Esame di Meccanica Quantistica, 23/01/2024

Esercizio 1. Si considerino due particelle identiche di spin 1.

a) Le due particelle si trovano in uno stato della forma

$$\psi = f(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)[a|1,-1\rangle + b|1,1\rangle + c|-1,1\rangle],$$

dove a, b, c sono costanti complesse, la funzione spaziale è normalizzata e soddisfa la condizione $f(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = f(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1)$, gli stati $|s_{1z}, s_{2z}\rangle$ sono autostati di S_{1z} ed S_{2z} con autovalore $\hbar s_{1z}$ e $\hbar s_{2z}$. Si determinino tutti gli stati ψ tali che, in una misura contemporanea di S_{1z} ed S_{2z}, la probabilità di trovare lo stesso valore sia pari a 1/2.

Tra gli stati precedentemente trovati si determini quello per cui il valor medio $\langle\psi|S_{1x}^2 S_{2x}^2|\psi\rangle$ assume il valore massimo possibile.

b) Il sistema evolve con Hamiltoniana

$$H = H_0 + \frac{\omega}{\hbar}\boldsymbol{S}_1 \cdot \boldsymbol{S}_2,$$

dove $\boldsymbol{S} = \boldsymbol{S}_1 + \boldsymbol{S}_2$, H_0 non dipende dagli operatori di spin e $f(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$ è autofunzione di H_0 con autovalore E_0. In una misura di energia al tempo t sull'evoluto dello stato trovato al punto a), quali valori si possono ottenere e con quale probabilità?

c) Si assuma

$$H_0 = \frac{1}{2m}(p_1^2 + p_2^2) + V(r_1, r_2),$$

dove $V(r_1, r_2) = V(r_2, r_1)$ ed r_1, r_2 sono i moduli dei vettori posizione delle due particelle. Si determini $[H, \boldsymbol{J}]$, dove $\boldsymbol{J} = \boldsymbol{L} + \boldsymbol{S}$, $\boldsymbol{L} = \boldsymbol{L}_1 + \boldsymbol{L}_2$.

d) La funzione d'onda spaziale è data da

$$f(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = N r_1 r_2 e^{-\alpha(r_1^2 + r_2^2)} \sin\theta_1 \sin\theta_2 e^{i(\phi_1 + \phi_2)} \qquad \alpha > 0,$$

con N costante di normalizzazione. Se si misura al tempo t l'osservabile $\boldsymbol{J}^2$ sull'evoluto dello stato ψ con questa funzione spaziale, quali valori si ottengono e con quale probabilità? Si assuma che H_0 abbia la forma data alla domanda c) e che $f(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$ ne sia un'autofunzione come detto alla domanda b).

Esercizio 2. Una particella di massa m è soggetta ad una Hamiltoniana $H = H_0 + V$, dove

$$H_0 = \frac{p^2}{2m} - \frac{e^2}{r} \qquad\qquad V = A\left(x^2 + y^2\right).$$

a) Determinare i commutatori $[H_0, \mathbf{L}]$, $[H_0, \mathcal{P}]$, $[V, \mathbf{L}]$ e $[V, \mathcal{P}]$, dove $\mathbf{L}$ è l'operatore associato al momento angolare orbitale e $\mathcal{P}$ è l'operatore associato all'inversione spaziale (parità).

b) Calcolare al primo ordine in A la correzione all'energia del livello fondamentale di H_0.

c) Calcolare al primo ordine in A la correzione all'energia del primo livello eccitato di H_0. Si discuta l'eventuale rimozione della degenerazione.

Suggerimento: si determinino le simmetrie di V e si identifichino i corrispondenti operatori che commutano con V; ciò permette di determinare quali elementi della matrice della perturbazione ristretta al sottospazio degenere sono necessariamente nulli.

Possono risultare utili le seguenti formule ($a_0 \equiv \frac{\hbar^2}{me^2}$ è il raggio di Bohr e $R_{nl}(r)$ sono le autofunzione radiali normalizzate del problema Coulombiano):

$$\begin{aligned}
R_{10}(r) &= 2a_0^{-3/2}e^{-\frac{r}{a_0}} \\
R_{20}(r) &= (2a_0)^{-3/2}(2-\tfrac{r}{a_0})e^{-\frac{r}{2a_0}} \\
R_{21}(r) &= (2a_0)^{-3/2}\tfrac{r}{\sqrt{3}a_0}e^{-\frac{r}{2a_0}} \\
\Gamma(n+1) &= \int_0^{+\infty} t^n e^{-t} dt = n!
\end{aligned}$$

Esercizio 1.

a) Trattandosi di bosoni, la funzione d'onda deve essere pari sotto scambio. Dato che la parte spaziale è pari, la parte di spin deve essere pari.

