$$\int f'(x)g(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)\,dx.$$

$$\int x^3 \cos x \, dx =$$

$$\left[\begin{array}{l} f'(x) = \cos x \Rightarrow f(x) = \sin x \\ g(x) = x^3 \Rightarrow g'(x) = 3x^2 \end{array}\right]$$

$$= x^3 \sin x - 3\int x^2 \sin x \, dx =$$

$$\left[\begin{array}{l} f'(x) = \sin x \Rightarrow f(x) = -\cos x \\ g(x) = x^2 \Rightarrow g'(x) = 2x \end{array}\right]$$

$$= x^3 \sin x - 3\left[-x^2\cos x + \int 2x\cos x \, dx\right] =$$

$$= x^3 \sin x + 3x^2 \cos x - 6\int x \cos x \, dx =$$

$$\left[\begin{array}{l} f'(x) = \cos x \Rightarrow f(x) = \sin x \\ g(x) = x \Rightarrow g'(x) = 1 \end{array}\right]$$

$$= x^3 \sin x + 3x^2 \cos x - 6\Big(x \sin x - \underbrace{\int \sin x \, dx}_{\cos x + C}\Big) =$$

$$= x^3 \sin x + 3x^2 \cos x - 6x \sin x - 6\cos x + C$$

Ciò suggerisce di trovare delle formule ricorsive per

$$I_n(x) = \int x^n \cos x \, dx \qquad n \in \mathbb{N}$$

$$I_n(x) = \int x^n \cos x \, dx = \qquad \left[\begin{array}{l} f'(x) = \cos x \Rightarrow f(x) = \sin x \\ g(x) = x^n \Rightarrow g'(x) = n x^{n-1} \end{array}\right]$$

$$= x^n \sin x - n\int x^{n-1}\sin x\,dx = \left[\begin{array}{l} f'(x)=\sin x \Rightarrow f(x)=-\cos x \\ g(x)=x^{n-1} \Rightarrow g'(x)= \\ \quad =(n-1)x^{n-2}\end{array}\right.$$

$$= \quad '' \quad - n\left[-x^{n-1}\cos x + (n-1)\int x^{n-2}\cos x\,dx\right] =$$

$$= x^n \sin x + n x^{n-1}\cos x - n(n-1) I_{n-2}(x)$$

Per es.

$$\int x^5 \cos x\,dx = I_5(x) =$$

$$= x^5 \sin x + 5x^4 \cos x - 20\, I_3(x)$$

e poi ottengo I_3 in funzione di I_1, che calcolo.

Esercizio: trovare una formula iterativa per

$$J_n(x) = \int x^n \sin x\,dx \qquad \text{(per casa)}$$

Trovare una formula iterativa per

$$I_n(x) = \int \sin^n x\,dx = \int \sin^{n-1} x \, \sin x\,dx =$$

$$\left[\begin{array}{l} f'(x)=\sin x \Rightarrow f(x)=-\cos x \\ g(x)=\sin^{n-1}x \Rightarrow g'(x)=(n-1)\sin^{n-2}x\,\cos x \end{array}\right]$$

$$= -\cos x \sin^{n-1}x + (n-1)\int \sin^{n-2}x\, \underbrace{\cos^2 x}_{1-\sin^2 x}\,dx =$$

$$= -\cos x \sin^{n-1} x + (n-1)\underbrace{\int \sin^{n-2} x \, dx}_{I_{n-2}(x)} \boxed{- (n-1)\underbrace{\int \sin^{n} x \, dx}_{I_n(x)}}$$

Si ottiene

$$(\cancel{1} + n - \cancel{1})\, I_n(x) = -\cos x \sin^{n-1} x + (n-1)\, I_{n-2}(x)$$

$$\Rightarrow I_n(x) = -\frac{1}{n} \cos x \sin^{n-1} x + \frac{n-1}{n} I_{n-2}(x)$$

Integrazione per sostituzione

Si basa sulla formula di derivazione di funzione composta.

