Proprietà dell'integrale di Riemann:

Siano $f, g \in \mathcal{R}(a,b)$ (ossia integrabili in $[a,b]$). Allora:

1) $$\boxed{(b-a)\inf_{[a,b]} f \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq (b-a)\sup_{[a,b]} f}$$

2) Se $f(x) \equiv c \in \mathbb{R}$, allora $\boxed{\int_a^b c\,dx = (b-a)\cdot c}$

3) $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha f(x) + \beta g(x) \in \mathcal{R}(a,b)$, e

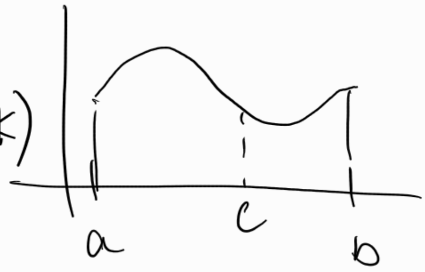
$$\boxed{\int_a^b \big(\alpha f(x) + \beta g(x)\big)\,dx = \alpha \int_a^b f(x)\,dx + \beta \int_a^b g(x)\,dx}$$

(Linearità dell'integrale)

4) Se $f \in \mathcal{R}(a,b)$, e $[c,d] \subset [a,b]$, allora $f \in \mathcal{R}(c,d)$.

5) Additività rispetto all'intervallo:
se $f \in \mathcal{R}(a,b)$ e se $c \in (a,b)$, allora

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx. \quad (*)$$



__OSS__. E' possibile definire $\int_a^b f(x)\,dx$ anche se $b \leq a$.

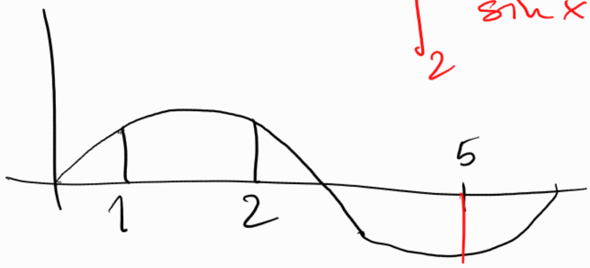
Se $b < a$ poniamo $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$

$$\int_2^1 f(x)\,dx = -\int_1^2 f(x)\,dx$$

Se $b = a$, poniamo $\int_a^a f(x)\,dx = 0$.

La formula di additività (*) vale anche se a, b, c non sono nell'ordine indicato precedentemente, purché f sia integrabile nell'intervallo più ampio.
Per es.

$$\int_1^2 \sin x \, dx = \int_1^5 \sin x \, dx + \underbrace{\int_5^2 \sin x \, dx}_{-\int_2^5 \sin x \, dx}$$



6) Se $f, g \in R(a,b)$, e $f(x) \leq g(x)$ $\forall x \in [a,b]$, allora

$$\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx$$

(monotonia dell' $\int$).

Dim $\forall P$ partizione di $[a,b]$.

$$S(P;f) \leq S(P;g) \quad \forall P \text{ partiz.}$$

$$S(P;f) = \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1}) \underbrace{M_{k,f}} \qquad S(P;g) = \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1}) \underbrace{M_{k,g}}$$

$$M_{k,f} \leq M_{k,g}$$

passo all'estremo inf. sulle partiz. P

$$\underbrace{\inf S(P;f)}_{= \int_a^b f(x)\,dx} \leq \inf S(P;g) = \int_a^b g(x)\,dx$$

$\square$

$$\int_2^3 (x^3-2x^2+5x-3)\,dx = \quad [\text{linearità}]$$

$$= \underbrace{\int_2^3 x^3\,dx}_{} - 2\underbrace{\int_2^3 x^2\,dx}_{} + 5\underbrace{\int_2^3 x\,dx}_{} - \boxed{\int_2^3 3\,dx} = \quad \text{per l'additività risp. all'intervallo}$$