Quindi $c=a$.

Normalizzazione [f è normalizzata]: $|a|^2+|b|^2+|c|^2=1$

Probabilità : $|b|^2=1/2$

Quindi $|b|=\frac{1}{\sqrt{2}}$ $\quad |a|=|c|=\frac{1}{2}$

Se $a=c$ reale, $b=\frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\alpha}$, $a=\frac{1}{2}$

$$\psi = f(\bar{r}_1,\bar{r}_2)\left(\frac{1}{2}|1\,-1\rangle+\frac{e^{i\alpha}}{\sqrt{2}}|1\,1\rangle+\frac{1}{2}|-1\,1\rangle\right)$$

Per fissare α calcoliamo $\langle\psi|S_{1x}^2S_{2x}^2|\psi\rangle=\left|S_{1x}S_{2x}|\psi\rangle\right|^2$

Dato che $\begin{cases} S_+=S_x+iS_y \\ S_-=S_x-iS_y \end{cases}$ $\quad S_x=\frac{1}{2}(S_++S_-)$

abbiamo

$$\frac{1}{\hbar}S_{1x}|\psi\rangle = \text{(scriviamo solo la parte di spin)}$$

$$=\frac{1}{2}(S_{1+}+S_{1-})\left(\frac{1}{2}|1\,-1\rangle+\frac{e^{i\alpha}}{\sqrt{2}}|1\,1\rangle+\frac{1}{2}|-1\,1\rangle\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{\sqrt{2}}{2}|0\,1\rangle+\frac{\sqrt{2}}{2}|0\,-1\rangle+e^{i\alpha}|0\,1\rangle\right)$$

$$\frac{1}{\hbar^2}S_{2x}S_{1x}|\psi\rangle=\frac{1}{4}(S_{2+}+S_{2-})\left[\frac{\sqrt{2}}{2}|0\,1\rangle+\frac{\sqrt{2}}{2}|0\,-1\rangle+e^{\alpha}|0\,1\rangle\right]$$

$$=\frac{1}{4}\left[|0\,0\rangle+|0\,0\rangle+\sqrt{2}e^{i\alpha}|0\,0\rangle\right]$$

$$=\frac{1}{4}(2+\sqrt{2}e^{i\alpha})|0\,0\rangle$$

Reintroducendo f: $\quad S_{2x}S_{1x}|\psi\rangle=f(r_1,r_2)\frac{\hbar^2}{4}(2+\sqrt{2}e^{i\alpha})|00\rangle$

$$\langle\psi|S_{1x}^2S_{2x}^2|\psi\rangle=\frac{\hbar^4}{16}|2+\sqrt{2}e^{i\alpha}|^2=\frac{\hbar^4}{16}(4+2+4\sqrt{2}\cos\alpha)$$

$$=\frac{\hbar^4}{8}(3+2\sqrt{2}\cos\alpha)$$

Il massimo si ottiene per $\alpha = 0$. Quindi lo stato è

$$|\psi\rangle = f(r_1, r_2)\left(\frac{1}{2}|1\,-1\rangle + \frac{1}{2}|-1\;1\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|1\;1\rangle\right)$$

b)

$$H = H_0 + \frac{\omega}{2\hbar}\left(S^2 - S_1^2 - S_2^2\right) = H_0 + \frac{\omega}{2\hbar}\left(S^2 - 4\hbar^2\right)$$

Riscriviamo gli stati in termini di $|S\,S_z\rangle_S$ autofunzioni dello spin totale S^2, S_z

$$|1\,-1\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}}|2\,0\rangle_S + \frac{1}{\sqrt{2}}|1\,0\rangle_S + \frac{1}{\sqrt{3}}|0\,0\rangle_S$$

$$|-1\;1\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}}|2\,0\rangle_S + \frac{1}{\sqrt{2}}|1\,0\rangle_S + \frac{1}{\sqrt{3}}|0\,0\rangle_S$$

$$|1\;1\rangle = |2\;2\rangle_S$$

$$|\psi\rangle = f(r_1, r_2)\left(\frac{1}{\sqrt{6}}|2\,0\rangle_S + \frac{1}{\sqrt{3}}|0\,0\rangle_S + \frac{1}{\sqrt{2}}|2\,2\rangle_S\right)$$

$$H\left(f(r_1, r_2)|2\;m\rangle_S\right) = E_0 + \frac{\omega}{2\hbar}\left(6\hbar^2 - 4\hbar^2\right) = E_0 + \hbar\omega$$

