Gli argomenti di questa settimana non saranno presenti nella prova pratica del 13 gennaio (ma potranno essere chiesti nelle prove di teoria dello stesso appello e in tutti gli appelli successivi).

Domani "Assaggi di Magistrale" alle 8:00 in Aula 7.
Analisi I dalle 12:00 alle 15:00.

Oggi esercitazione in Aula 9 dalle 14:00

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin^3 x \cos x}{1+\sin^2 x}\,dx = \int_0^0 \frac{t^3}{1+t^2}\,dt = 0 \qquad \boxed{\text{corretto!}}$$

$\sin x = t$
$\cos x\, dx = dt$
$x = 0 \Rightarrow t = 0$
$x = \pi \Rightarrow t = 0$

$$\int_0^{\pi} \sin^2 x\,dx \overset{\text{NO}}{=} \int_0^0 \frac{t^2}{1+t^2}\frac{dt}{1+t^2} = 0$$

Errato perché $\operatorname{tg} x$ non è definita in $x = \frac{\pi}{2}$

$t = \operatorname{tg} x$
$x = \operatorname{arctg} t + \cancel{k\pi}$
$dx = \frac{dt}{1+t^2}$
$\sin^2 x = \frac{t^2}{1+t^2}$

$x = 0 \Rightarrow t = 0$
$x = \pi \Rightarrow t = 0$

$\| \quad \pi/2$

già calcolato in passato.

Se volessi usare questa sostituzione, dovrei spezzare l'integrale

$$\int_0^{\pi} \sin^2 x\,dx = \boxed{\int_0^{\pi/2} \sin^2 x\,dx} + \int_0^{\pi/2} \sin^2 x\,dx$$

$$\overset{t=\operatorname{tg} x}{=} \int_0^{+\infty} \frac{t^2}{(1+t^2)^2}\,dt$$

oss se $x \to \left(\frac{\pi}{2}\right)^-$, $\operatorname{tg} x \to +\infty$

integrale improprio, da vedere.

Serie numeriche (somme infinite)

Sono le somme formali di una successione di termini.

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \dots \qquad (= +\infty)$$

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \dots \qquad \left(= \frac{\pi^2}{6}\right)$$

$$0,\overline{3} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{3}{10^k} = \frac{3}{10} + \frac{3}{100} + \frac{3}{1000} + \dots \qquad \left(= \frac{1}{3}\right)$$

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \dots \qquad (= e)$$

Data una serie $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k$, cioè la somma formale di una successione assegnata $\{a_n\}$, si definisce la successione delle **somme parziali n-esime**

$$\boxed{S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k}$$

DEF Sia $\{a_k\}$ una succ^{ne} di numeri reali.
La serie $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k$ si dice:

- **convergente** se la successione delle somme parziali $S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$ converge a un numero $s \in \mathbb{R}$.

In tal caso s si dice **somma della serie**, e scriveremo

$$\sum_{k=0}^{+\infty} a_k = s.$$ In altre parole $s = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k$

- **divergente** (a $+\infty$ oppure $-\infty$) se la successione $\{s_n\}$ è divergente a $+\infty/-\infty$.
- **irregolare** se $\{s_n\}$ non ha limite.

Il **carattere di una serie** è la proprietà di essere convergente/divergente/irregolare.

Esempio: <u>serie geometrica</u> $\sum_{k=0}^{\infty} r^k$, dove $r \in \mathbb{R}$ (ragione della serie).

<u>TEOREMA</u> La serie geometrica $\sum_{k=0}^{\infty} r^k$:

- converge se $|r| < 1$, cioè $-1 < r < 1$.
  In tal caso la somma vale
  $$S = \sum_{k=0}^{\infty} r^k = \frac{1}{1-r}$$
  $\left(\text{per es se } r = \frac{1}{2} \text{ viene } \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} = 2\right)$
- diverge a $+\infty$ se $r \geq 1$
- è irregolare se $r \leq -1$.

<u>DIM</u> $S_n = \sum_{k=0}^{n} r^k$. Mostriamo che

$$S_n = \begin{cases} \dfrac{1-r^{n+1}}{1-r} & \text{se } r \neq 1 \\ n+1 & \text{se } r = 1. \end{cases} \quad (*)$$

Proviamo la (*).

