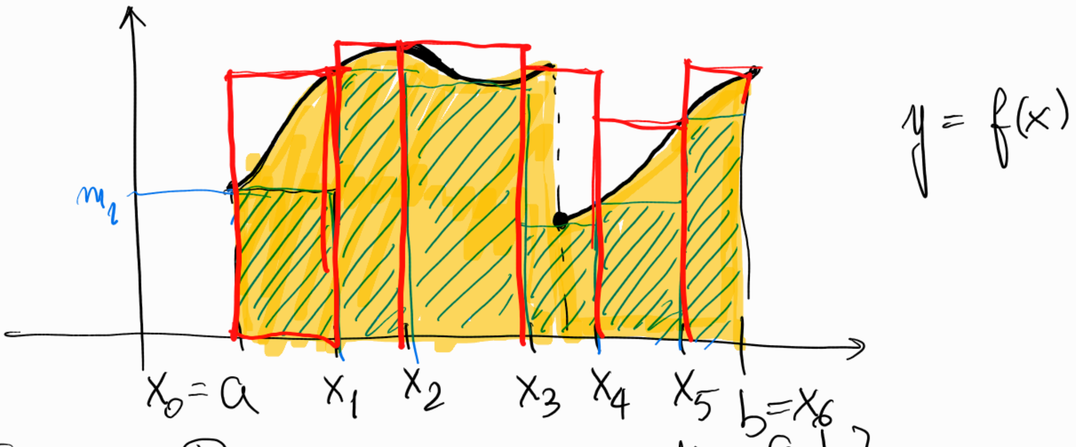
Da domani le ore di Laboratorio di Matematica diventano ore di Analisi Mat. I.

Integrale di Riemann.

$f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ limitata e (solo per semplicità) $f \geq 0$.



Sia $\mathcal{P}$ una partizione di $[a,b]$.

$$\mathcal{P} = \{ x_0, x_1, \dots x_n : x_0 = a < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b \}$$

Pongo $s(\mathcal{P}) = \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1}) m_k$ somma inferiore relativa a $\mathcal{P}$

$$m_k = \inf_{x \in [x_{k-1}, x_k]} f(x)$$

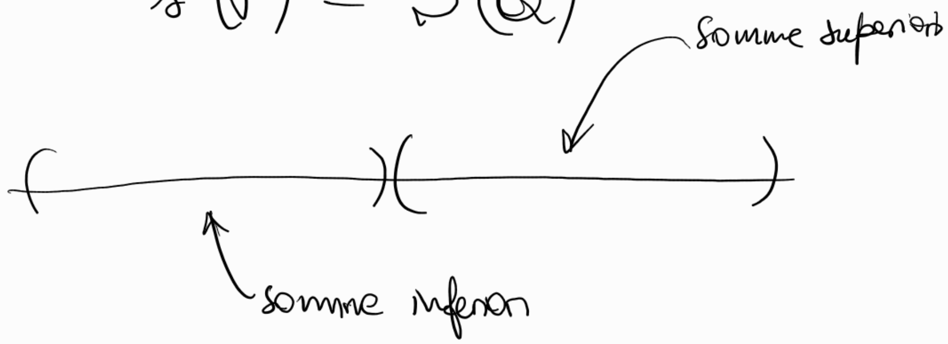
Pongo $S(\mathcal{P}) = \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1}) M_k$ somma superiore relativa a $\mathcal{P}$.

$$M_k = \sup_{[x_{k-1}, x_k]} f$$

E' immediato che $s(\mathcal{P}) \leq S(\mathcal{P})$

anzi, si vede facilmente che se $\mathcal{P}$ e $\mathcal{Q}$ sono due partizioni di $[a,b]$ $\qquad s(P) \le S(Q)$

Da ciò si ottiene



Ne segue che

$$\sup_{P \text{ partiz. di } [a,b]} s(P) \le \inf_{P \text{ partiz. di } [a,b]} S(P)$$