$$H\left(f(r_1, r_2)|0\,0\rangle_S\right) = E_0 + \frac{\omega}{2\hbar}\left(-4\hbar^2\right) = E_0 - 2\hbar\omega$$

$$\text{Prob}\left(E = E_0 + \hbar\omega\right) = \frac{1}{6} + \frac{1}{2} = \frac{2}{3}$$

$$\text{Prob}\left(E = E_0 - 2\hbar\omega\right) = \frac{1}{3}$$

[Nota: non è necessario considerare l'evoluto: la probabilità non dipendono da t]

c) Tutte le quantità che appaiono in H sono scalari
Quindi $[H, \bar{J}] = 0$

d) Dato che $[H, \bar{J}) = 0$ le probabilità non dipendono da t. Non è quindi necessario calcolare l'evoluto temporale

La funzione radiale si riscrive come

$$f(\bar r_1, \bar r_2) = N' r_1 r_2 e^{-\alpha(r_1^2 + r_2^2)} Y_1^1(\theta_1, \varphi_1) Y_1^1(\theta_2, \varphi_2)$$

Ora $Y_1^1(\theta_1, \varphi_1) Y_1^1(\theta_2, \varphi_2) \longrightarrow |\overset{L_1}{1}\ \overset{L_{1z}}{1}\rangle |\overset{L_2}{1}\ \overset{L_{2z}}{1}\rangle =$

$$= |\underset{\underset{L}{\uparrow}}{2}\ \underset{\underset{L_z}{\uparrow}}{2}\rangle_L \qquad \bar L = \bar L_1 + \bar L_2$$

Quindi

$$\psi = \underline{g(r_1, r_2)}\ |2\ 2\rangle_L \left(\frac{1}{\sqrt{6}} |2\ 0\rangle_S + \frac{1}{\sqrt{2}} |2\ 2\rangle_S + \frac{1}{\sqrt{3}} |0\ 0\rangle_S \right)$$

↳ funzione solo dei moduli r_1, r_2

Cambiamo base: da $|L\ L_z\rangle_L |S\ S_z\rangle_S \longrightarrow |L\ S\ J\ J_z\rangle$

$$|2\ 2\rangle_L |2\ 0\rangle_S = \sqrt{\frac{3}{14}} |2\ 2\ 4\ 2\rangle_J + \frac{1}{\sqrt{2}} |2\ 2\ 3\ 2\rangle_J + \sqrt{\frac{2}{7}} |2\ 2\ 2\ 2\rangle_J$$

$$|2\ 2\rangle_L |2\ 2\rangle_S = |2\ 2\ 4\ 4\rangle_J$$

$$|2\ 2\rangle_L |0\ 0\rangle_S = |2\ 0\ 2\ 2\rangle_J$$

Quindi

$$\psi = g(r_1, r_2) \left(\frac{1}{\sqrt{28}} |2\ 2\ 4\ 2\rangle_J + \frac{1}{\sqrt{12}} |2\ 2\ 3\ 2\rangle_J + \sqrt{\frac{1}{21}} |2\ 2\ 2\ 2\rangle_J + \frac{1}{\sqrt{2}} |2\ 2\ 4\ 4\rangle_J + \frac{1}{\sqrt{3}} |2\ 0\ 2\ 2\rangle_J \right)$$

$$\underset{(J=4)}{\text{Prob}(J^2 = 20\hbar^2)} = \frac{1}{28} + \frac{1}{2} = \frac{15}{28}$$

$$\underset{(J=3)}{\text{Prob}(J^2 = 12\hbar^2)} = \frac{1}{12}$$

$$\underset{J=2}{\text{Prob}(J^2 = 6\hbar^2)} = \frac{1}{21} + \frac{1}{3} = \frac{8}{21}$$

Esercizio 2

a) H_0 è invariante per rotazioni dato che contiene solo scalari. Quindi $[H_0, \vec{L}]=0$

Sotto parità ($P\vec{r}P=-\vec{r}$, $P\vec{p}P\Rightarrow-\vec{p}$) abbiamo $P|\vec{r}|P=|r|$ e $Pp^2P=p^2$. Quindi $PH_0P=H_0 \Rightarrow [H_0, P]=0$

$V(x,y)=V(-x,-y) \Longrightarrow \quad PVP=V \Rightarrow \quad [P,V]=0$

Il commutatore $[V,\vec{L}]$ non è nullo dato che V è invariante solo per rotazioni intorno a z.