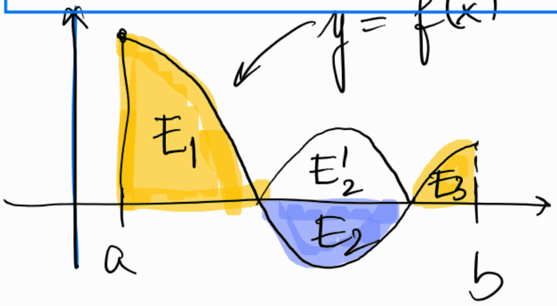
$$\left[\begin{array}{llll} \int_0^3 x^3\,dx - \int_0^2 x^3\,dx & \int_0^3 x^2\,dx - \int_0^2 x^2\,dx = \frac{19}{3} & \int_0^3 x\,dx - \int_0^2 x\,dx & 3\cdot 1 = 3 \\ \frac{3^4}{4} - \frac{2^4}{4} = \frac{65}{4} & \frac{3^3}{3} \qquad \frac{2^3}{3} & \frac{9}{2} - \frac{4}{2} = \frac{5}{2} & \end{array}\right]$$

$$= \frac{65}{4} - 2\cdot\frac{19}{3} + 5\cdot\frac{5}{2} - 3 = \_\_\_\_\_\_$$

7) Se $f \in R(a,b)$, anche $|f| \in R(a,b)$, e si ha

$$\boxed{\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \le \int_a^b |f(x)|\,dx}$$

(dis. triangolare per $\int$)



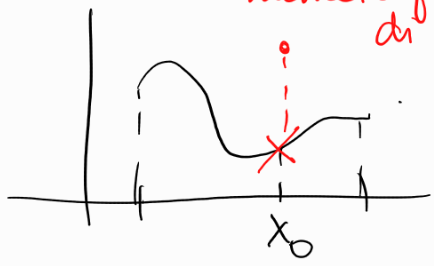
$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| = |\text{Area } E_1 - \text{Area } E_2 + \text{Area } E_3| \le \quad \text{dis. triangolare per numeri}$$

$$\le |\text{Area } E_1| + |\text{Area } E_2| + |\text{Area } E_3|$$

$$= \text{Area } E_1 + \underset{\text{Area } E_2'}{\underset{\shortparallel}{\text{Area } E_2}} + \text{Area } E_3 = \int_a^b |f(x)|\,dx$$

8) Sia $f \in R(a,b)$, e sia g una funzione ottenuta modificando f in un solo punto. (oppure: in un numero finito di punti)

cioè $g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \neq x_0 \\ \alpha & \text{se } x = x_0 \end{cases}$



Allora $g \in R(a,b)$, e

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b g(x)\,dx$$

Conseguenza: Si può definire senza ambiguità

$$\int_0^1 \frac{\sin x}{x}\,dx$$

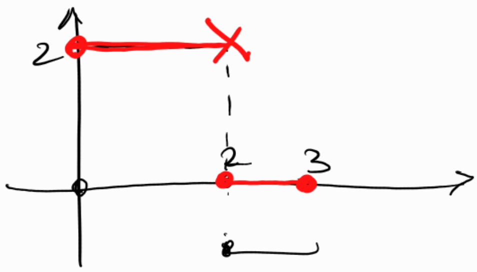
N.B. Non è definita in $x=0$.

Tuttavia $\lim_{x \to 0^+} \frac{\sin x}{x} = 1$, quindi la posso prolungare in $x=0$ in modo che sia continua in $[0,1]$.

Ma se anche la definissi in modo diverso per $x=0$, per quanto detto sopra l'integrale non cambierebbe.

9) **Integrale di f. costanti a tratti.**

Sia $f(x) = \begin{cases} 2 & \text{se } x \in [0,2) \\ -1 & \text{se } x \in [2,3] \end{cases}$



$$\int_0^3 f(x)\,dx = \int_0^2 \underbrace{f(x)}_{2}\,dx + \int_2^3 \underbrace{f(x)}_{-1}\,dx =$$

$$= 2 \cdot 2 + (-1)1 = 4 - 1 = 3$$

10) Sappiamo che (propr. 1)

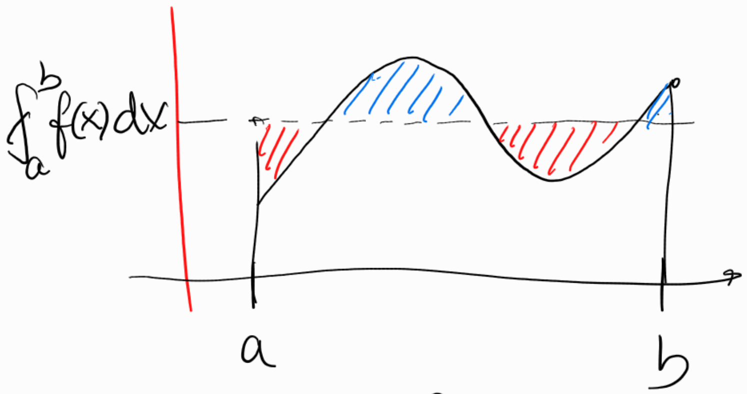
$$(b-a)\inf_{[a,b]} f \le \int_a^b f(x)\,dx \le (b-a)\sup_{[a,b]} f$$