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} r^k = 1 + r + r^2 + \dots + r^n \overset{?}{=} \frac{1-r^{n+1}}{1-r}$$

$$\underbrace{(1-r)(1+r+r^2+\dots+r^n)}_{\shortparallel} \overset{?}{=} 1 - r^{n+1}$$

$$1 + \cancel{r} + \cancel{r^2} + \cancel{\dots} + \cancel{r^n} + $$
$$- \cancel{r} - \cancel{r^2} - \cancel{r^3} \quad - \cancel{r^n} - r^{n+1} = 1 - r^{n+1}.$$

Se $|r| < 1$, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{1 - r^{n+1}}{1-r} = \frac{1}{1-r}$ $\quad (r^{n+1} \to 0)$

se $r > 1$ $\quad \displaystyle\lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{1 - r^{n+1}}{1-r} = \frac{-\infty}{1-r} = +\infty$ $\quad (r^{n+1} \to +\infty,\ 1-r < 0)$

se $r = 1$ $\quad \displaystyle\lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} (n+1) = +\infty$

se $r \leq -1$ $\quad \displaystyle\lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{1-r^{n+1}}{1-r} \not\exists$ $\qquad \square$

se $r = -1$ $\quad S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k = \begin{cases} 1 & \text{se } n \text{ è pari} \\ 0 & \text{se } n \text{ è dispari} \end{cases}$

Per esempio, quanto vale

$$0,\overline{3} = \frac{3}{10} + \frac{3}{100} + \frac{3}{1000} + \dots = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{3}{10^k} = 3 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{10^k} =$$

da giustificare.

$$= 3 \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{10}\right)^k = 3 \left(\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{10}\right)^k - 1 \right) =$$

$$= 3 \cdot \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{10}} - 1 \right) = 3 \left(\frac{10}{9} - 1 \right) = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$$

$$0,23\overline{47} = 0,2347474747\ldots =$$

$$= \frac{23}{100} + \frac{47}{10^4} + \frac{47}{10^6} + \frac{47}{10^8} + \ldots =$$

$$= \frac{23}{100} + \frac{47}{10^4}\left(1 + \frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^4} + \ldots\right) =$$

$$= \frac{23}{100} + \frac{47}{10^4} \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{10^{2k}}} = \frac{23}{100} + \frac{47}{10^{\cancel{4}2}} \cdot \cancel{\frac{100}{99}} =$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{100^k} = \frac{1}{1-\frac{1}{100}} = \frac{100}{99}$$

$$= \frac{23}{100} + \frac{47}{9900}$$

OSS $\quad 0,\overline{9} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{9}{10^k} = 9 \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{10}\right)^k =$

$$= \frac{9}{10} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{10}\right)^{k-1} = \frac{9}{10} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{10}\right)^k = \frac{9}{10} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{10}} =$$

$$= 1$$

Proprietà elementari delle serie.

1) Se $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ e $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ sono serie convergenti, allora $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$. la serie

$$\sum_{k=0}^{\infty} (\alpha a_k + \beta b_k) \text{ converge a } \alpha \sum_{k=0}^{\infty} a_k + \beta \sum_{k=0}^{\infty} b_k$$

(linearità della serie)

DIM

$$\sum_{k=0}^{n} (\alpha a_k + \beta b_k) = \alpha \underbrace{\sum_{k=0}^{n} a_k}_{\to \sum_{k=0}^{\infty} a_k} + \beta \underbrace{\sum_{k=0}^{n} b_k}_{\to \sum_{k=0}^{\infty} b_k} \to \alpha \sum_{k=0}^{\infty} a_k + \beta \sum_{k=0}^{\infty} b_k$$

2) Se $\underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} a_k = +\infty}_{\text{cioè la serie diverge a } +\infty}$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, $\sum_{k=0}^{\infty} (\alpha a_k) = \begin{cases} +\infty & \text{se } \alpha > 0 \\ 0 & \alpha = 0 \\ -\infty & \text{se } \alpha < 0 \end{cases}$

Dim. simile a quella di prima

Serie di Mengoli

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \frac{1}{4\cdot 5} + \dots = 1$$

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$$

<u>OSS</u> $\quad \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$

$$S_n = \left(1 - \cancel{\frac{1}{2}}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{2}} - \cancel{\frac{1}{3}}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{3}} - \cancel{\frac{1}{4}}\right) + \dots + \left(\cancel{\frac{1}{n}} - \frac{1}{n+1}\right) =$$

$$= 1 - \frac{1}{n+1} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1.$$

Questo è un caso particolare di "serie telescopiche", che sono le serie della forma

$$\sum_{k=0}^{\infty} (b_k - b_{k+1})$$

$$S_n = (b_0 - \cancel{b_1}) + (\cancel{b_1} - \cancel{b_2}) + (\cancel{b_2} - \cancel{b_3}) + \dots + (\cancel{b_n} - b_{n+1}) =$$

$$= b_0 - b_{n+1}$$

$$\lim_{n \to +\infty} S_n = b_0 - \lim_{n \to +\infty} b_{n+1} = b_0 - \lim_{n \to +\infty} b_n$$