L'invarianza per rotazioni intorno a z implica $[V,L_z]=0$
Alternativamente (molto più laborioso) si può notare che

$$V=Ar^2(\sin^2\theta\cos^2\varphi+\sin^2\theta\sin^2\varphi)=Ar^2\sin^2\theta$$

Quindi V non dipende da φ. Allora V commuta con $L_z=-i\hbar\,\partial/\partial\phi \quad \Longrightarrow \quad [V,L_z]=0$

Calcolo degli altri commutatori.

$$\begin{aligned}[V,L_x] &= A[x^2+y^2,L_x]=A[y^2,L_x] \\ &= Ay[y,L_x]+A[y,L_x]y = \\ &= Ay(-i\hbar z)+A(-i\hbar z)y = -2i\hbar Ayz\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}[V,L_y] &= A[x^2+y^2,L_y]=A[x^2,L_y] \\ &= Ax[x,L_y]+A[x,L_y]x \\ &= Ax(i\hbar z)+A(i\hbar z)x = 2i\hbar Axz\end{aligned}$$

b) Lo stato fondamentale è non degenere $|\overset{n}{1}\,\overset{\ell}{0}\,\overset{\ell_z}{0}\rangle$

$$|1\,0\,0\rangle \longrightarrow R_{10}(r)Y_0^0(\theta,\varphi)=\frac{2}{a_0^{3/2}}e^{-r/a_0}Y_0^0=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{1}{a_0^{3/2}}e^{-r/a_0}$$

$$\Delta E = A \langle 1 0 0 | r^2 \sin^2\theta | 1 0 0 \rangle$$

$$= A \int d^3r \, \frac{1}{\pi a_0^3} e^{-2r/a_0} r^2 \sin^2\theta \qquad \frac{2r}{a_0} = x$$

$$= \frac{A}{\pi a_0^3} \left(\frac{a_0}{2}\right)^5 \int_0^\infty dx\, x^4 e^{-x} \int \sin^2\theta \, d\cos\theta \int d\varphi \qquad y = \cos\theta$$

$$= \frac{A}{\pi a_0^3} \frac{a_0^5}{2^5} 4! \, 2\pi \int_{-1}^{1} dy \, (1-y^2)$$

$$= \frac{3}{2} A a_0^2 \cdot 2\left(1 - \frac{1}{3}\right) = 2 A a_0^2$$

c) Il primo stato eccitato è 4 volte degenere. Una base è data da $|\underset{n}{2}\,\underset{\ell}{0}\,\underset{\ell_z}{0}\rangle$, $|2\,1\,m\rangle$ $\quad m = \pm 1, 0$

Dato che V è pari per parità $PVP = P$

$$\langle 2 0 0 | V | 2 1 m \rangle = \langle 2 0 0 | P\, PVP\, P | 2 1 m \rangle$$
$$= \langle 2 0 0 | (+1)\, V\, (-1) | 2 1 m \rangle$$
$$= - \langle 2 0 0 | V | 2 1 m \rangle$$

Quindi $\langle 2 0 0 | V | 2 1 m \rangle = 0$

Dato che $[V, L_z] = 0$ abbiamo

$$\langle 2 1 m | [V, L_z] | 2 1 m' \rangle = 0$$

$$\langle 2 1 m | (V \hbar m' - \hbar m V) | 2 1 m' \rangle = 0$$

$$\hbar (m' - m) \langle 2 1 m | V | 2 1 m' \rangle = 0$$

$$\Rightarrow \langle 2 1 m | V | 2 1 m' \rangle = 0 \quad \text{se} \quad m \neq m'$$

Quindi la perturbazione è diagonale nella base considerata

Ora

$$\langle 2\, l m | V | 2\, l m \rangle =$$

$$= A \int d^3 r \; R_{2l}^2 \, |Y_l^m|^2 \, r^2 \sin^2\theta \qquad [\,|Y_l^m|^2 \text{ non dip. da } \phi\,]$$

$$= A \left[\int_0^\infty dr\, r^4 R_{2l}^2 \right] \left[\int d\cos\theta \, |Y_l^m|^2 \sin^2\theta \right] \int d\varphi$$

$$= 2\pi A \, I_l \, J_{lm}$$

$$I_0 = \int_0^\infty dr\, r^4 \frac{1}{(2a_0)^3} \left(2 - \frac{r}{a_0}\right)^2 e^{-r/a_0} \qquad x = r/a_0$$