Dividio per $b-a>0$

$$\boxed{\inf_{[a,b]} f \le \underbrace{\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx}_{} \le \sup_{[a,b]} f}$$

Valor medio di f in $[a,b]$

$$\fint_a^b f(x)\,dx = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx.$$



Se poi f è continua in $[a,b]$, abbiamo visto che il suo valore medio è compreso tra $\min_{[a,b]} f$ e $\max_{[a,b]} f$

Per il teorema dei valori intermedi $\exists c \in [a,b]$ t.c

$$f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \qquad (**)$$

TEOREMA della MEDIA INTEGRALE

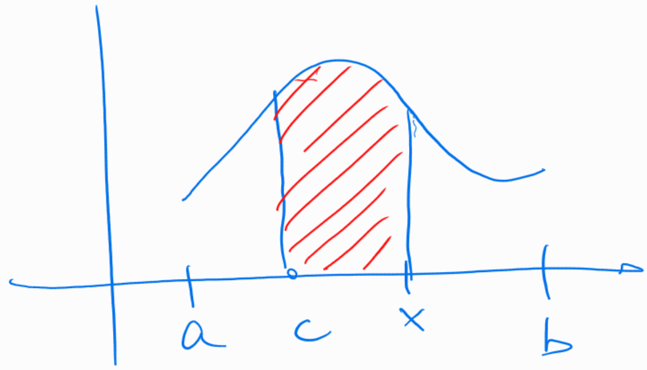
Se f è continua in $[a,b]$ esiste $c \in [a,b]$ t.c vale $(**)$

DEF Funzioni integrali.

Sia $f \in R(a,b)$. Sia $c \in [a,b]$.

Definiamo la funzione integrale di f relativa al p.to c come

$$F_c(x) = \int_c^x f(t)\,dt \quad \forall x \in [a,b].$$



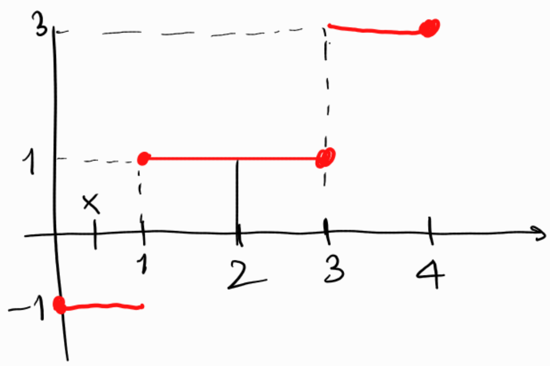
Esempi: $f(x) = x^2 \qquad c = 0$

$$F_0(x) = \int_0^x t^2\,dt = \frac{x^3}{3} \qquad \forall x > 0$$

$$F_1(x) = \int_1^x t^2\,dt = \int_0^x t^2\,dt - \int_0^1 t^2\,dt =$$

$$= \frac{x^3}{3} - \frac{1}{3} = \frac{x^3-1}{3}$$

Sia $f(x) = \begin{cases} -1 & \text{se } x \in [0,1) \\ 1 & \text{se } x \in [1,3] \\ 3 & \text{se } x \in (3,4] \end{cases}$



$$F_2(x) = \int_2^x f(t)\,dt$$

Calcoliamo $F_2(x)$

3 casi: 1) se $x \in [1,3] \Rightarrow \int_2^x \underbrace{f(t)}_{\substack{4\\1}}\,dt = 1\cdot(x-2)$