Esempio

$$\sum_{k=1}^{\infty} \log\left(\frac{k}{k+1}\right) = \log\frac{1}{2} + \log\frac{2}{3} + \log\frac{3}{4} + \dots =$$

OSS $\log\left(\frac{k}{k+1}\right) = \log k - \log(k+1)$ è una serie telescopica!

$$S_n = (\underbrace{\log 1}_{=0} - \cancel{\log 2}) + (\cancel{\log 2} - \cancel{\log 3}) + \cancel{\dots} + \cancel{\log n} - \log(n+1) =$$

$$= -\log(n+1) \xrightarrow[n \to +\infty]{} -\infty$$

Nella maggioranza dei casi non è possibile scrivere formule semplici per S_n. Ci si accontenta spesso di criteri per stabilire il carattere della serie (convergente, divergente, irregolare)

CONDIZIONE NECESSARIA per la convergenza di una serie

Se la serie $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ converge, allora $\lim_{k \to +\infty} a_k = 0$.

Dim. Se la serie converge, allora $\lim_{n \to +\infty} S_n = S \in \mathbb{R}$.

Si ha $\underbrace{s_{n-1}}_{= \sum_{k=0}^{n-1} a_k} + a_n = s_n \Rightarrow a_n = \underbrace{s_n}_{\downarrow s} - \underbrace{s_{n-1}}_{\downarrow s} \to s - s = 0$ $\square$

<u>OSS</u> E' una condizione necessaria ma non sufficiente.

Esistono serie $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ t.c. $a_k \to 0$ ma la serie non converge.

Es.1 $\sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{\log\left(\frac{k}{k+1}\right)}_{\to \log 1 = 0}$ ma la serie (abbiamo visto) diverge a $-\infty$

<u>Es.2</u> $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}} = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots$

$a_k = \frac{1}{\sqrt{k}} \to 0$, $s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} = \overbrace{1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}}}^{n \text{ termini}} \geq$

$$\begin{array}{cccc} 1 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{n}} \\ \vee\!\mid & \vee\!\mid & \vee\!\mid & \parallel \\ \frac{1}{\sqrt{n}} & \frac{1}{\sqrt{n}} & \frac{1}{\sqrt{n}} & \frac{1}{\sqrt{n}} \end{array}$$

$$\geq n \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} = \sqrt{n} \longrightarrow +\infty$$

$\Longrightarrow s_n \to +\infty$.

Come si usa la cond^{ne} necessaria? Si usa di solito "in negativo": se $a_k \not\to 0$, la serie non può convergere.

$\sum_{k=1}^{\infty} \boxed{\frac{k^2+3k}{1+5k^2}} \Longrightarrow$ la serie non converge!

$\to \frac{1}{5} \neq 0$

Serie a termini non negativi

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \quad \text{con} \quad a_k \geq 0.$$

In questo caso la successione $s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$ è crescente.

essendo $s_{n+1} = s_n + \underbrace{a_{n+1}}_{\substack{\geq \\ 0}} \geq s_n$

$\Longrightarrow$ $\{s_n\}$ ammette sempre limite, che è il suo sup.

TEOREMA Una serie a termini non negativi può solo essere convergente o divergente a $+\infty$. In particolare

- convergente $\Longleftrightarrow$ le s_n sono limitate superiormente
- divergente a $+\infty$ $\Longleftrightarrow$ le s_n sono illimitate superiormente.

Applicazione Serie armonica $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots$

Dimostreremo che la succ^{ne} s_n è illimitata sup.
Pertanto la serie armonica diverge a $+\infty$.

$$s_1 = 1$$

$$s_2 = s_1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

$$s_4 = s_2 + \underbrace{\frac{1}{3}}_{\substack{\geq \\ 1/4}} + \frac{1}{4} \geq s_2 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} + \frac{1}{2} = 2$$

$$s_8 = s_4 + \underbrace{\underbrace{\frac{1}{5}}_{\substack{\geq \\ 1/8}} + \underbrace{\frac{1}{6}}_{\substack{\geq \\ 1/8}} + \underbrace{\frac{1}{7}}_{\substack{\geq \\ 1/8}} + \frac{1}{8}}_{\geq 1/2} \geq 2 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}.$$

$$S_{16} = S_8 + \underbrace{\frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \frac{1}{11} + \dots + \frac{1}{16}}_{\left(8 \text{ termini, tutti } \geq \frac{1}{16}\right) \;\geq\; 1/2} \geq \frac{5}{2} + \frac{1}{2} = 3$$

$$S_{32} \geq \frac{7}{2}.$$

Alla fine si trova

$$S_{2^n} \geq 1 + \frac{n}{2} \Rightarrow \text{le } s_n \text{ non sono limitate sup}$$