$$= \frac{a_0^2}{8} \int_0^\infty dx\, x^4 (4 - 4x + x^2) e^{-x}$$

$$= \frac{a_0^2}{8} (4 \cdot 4! - 4 \cdot 5! + 6!) = \frac{a_0^2}{8} \cdot 4! \,(4 - 20 + 30) = 3 \cdot 14 a_0^2 = 42 a_0^2$$

$$I_1 = \int_0^\infty dr\, r^4 \frac{1}{(2a_0)^3} \frac{r^2}{3a_0^2} e^{-r/a_0} \qquad x = r/a_0$$

$$= \frac{a_0^2}{24} \int dx\, x^6 e^{-x} = \frac{a_0^2}{24} \cdot 6! = 30 a_0^2$$

$$J_{00} = \int d\cos\theta \, \frac{1}{4\pi} \sin^2\theta = \frac{1}{4\pi} \int_{-1}^{1} dy \,(1 - y^2) = \frac{1}{4\pi} \cdot 2 \left(1 - \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3\pi}$$

$$J_{10} = \int d\cos\theta \, \frac{3}{4\pi} \cos^2\theta \sin^2\theta \qquad \boxed{y = \cos\theta}$$

$$= \frac{3}{4\pi} \int dy \,(1 - y^2) y^2 = \frac{3}{4\pi} \int dy \,(y^2 - y^4)$$

$$= \frac{3}{4\pi} \cdot 2 \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) = \frac{3}{2\pi} \cdot \frac{2}{15} = \frac{1}{5\pi}$$

$$J_{11} = \int d\cos\theta \, \frac{3}{8\pi} \sin^4\theta = \frac{3}{8\pi} \int dy \,(1 - 2y^2 + y^4)$$

$$= \frac{3}{8\pi} \cdot 2 \left(1 - \frac{2}{3} + \frac{1}{5}\right) = \frac{3}{4\pi} \cdot \frac{8}{15} = \frac{2}{5\pi}$$

$$J_{1-1} = J_{11}$$

Quindi

$$\langle 200|V|200\rangle = 2\pi A\, I_0\, J_{00}$$

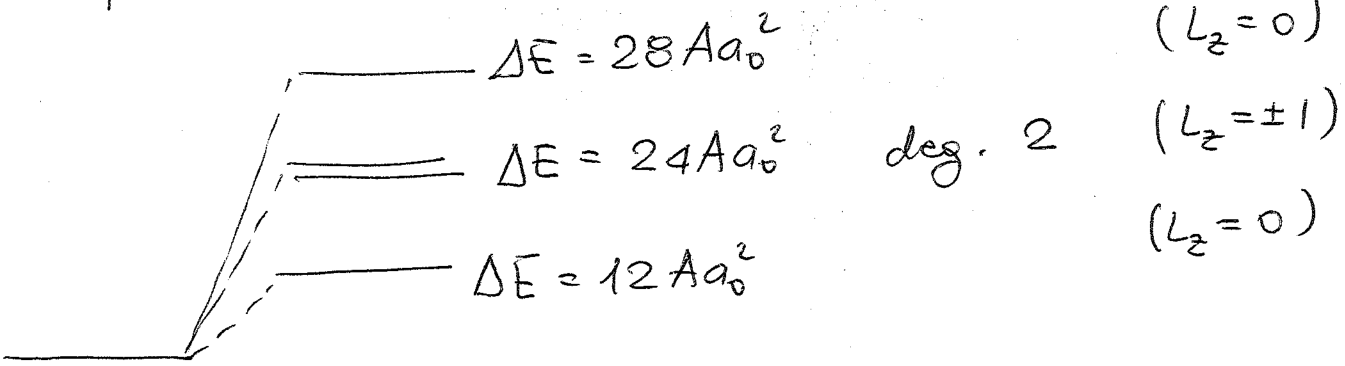
$$= 2\pi A\, 42 a_0^2\, \frac{1}{3\cancel{2}\pi} = 28\, Aa_0^2$$

$$\langle 21\pm1|V|21\pm1\rangle = 2\pi A\, I_1\, J_{11}$$

$$= 2\pi A \cdot 30 a_0^2\, \frac{2}{5\pi} = 24\, Aa_0^2$$

$$\langle 210|V|210\rangle = 2\pi A\, I_1\, J_{10} = 2\pi A\, 30 a_0^2\, \frac{1}{5\pi} = 12\, A a_0^2$$

Il primo stato eccitato si separa



La degenerazione dei livelli con $L_z = \pm 1$ era prevedibile vista la simmetria cilindrica e sotto inversione $\phi \to -\phi$ della Hamiltoniana $H_0 + V$. Quindi la degenerazione è una proprietà ESATTA, non dipendente dalla approssimazione perturbativa.