2) se $x \in (3,4] \Rightarrow$

$$F_2(x) = \int_2^x f(t)\,dt = \int_2^3 1\,dt + \int_3^x 3\,dt =$$

$$= 1 + 3(x-3) = 3x-8$$

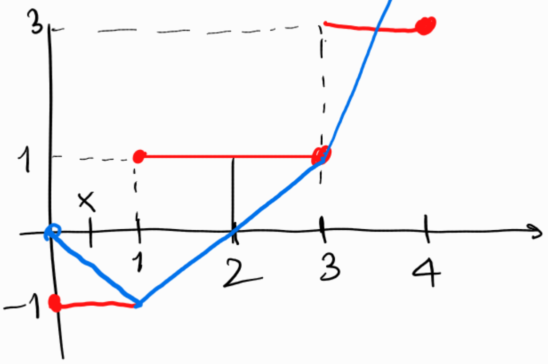
3) se $x \in [0,1)$

$$F_2(x) = \int_2^x f(t)\,dt = -\int_x^2 f(t)\,dt =$$

$$= -\int_x^1 (-1)\,dt - \int_1^2 1\,dt =$$

$$= +1\cdot(1-x) - 1 = 1-x-1 = -x$$

$$F_2(x) = \int_2^x f(t)\,dt = \begin{cases} -x & \text{se } x \in [0,1) \\ x-2 & x \in [1,3] \\ 3x-8 & x \in (3,4] \end{cases}$$



$y = F_2(x)$

OSS $F_2(x)$ è continua, e

in tutti i punti in cui f è continua si ha

$$F_2'(x) = f(x)$$

TEOREMA (Continuità della f. integrale)

Sia $f \in R(a,b)$, sia $c \in [a,b]$ e sia

$$F_c(x) = \int_c^x f(t)\,dt \qquad \forall x \in [a,b].$$

Allora F_c è continua in $[a,b]$.

Dim. Sia $x_0 \in [a,b]$. Devo provare che

$$\lim_{x \to x_0} F_c(x) = F_c(x_0)$$

$$0 \le |F_c(x) - F_c(x_0)| = \left| \underbrace{\int_c^x f(t)\,dt}_{\cancel{\int_c^{x_0} f(t)\,dt} + \int_{x_0}^x f(t)\,dt} - \cancel{\int_c^{x_0} f(t)\,dt} \right| =$$

$$= \left| \int_{x_0}^x f(t)\,dt \right| \le \left| \int_{x_0}^x |f(t)|\,dt \right|$$ (ovvio se $x > x_0$, controllare che vale anche se $x < x_0$)

$x > x_0$: $$\int_{x_0}^x |f(t)|\,dt \le (x - x_0) \sup_{[a,b]} |f(t)| = |x - x_0| \sup_{[a,b]} |f(t)|$$

$x < x_0$: $$\left| \int_{x_0}^x |f(t)|\,dt \right| = \int_x^{x_0} |f(t)|\,dt \le \underbrace{(x_0 - x)}_{= |x - x_0|} \sup_{[a,b]} |f(t)|$$

$$\le \underbrace{|x - x_0|}_{\to 0} \boxed{\sup_{[a,b]} |f(t)|} \xrightarrow{x \to x_0} 0$$

è un numero

Primo Teorema fondamentale del calcolo integrale.

Sia $f \in R(a,b)$, sia $c \in [a,b]$, consideriamo la funzione integrale

$$F_c(x) = \int_c^x f(t)\,dt.$$

Se $x_0 \in [a,b]$ è t.c. f sia continua in x_0, allora $F_c(x)$ è derivabile in x_0, e

$$F_c'(x_0) = f(x_0)$$

In particolare se f è continua in tutto $[a,b]$, allora F_c è derivabile in $[a,b]$ e

$$F_c'(x) = f(x) \qquad \forall x \in [a,b].$$

Dim nell'ipotesi supplementare che f sia continua non solo in x_0, ma in un intorno di x_0.

$F_c'(x_0)$ è il limite del rapporto incrementale

$$\frac{F_c(x) - F_c(x_0)}{x - x_0} = \frac{1}{x-x_0}\left(\underbrace{\int_c^x f(t)\,dt}_{=\cancel{\int_c^{x_0} f(t)\,dt} + \int_{x_0}^x f(t)\,dt} - \cancel{\int_c^{x_0} f(t)\,dt} \right) =$$

$$= \underbrace{\frac{1}{x-x_0} \int_{x_0}^x f(t)\,dt}_{} =$$

valor medio di f in $[x_0, x]$

se x abbastanza vicino a x_0 posso supporre f continua in $[x_0, x]$

[Supp. $x > x_0$]

$=$

$$= f(c(x)) \quad \text{dove} \quad x_0 \le c(x) \le x$$

Faccio il limite per $x \to x_0^+$

$$\lim_{x \to x_0^+} \frac{F_c(x) - F_c(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0^+} f(c(x)) =$$

$$= f(x_0)$$

OSS se $x \to x_0^+$
$c(x) \to x_0$
e f continua in x_0

Similmente si verifica che anche il limite per $x \to x_0^-$ vale $f(x_0)$.

$$\Rightarrow \quad F_c'(x_0) = f(x_0) \qquad \square$$

Se f è continua in $[a,b]$, la $F_c(x)$ verifica

$$F_c'(x) = f(x) \quad \forall x \in [a,b].$$

DEF Sia $f: I \to \mathbb{R}$, I intervallo.
Una funzione $G: I \to \mathbb{R}$ si dice primitiva di f se $G'(x) = f(x) \quad \forall x \in I$.