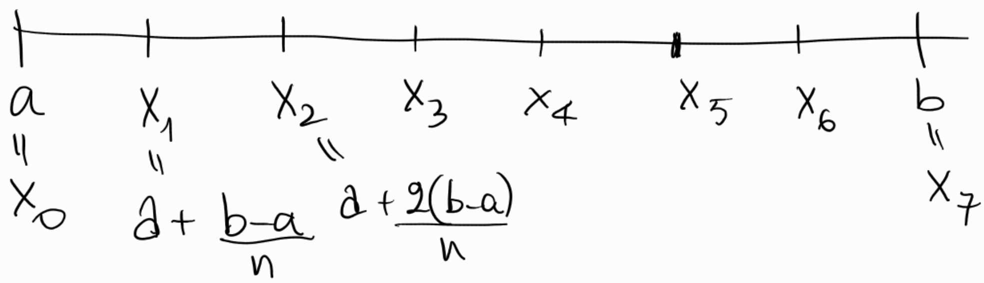
Se $\sup_{P} s(P) = \inf_{P} S(P)$

diremo che f è integrabile in $[a,b]$

C'è un altro approccio possibile.

Fissato $n \in \mathbb{N}$, considero la "partizione equispaziata"

$$P_n = \left\{ x_k = a + k\,\frac{b-a}{n} \,;\ k = 0, 1, \dots n. \right\}$$



Considero $s(P_n)$ e $S(P_n)$. Si dimostra che

$$\boxed{\begin{aligned} \lim_{n\to+\infty} s(P_n) &= \sup_{P} s(P)\,; \\ \lim_{n\to+\infty} S(P_n) &= \inf_{P} S(P) \end{aligned}}$$

e quindi diremo che f è integrabile se

$$\lim_{n\to+\infty} s(P_n) = \lim_{n\to+\infty} S(P_n)$$

DEF Sia f limitata in $[a,b]$ (non necessariamente positiva)

Diremo che f è **integrabile secondo Riemann** in $[a,b]$, e scriveremo $f \in \mathcal{R}(a,b)$ se vale una delle seguenti due condizioni equivalenti

$$\sup_{P} s(P) = \inf_{P} S(P) \qquad (*)$$

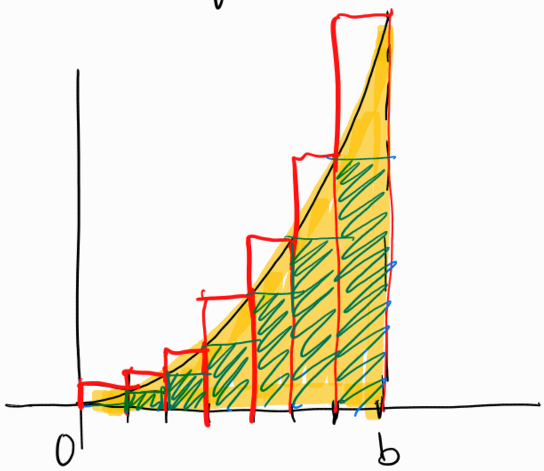
$$\lim_{n\to+\infty} s(P_n) = \lim_{n\to+\infty} S(P_n) \qquad (**)$$

In tal caso il numero individuato dalla $(*)$ e dalla $(**)$ si chiama **integrale di f in $[a,b]$ e si scrive**

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sup_P s(P) = \inf_P S(P) =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} s(P_n) = \lim_{n\to+\infty} S(P_n)$$

Verifichiamo che $f(x) = x^2$ è integrabile in $[0,b]$ con $b>0$.



Fisso n e considero la partizione equispaziata

$$P_n = \left\{ x_k = k\frac{b}{n}, \quad k = 0,1, \dots n \right\}.$$

$$S(P_n) = \sum_{k=1}^{n} \underbrace{(x_k - x_{k-1})}_{b/n} M_k =$$

$$M_k = f(x_k) = x_k^2 = k^2\frac{b^2}{n^2}$$

$$= \frac{b^3}{n^3} \underbrace{\sum_{k=1}^{n} k^2}_{= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}} = \frac{b^3}{n^3} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \xrightarrow{n \to +\infty} \frac{b^3}{3}$$

(fatto a Laboratorio)

$$s(P_n) = \sum_{k=1}^{n} \underbrace{(x_k - x_{k-1})}_{\frac{b}{n}} \underbrace{m_k}_{=\inf_{[x_{k-1},x_k]} f = f(x_{k-1}) = x_{k-1}^2 = (k-1)^2 \frac{b^2}{n^2}} =$$

$$= \frac{b^3}{n^3} \sum_{k=\cancel{1}\,2}^{n} (k-1)^2 = \frac{b^3}{n^3} \sum_{h=1}^{n-1} h^2 =$$

$$= \frac{b^3}{n^3} \frac{(n-1)n(2n-1)}{6} \xrightarrow{n \to +\infty} \frac{b^3}{3}$$

$$\Rightarrow \lim_{n \to +\infty} s(P_n) = \lim_{n \to +\infty} S(P_n) = \frac{b^3}{3}.$$