Esame di Meccanica Quantistica, 09/02/2024

Esercizio 1. Due particelle di uguale massa m sono vincolate a muoversi in una dimensione. La Hamiltoniana è data da $\hat{H}=\hat{H}_0 + \lambda\hat{V}$ dove

$$\hat{H}_0 = \frac{1}{2m}(\hat{p}_1^2 + \hat{p}_2^2) + \frac{1}{2}m\omega^2\left(\hat{x}_1^2 + \hat{x}_2^2\right) \qquad\qquad \hat{V} = m\omega^2\hat{x}_1\hat{x}_2.$$

a) Si assuma che le due particelle siano distinguibili di spin 0.

(a_1) Si determini l'energia dei primi 3 livelli di H_0, la degenerazione e una base di autostati.
(a_2) Si assuma $0 < \lambda \ll 1$. Si calcoli al primo ordine perturbativo in λ la correzione all'energia dei primi 3 livelli di $\hat{H}_0$ e si discuta l'eventuale rimozione della degenerazione.

b) Si assuma che le due particelle siano indistinguibili e di spin 0. Si risponda nuovamente alle domande a_1 e a_2.

c) Si assuma che le due particelle siano indistinguibili e abbiano spin 1/2. Si risponda nuovamente alle domande a_1 e a_2.

d) Si consideri ora la Hamiltoniana H con $\lambda = -1$.
(d_1) Si scriva H nel sistema di riferimento del centro di massa.
(d_2) Nel sistema di riferimento del centro di massa, si determini l'energia dei primi 3 livelli di $\hat{H}$, la degenerazione e una base di autostati. Si assuma che le due particelle siano indistinguibili e di spin 0.

Esercizio 2. Il moto di una particella di massa M e spin 3/2 è determinato dalla Hamiltoniana

$$H = \frac{p^2}{2M} + \frac{\kappa}{r}\left(2\boldsymbol{L}\cdot\boldsymbol{S} + L^2\right) ,$$

dove $\kappa > 0$ è un parametro e $r = |\boldsymbol{r}|$.

a) Si determini lo spettro dei livelli energetici degli stati legati, la relativa degenerazione e le corrispondenti autofunzioni dell'Hamiltoniana.

b) Si considerino gli stati legati descritti da funzioni d'onda spinoriali della forma

$$\psi(r,\theta,\varphi) = \begin{bmatrix} f(r)\sin\theta e^{-i\varphi} \\ -\frac{2}{\sqrt{3}}f(r)\cos\theta + \frac{g(r)}{\sqrt{3}}\sin\theta e^{-i\varphi} \\ -\frac{f(r)}{\sqrt{3}}\sin\theta e^{i\varphi} - \frac{2}{\sqrt{3}}g(r)\cos\theta \\ -g(r)\sin\theta e^{i\varphi} \end{bmatrix}$$

dove $f(r)$ e $g(r)$ sono funzioni di r. Si determinino tutti gli stati ψ per i quali: *i)* una misura dell'energia fornisce con certezza un valore minore di $-M\kappa^2\hbar^2/3$; *ii)* $\langle\psi|J_z|\psi\rangle = \hbar/2$; *iii)* la probabilità che una misura dell'energia fornisca il valore dell'energia dello stato fondamentale è 3/4.

c) Quali sono i risultati possibili di una misura di L_z su tutti gli stati ψ trovati al punto precedente e quali sono le corrispondenti probabilità ?

d) Tra gli stati trovati al punto b), si determini quello per il quale $\langle\psi|r|\psi\rangle$ assume il valore massimo.

Formula utile:

$$\Gamma(n+1) = \int_0^{+\infty} t^n e^{-t} dt = n!$$

Autofunzioni radiali $R_{nl}(r)$ per il problema Coulombiano (a_0 è il raggio di Bohr):

$$\begin{aligned}
R_{10}(r) &= 2\frac{1}{a_0^{3/2}}\, e^{-\frac{r}{a_0}} \\
R_{20}(r) &= \frac{1}{(2a_0)^{3/2}}\, \left(2 - \frac{r}{a_0}\right) e^{-\frac{r}{2a_0}} \\
R_{21}(r) &= \frac{1}{\sqrt{3}}\, \frac{1}{(2a_0)^{3/2}}\, \frac{r}{a_0}\, e^{-\frac{r}{2a_0}} \\
R_{30}(r) &= 2\frac{1}{(3a_0)^{3/2}}\, \left(1 - \frac{2r}{3a_0} + \frac{2r^2}{27a_0^2}\right) e^{-\frac{r}{3a_0}} \\
R_{31}(r) &= \frac{4\sqrt{2}}{9}\, \frac{1}{(3a_0)^{3/2}}\, \frac{r}{a_0} \left(1 - \frac{r}{6a_0}\right) e^{-\frac{r}{3a_0}} \\
R_{32}(r) &= \frac{2\sqrt{2}}{27\sqrt{5}}\, \frac{1}{(3a_0)^{3/2}}\, \left(\frac{r}{a_0}\right)^2 e^{-\frac{r}{3a_0}} \, .
\end{aligned}$$