Siano: I, J intervalli.

$\varphi : I \to J$ di classe C^1 (derivabile con derivata continua).

$f : J \to \mathbb{R}$ continua.

Sia F una primitiva di f. (cioè $F'(s) = f(s) \ \forall s \in J$)

Considero la funzione composta $F \circ \varphi(t) = F(\varphi(t))$, $t \in I$

Allora

$$(F \circ \varphi)'(t) = F'(\varphi(t))\, \varphi'(t) = f(\varphi(t))\, \varphi'(t) \quad \forall t \in I$$

Riassumendo:

Se F è una primitiva di f in J, allora

$F \circ \varphi$ è una primitiva di $f(\varphi(t))\, \varphi'(t)$ in I

Quindi, per calcolare una primitiva di $f(\varphi(t))\, \varphi'(t)$ basta calcolare una primitiva di f e calcolarla in $\varphi(t)$

Usando gli integrali indefiniti, scriveremo

$$\boxed{\int f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt = \left(\int f(s)\,ds\right)_{s=\varphi(t)}}$$

Formula di integrazione per sostituzione per integrali indefiniti. Vale se f continua e φ di classe C^1.

Mnemonicamente: si pone $\varphi(t) = s$

"$\varphi'(t) = \dfrac{ds}{dt}$"

"$\varphi'(t)\,dt = ds$"

Esempio

$$\int \sin^2 t \cos t\, dt = \int f(\sin t)\,(\sin t)'\,dt =$$

con $f(s) = s^2$

$$= \int (\sin t)^2 \underbrace{(\sin t)'\,dt}_{ds} =$$

Poniamo $s = \sin t$

$\cos t\, dt = ds$

$$= \left(\int s^2\,ds\right)_{s=\sin t} = \left.\frac{s^3}{3}\right|_{s=\sin t} + c =$$

$$= \frac{\sin^3 t}{3} + c$$

$$\int \frac{\sqrt{\log x}}{x}\,dx = \int \sqrt{\log x}\cdot \frac{1}{x}\,dx =$$

oss $\dfrac{1}{x} = (\log x)'$

Poniamo $\boxed{\log x = s} \Rightarrow \dfrac{1}{x}\,dx = ds$

$$= \left(\int \sqrt{s}\,ds\right)_{s=\log x} = \left(\frac{2}{3}s^{3/2} + c\right)_{s=\log x} =$$

$$= \frac{2}{3}(\log x)^{3/2} + c$$

$$\int \cos(3x-5)\,dx = \frac{1}{3}\int \cos(3x-5)\cdot\underbrace{3}_{(3x-5)'}\,dx =$$

$3x-5=s$

$3\,dx = ds$

$$= \frac{1}{3}\left(\int \cos s\; ds\right)\Big|_{s=3x-5} =$$

$$= \frac{1}{3}\,\text{sen}\,(3x-5) + c.$$

Questo si può generalizzare

$$\boxed{\int f(ax+b)\,dx = \frac{1}{a}\int f(s)\,ds\Big|_{s=ax+b} \qquad a,b\in\mathbb{R}}$$

$ax+b=s$

$a\,dx = ds$

$$\int \frac{dx}{1+4x^2} = \int \frac{dx}{1+(2x)^2} = \frac{1}{2}\int \frac{ds}{1+s^2} = \frac{1}{2}\,\text{arctg}\,(2x)+c$$

$2x=s$

$2dx=ds$

$$\int e^{3-4x}\,dx = -\frac{1}{4}e^{3-4x} + c$$

$3-4x=s$

$$\int \frac{x+1}{2x^2+4x+7}\,dx = \frac{1}{4}\int \frac{4(x+1)}{2x^2+4x+7}\,dx =$$

$2x^2+4x+7=s$

$(4x+4)\,dx = ds$

$$= \frac{1}{4}\int \frac{ds}{s} = \frac{1}{4}\log(2x^2+4x+7)+c$$

Cosa succede con la sostituzione per gli integrali definiti?