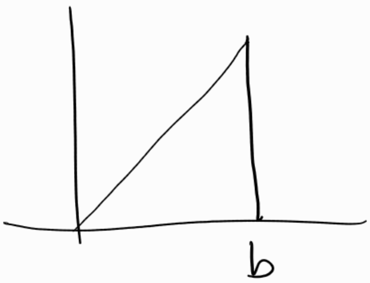
Abbiamo provato che $f(x) = x^2$ è integrabile in $[0,b]$ e

$$\int_0^b x^2\,dx = \frac{b^3}{3}$$

Per esercizio: provare che

$$\int_0^b x^3\,dx = \frac{b^4}{4} \quad \text{sapendo che } \sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

$$\int_0^b x\,dx = \frac{b^2}{2} \quad \text{sapendo che } \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$



OSS $\int_a^b f(x)\,dx$ è un numero, e il nome della variabile non ha importanza

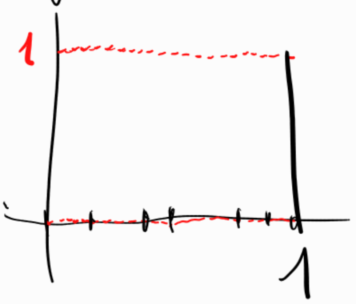
$$\int_0^2 x^2\,dx = \int_0^2 t^2\,dt = \frac{8}{3}$$

OSS Non tutte le funzioni limitate sono integrabili in $[a,b]$.

La funzione di Dirichlet

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{se } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

non è integrabile secondo Riemann in $[0,1]$.



sia P una partizione

$$s(P) = \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1})\, \underset{\substack{\| \\ \inf\limits_{[x_{k-1},x_k]} f \,=\, 0 \ \forall k}}{m_k} = 0 \qquad \forall P$$

$$\Rightarrow \quad \sup_P s(P) = 0$$

$$S(P) = \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1})\, \underset{\substack{\| \\ \sup\limits_{[x_{k-1},x_k]} f \,=\, 1}}{M_k} = \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1}) = 1 \quad \forall P$$

$$\Rightarrow \quad \inf_P S(P) = 1$$

Classi di funzioni integrabili.

$$\boxed{\begin{array}{l}\textbf{TEOREMA} \text{ Se } f \text{ è monotòna in } [a,b], \\ \text{essa è integrabile in } [a,b] \quad (f \in \mathcal{R}(a,b)).\end{array}}$$

Dim Supponiamo per es. f crescente.

Fisso n e calcolo $S(P_n)$, $s(P_n)$.

$$S(P_n) = \sum_{k=1}^{n} \underbrace{(x_k - x_{k-1})}_{= \frac{b-a}{n}} \underbrace{M_k}_{= \sup_{[x_{k-1},x_k]} f = f(x_k)} = \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} f(x_k)$$

$$s(P_n) = \sum_{k=1}^{n} \underbrace{(x_k - x_{k-1})}_{= \frac{b-a}{n}} \underbrace{m_k}_{= \inf_{[x_{k-1},x_k]} f = f(x_{k-1})} = \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} f(x_{k-1})$$

$$S(P_n) - s(P_n) = \frac{b-a}{n}\left(\sum_{k=1}^{n} f(x_k) - \sum_{k=1}^{n} f(x_{k-1})\right)$$

$$= \frac{b-a}{n}\Big(\cancel{f(x_1)} + \cancel{f(x_2)} + \dots + f(x_n)$$
$$- f(x_0) - \cancel{f(x_1)} - \cancel{f(x_2)} - \dots - \cancel{f(x_{n-1})} \Big) =$$