Esercizio 1 ⓐ1

a) Si tratta di due oscillatori indipendenti

(a1) Quindi

$$E = \hbar\omega(n_1 + \tfrac{1}{2}) + \hbar\omega(n_2 + \tfrac{1}{2})$$
$$= \hbar\omega(n_1 + n_2 + 1)$$

autof. $|n_1\, n_2\rangle$
$\downarrow$
$\psi_{n_1}(x_1)\psi_{n_2}(x_2)$

[$\psi_n(x)$ autof dell'oscillatore armonico]

Livelli più bassi:

fond $n = n_1 + n_2 = 0$ $E = \hbar\omega$ $|0\,0\rangle$ non deg.

I ecc. $n = n_1 + n_2 = 1$ $E = 2\hbar\omega$ $|1\,0\rangle, |0\,1\rangle$ deg $= 2$

II ecc $n = n_1 + n_2 = 2$ $E = 3\hbar\omega$ $|2\,0\rangle, |1\,1\rangle, |0\,2\rangle$ deg 3

Livello con $E = (n+1)\hbar\omega$ deg. $(n+1)$

(a2)

Dobbiamo calcolare gli elementi di matrice di x per l'oscillatore armonico 1 d

Se $a = \dfrac{i}{\sqrt{2m\hbar\omega}}(p - im\omega q)$ $a^+ = \dfrac{-i}{\sqrt{2m\hbar\omega}}(p + im\omega q)$

$$q = \frac{1}{\sqrt{2}}\xi(a + a^+) \qquad \xi = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}$$

Calcoliamo

$$\langle n|q|m\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\xi\langle n|(a+a^+)|m\rangle$$

Dato che $a^+|m\rangle \sim |m+1\rangle$, $a^{\cancel{+}}|m\rangle \sim |m-1\rangle$; questo elemento di matrice è non nullo solo per $|n-m| = 1$

Quindi

$$\langle n+1|q|n\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\xi\langle n+1|(a+a^+)|n\rangle$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\xi\sqrt{n+1}$$

$$\langle n-1|q|n\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\xi\langle n-1|a|n\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\xi\sqrt{n}$$ [ovviamente è uguale a $\langle n|q|n-1\rangle^*$]

- Stato fond : non deg con autostato $|0\,0\rangle$

$$\Delta E = \langle 0 0|V|0 0\rangle = \lambda m\omega^2 \langle 0 0|x_1 x_2|0 0\rangle$$
$$= \lambda m\omega^2 \langle 0|x_1|0\rangle\langle 0|x_2|0\rangle = 0$$

- I ecc.: deg 2 con stati $|1\,0\rangle, |0\,1\rangle$

$$\langle 1 0|V|1 0\rangle = \langle 0 1|V|0 1\rangle = 0$$

$$\langle 1 0|V|0 1\rangle = \lambda m\omega^2 \langle 1|x_1|0\rangle\langle 0|x_1|1\rangle$$
$$= \lambda m\omega^2 \frac{\xi^2}{2} = \frac{\lambda}{2} m\omega^2 \frac{\hbar}{m\omega} = \frac{\lambda}{2}\hbar\omega$$

$$V = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\lambda}{2}\hbar\omega \\ \frac{\lambda}{2}\hbar\omega & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{autovalori: } \pm\frac{\lambda}{2}\hbar\omega$$

Degenerazione rimossa

$$E = 2\hbar\omega \begin{cases} +\frac{\lambda}{2}\hbar\omega \\ -\frac{\lambda}{2}\hbar\omega \end{cases}$$

- II ecc.: deg. 3 con stati $|2\,0\rangle, |1\,1\rangle, |0\,2\rangle$

Gli elementi diagonali della matrice della perturbazione sono nulli.

