k}\underbrace{\left(\underbrace{\boxed{\frac{\operatorname{tg}\left(\frac{2}{k}\right)}{1/k}}}_{\downarrow\, 2} - \alpha\right)}_{\downarrow\, 2-\alpha} \sim \frac{2-\alpha}{k}$ ($2-\alpha > 0$)

$\Rightarrow a_k$ def^{te} positiva

La serie diverge a $+\infty$ per confronto asintotico con la serie armonica.

Se $\alpha > 2$, $a_k = \text{tg}\,\frac{2}{k} - \frac{\alpha}{k} \sim \frac{2-\alpha}{k}$ negativo.

$\Rightarrow a_k$ def^{te} negativo

Quindi $-a_k$ è def^{te} positivo.

$-a_k \sim \frac{\alpha - 2}{k}$ >0 $\Rightarrow$ la serie $\sum_{k=0}^{\infty}(-a_k)$ diverge a $+\infty$

$\Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} a_k$ diverge a $-\infty$.

Se $\alpha = 2$

$$a_k = \text{tg}\,\frac{2}{k} - \frac{2}{k} = \cancel{\frac{2}{k}} + \frac{8}{3k^3} + o\left(\frac{1}{k^3}\right) - \cancel{\frac{2}{k}} \sim \frac{8}{3k^3}$$

$\text{tg}\, t = t + \frac{t^3}{3} + o(t^3)$ per $t \to 0$

$\frac{2}{k} \to 0$, lo metto al posto di t.

$\text{tg}\,\frac{2}{k} = \frac{2}{k} + \frac{8}{3k^3} + o\left(\frac{1}{k^3}\right)$ per $k \to +\infty$

La serie converge per confronto con la serie $\sum \frac{1}{k^3}$

Riassunto: se $\alpha < 2$, la serie diverge a $+\infty$

se $\alpha > 2$, " " " " $-\infty$

se $\alpha = 2$, la serie converge.

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k$$

Se $a_k \sim -\frac{3}{\sqrt{k}}$, la serie è def^{te} a termini negativi.

e diverge a $-\infty$.

Se $a_k \sim -\dfrac{2}{k^2}$, la serie è def^{te} a termini negativi, e converge.