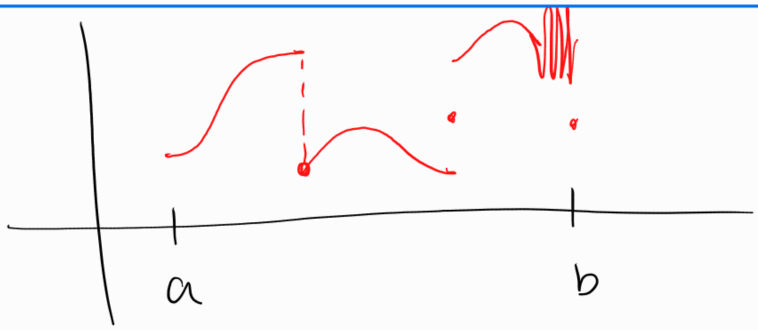
$$= \frac{b-a}{n}\left(f(x_n) - f(x_0)\right) = \frac{b-a}{n}\left(f(b) - f(a)\right) \xrightarrow{n} 0$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} s(P_n) = \lim_{n\to+\infty} S(P_n) \qquad \square$$

TEOREMA Se f è continua in $[a,b]$ allora $f \in R(a,b)$

(oss quindi f è limitata per Weierstrass)

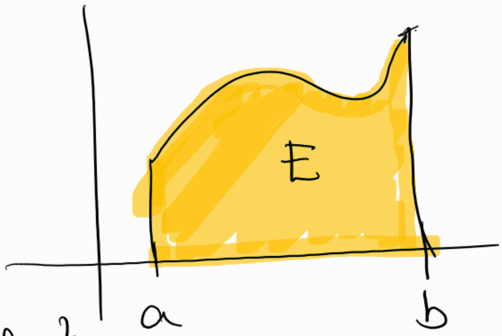
TEOREMA Se f è limitata in $[a,b]$ e continua eccetto in un numero finito di punti, allora $f \in R(a,b)$.



Interpretazione geometrica dell'integrale.

1) Se $f \geq 0$

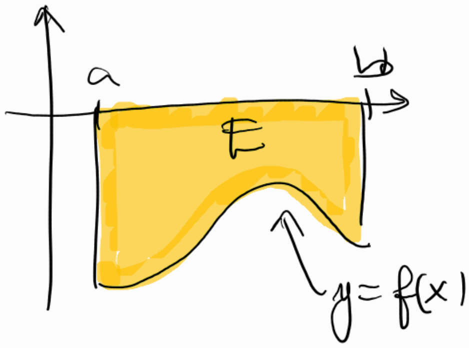
$\int_a^b f(x)dx$ si interpreta come l'area della regione



$$E = \{(x,y) : a \leq x \leq b, \ 0 \leq y \leq f(x)\}$$

2) Se $f \leq 0$,

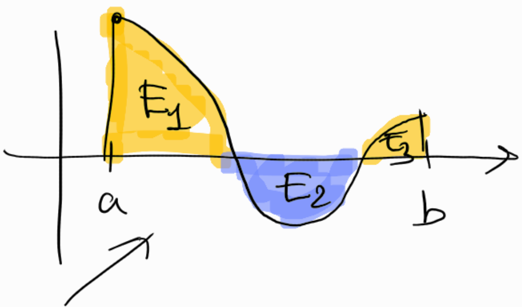
$\int_a^b f(x)dx$ si interpreta come l'opposto dell'area di



$$E = \{(x,y) : a \leq x \leq b, \ f(x) \leq y \leq 0\}$$

3) Se f cambia segno, allora

$\int_a^b f(x)dx$ si interpreta come



La somma algebrica delle aree relative ai tratti in cui $f \geq 0$ e delle aree relative ai tratti in cui $f<0$ (queste ultime prese con il segno $-$)

Per es. nella figura $\int_a^b f(x)dx = \text{area } E_1 - \text{area } E_2 + \text{area } E_3 =$

Proprietà dell' Integrale di Riemann.

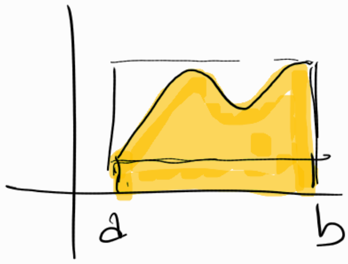
Siano $f, g \in R(a,b)$. Allora:

$P_1 = \{\overset{a}{x_0}, \overset{b}{x_1}\}$ partizione "banale"

1) $$\underbrace{(b-a)\inf f}_{s(P_1)} \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq \overbrace{(b-a)\sup_{[a,b]} f}^{S(P_1)}$$

segue da

$$\int_a^b f(x)dx = \inf_{P} S(P) \leq S(P_1)$$



2) Se $f(x) \equiv c$

$$\int_a^b f(x)\,dx = (b-a)c$$

(segue da 1))