Esempi.

x^2 è una primitiva di $2x$ in $\mathbb{R}$

$\frac{x^4}{4}$ " " " " x^3 in $\mathbb{R}$

$\frac{x^4}{4} + 5$ " " " " x^3 in $\mathbb{R}$.

$-\cos x$ " " " $\sin x$ in $\mathbb{R}$

OSS Se $G(x)$ è una primitiva di $f(x)$ in I, anche $G(x) + c$ lo è. **Ce ne sono altre? NO!**

PROP Se $G(x)$ e $F(x)$ sono entrambe primitive di $f(x)$ in I intervallo. Allora

$$G(x)-F(x) \equiv \text{costante in } I.$$

DIM

$$\big(G(x)-F(x)\big)' = \underbrace{G'(x)}_{f(x)} - \underbrace{F'(x)}_{f(x)} = f(x)-f(x) = 0 \quad \forall x \in I$$

$\Rightarrow$ $G(x)-F(x)$ è costante $\square$

Il primo teorema fond. del calcolo integrale dice che una funzione continua in I intervallo ammette sempre una primitiva:

$$F_c(x) = \int_c^x f(t)\,dt \qquad \text{dove } c \in I$$

e quindi ne ammette infinite, aggiungendo costanti.

Equivalentemente:

Se f è continua in I, tutte le sue primitive sono della forma

$$\int_c^x f(t)\,dt + c_1 \qquad \text{dove } c \text{ è un pto fissato di } I.$$

Per questo motivo l'insieme delle primitive di f si indica con

$$\int f(x)\,dx \leftarrow \text{integrale indefinito di } f.$$

$$\int \sin x\,dx = \{-\cos x + c,\ c \in \mathbb{R}\}$$

$$\int \left(3x^2 - \frac{1}{x}\right) dx = \{x^3 - \log x + c,\ c \in \mathbb{R}\} \qquad \text{in } (0,+\infty)$$

Abbiamo usato due simboli di integrale:

- $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ Integrale di Riemann, o integrale definito

  è un concetto di calcolo integrale (partizioni, somme superiori e inferiori, etc.), ed è un numero.

- $\displaystyle\int f(x)\,dx$ integrale indefinito

  è un concetto di calcolo differenziale e denota l'insieme delle funz. primitive di f, oppure una sola di queste.

Il primo teor. fond. del calcolo integrale collega questi due concetti.

Se $f \in C(I)$ allora

$$\int f(x)\,dx = \left\{ \int_c^x f(t)\,dt + c_1 \right\}$$

dove c è un pto fissato di I.

Secondo teorema fond. del calcolo integrale.

Sia f continua in $[a,b]$. Sia $G(x)$ una primitiva di f in $[a,b]$. Allora

$$\int_a^b f(x)\,dx = G(b) - G(a) =: G(x)\Big|_a^b$$

Esempio

$$\int_0^\pi \sin x\,dx = -\cos\pi + \cos 0 = 1 + 1 = 2$$

$$\int_0^1 e^x\,dx = e^x\Big|_0^1 = e^1 - e^0 = e - 1$$

$$\int_1^2 \frac{1}{x}\,dx = \log x\Big|_1^2 = \log 2 - \cancel{\log 1} = \log 2.$$

<u>Dim</u>. $G(x)$ è una primitiva di f in $[a,b]$.

anche $F_a(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ lo è.

$$\Rightarrow \quad G(x) = F_a(x) + c$$

$$G(b) - G(a) = (F_a(b) + \cancel{c}) - (F_a(a) + \cancel{c}) =$$

$$= \int_a^b f(t)\,dt - \underbrace{\int_a^a f(t)\,dt}_{=0} \quad \square$$

Il calcolo di un integrale di Riemann è quindi ricondotto alla ricerca di primitive della funzione f.