$\varphi: I \to J$ di classe C^1, siano $\alpha, \beta \in I$.

$f: J \to \mathbb{R}$ continua

$$\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt \underset{2^\circ\text{Teor. fond.}}{=} \left(\int f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt\right)\Bigg|_{t=\alpha}^{t=\beta} =$$

$$\underset{\text{Sost. per }\int\text{ indefiniti}}{=} \qquad \varphi(t)=s,\quad \varphi'(t)\,dt=ds$$

$$= \left(\int f(s)\,ds\right)_{s=\varphi(t)}\Bigg|_{t=\alpha}^{t=\beta} =$$

$$= \left(\int f(s)\,ds\right)\Bigg|_{s=\varphi(\alpha)}^{s=\varphi(\beta)} = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(s)\,ds$$

Riscriviamo:

$$\boxed{\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(s)\,ds}$$

Attenzione: vanno cambiati gli estremi.

$$\int_0^1 \frac{e^t}{1+e^t}\,dt$$

<u>1° modo:</u> calcolo l'$\int$ indefinito

$$\int \frac{e^t}{1+e^t}\,dt \underset{\substack{1+e^t=s\\ e^t dt = ds}}{=} \int \frac{ds}{s} = \log s + c = \log(1+e^t)+c$$

$$\int_0^1 \frac{e^t}{1+e^t}\,dt = \log(1+e^t)\Big|_0^1 = \log(1+e) - \log 2 = \log\frac{1+e}{2}$$

<u>2° modo</u> Applicando direttamente la sost. nell'$\int$ definito

$$\int_0^1 \frac{e^t}{1+e^t}\,dt =$$

$1+e^t = s$
$e^t\,dt = ds$

$t=0 \Rightarrow s = 1+e^0 = 2$
$t=1 \Rightarrow s = 1+e^1 = 1+e$

$$= \int_2^{1+e} \frac{ds}{s} =$$

$$= \log s\Big|_2^{1+e} = \log\frac{1+e}{2}$$

$$\frac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{2x}{\sqrt{1-x^4}}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{1/2} \frac{ds}{\sqrt{1-s^2}} = \frac{1}{2}\arcsin s\Big|_0^{1/2} =$$

$x^2 = s$
$2x\,dx = ds$

$x=0 \Rightarrow s=0$
$x=\frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow s=\frac{1}{2}$

$$= \frac{1}{2}\left[\arcsin\frac{1}{2} - \cancel{\arcsin 0}\right] = \frac{\pi}{12}$$

A volte può convenire usare la formula di sostituzione "nel verso opposto"

$$\boxed{\int f(x)\,dx \underset{\substack{x=\varphi(t)\\ dx=\varphi'(t)\,dt}}{=} \int f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt \quad \text{dove } \varphi(t)=x.}$$

Vale anche per integrali definiti.

$$\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)\,dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt.$$

Se φ è invertibile, con inversa φ^{-1}.

Pongo $\varphi(\beta)=b$

$\varphi(\alpha)=a$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}+1}$$

$\sqrt{x}=t$

$dt = \dfrac{dx}{2\sqrt{x}}$ (1)

$x = t^2$

$dx = 2t\,dt$ (2)

Se uso (1)

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}+1} = \int \underbrace{\frac{2\sqrt{x}}{(\sqrt{x}+1)}}_{\frac{2t}{t+1}} \underbrace{\frac{dx}{2\sqrt{x}}}_{dt} = \int \frac{2t}{t+1}\,dt$$

Se uso (2) viene la stessa cosa.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}+1} = \int \frac{2t\,dt}{t+1}$$

$$\int \frac{2t}{t+1}\,dt = 2\int \frac{t+1-1}{t+1}\,dt = 2\int\left(1-\frac{1}{t+1}\right)dt =$$

$$= 2t - 2\log(t+1)\Big|_{t=\sqrt{x}} + c$$