$$\langle 2\,0|V|1\,1\rangle = \lambda m\omega^2 \langle 2|x_1|1\rangle\langle 0|x_2|1\rangle$$
$$= \lambda m\omega^2 \xi \cdot \frac{\xi}{\sqrt{2}} = \frac{\lambda\hbar\omega}{\sqrt{2}} \quad \left[\begin{matrix}\text{pure uguale a} \\ \langle 0\,2|V|1\,1\rangle\end{matrix}\right]$$

$$\langle 2\,0|V|0\,2\rangle = 0.$$

Se ordiniamo gli elementi $|2\,0\rangle, |1\,1\rangle, |0,2\rangle$

$$\hat{V} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\lambda\hbar\omega}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{\lambda\hbar\omega}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{\lambda\hbar\omega}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{\lambda\hbar\omega}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix}$$

(a3)

Autovalori [indicati con μ]

$$\det(V-\mu I) = \begin{pmatrix} -\mu & a & 0 \\ a & -\mu & a \\ 0 & a & -\mu \end{pmatrix} \qquad a = \frac{\lambda}{\sqrt{2}}\hbar\omega$$

$$= -\mu \begin{pmatrix} -\mu & a \\ a & -\mu \end{pmatrix} - a \begin{pmatrix} a & a \\ 0 & -\mu \end{pmatrix}$$

$$= -\mu(\mu^2 - a^2) + \mu a^2 = -\mu(\mu^2 - 2a^2) \longrightarrow \quad \mu = \begin{cases} 0 \\ \pm\sqrt{2}a \end{cases}$$

La degenerazione è rimossa

$$E = 3\hbar\omega + \begin{cases} +\lambda\hbar\omega \\ +0 \\ -\lambda\hbar\omega \end{cases}$$

b)

(a1) Sono ammessi solo stati pari

fond $n=0$ $E=\hbar\omega$ $|0\,0\rangle$ non deg.

I ecc. $n=1$ $E=2\hbar\omega$ $\frac{1}{\sqrt{2}}(|1\,0\rangle + |0\,1\rangle)$ non deg.

II ecc. $n=2$ $E=3\hbar\omega$ $\frac{1}{\sqrt{2}}(|2\,0\rangle + |0\,2\rangle)$, $|1\,1\rangle$ deg $=2$

(a2)

Come prima $\Delta E = 0$ per lo stato fondamentale

I ecc.

$$\Delta E = \frac{1}{2}(\langle 1\,0| + \langle 0\,1|)\,V\,(|1\,0\rangle + |0\,1\rangle)$$

$$= \frac{1}{2}[\langle 1\,0|V|0\,1\rangle + \langle 0\,1|V|1\,0\rangle]$$ (gli altri due termini sono nulli)

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\lambda}{2}\hbar\omega + \frac{\lambda}{2}\hbar\omega\right) = \frac{\lambda}{2}\hbar\omega$$

$$E = 2\hbar\omega + \frac{\lambda}{2}\hbar\omega$$

II ecc:

base: $|2\,0\rangle_s = \frac{1}{\sqrt{2}}(|2\,0\rangle + |0\,2\rangle)$, $|1\,1\rangle$

I termini diagonali della matrice della perturbazione sono nulli. Infine

$$\langle 1\,1|V|2\,0\rangle_s = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\langle 1\,1|V|2\,0\rangle + \langle 1\,1|V|0\,2\rangle\right)$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot 2 \cdot \frac{\lambda\hbar\omega}{\sqrt{2}} = \lambda\hbar\omega$$

$V = \begin{pmatrix} 0 & \lambda\hbar\omega \\ \lambda\hbar\omega & 0 \end{pmatrix}$ autovalori $\pm\lambda\hbar\omega$

Il livello si separa in $3\hbar\omega \pm \lambda\hbar\omega$

c) ⓐ①

fond $n=0$ $E=\hbar\omega$ $\overset{n_1\, n_2}{|0\,0\rangle}\overset{S\;S_z}{|0\;0\rangle}$ non degenere

Qui $\bar{S} = \bar{S}_1 + \bar{S}_2$ è lo spin totale

Iecc $n=1$ $E=\hbar\omega$ $\begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}}(|1\,0\rangle + |0\,1\rangle)|0\,0\rangle \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(|1\,0\rangle - |0\,1\rangle)|\underset{\overset{\uparrow}{S}}{1}\;\underset{\overset{\uparrow}{S_z}}{m}\rangle \end{cases}$ deg. $1+3=4$

IIecc. $n=2$ $E=2\hbar\omega$

$\frac{1}{\sqrt{2}}(|2\,0\rangle + |0\,2\rangle)|0\,0\rangle$

$\frac{1}{\sqrt{2}}(|2\,0\rangle - |0\,2\rangle)|1\,m\rangle$ deg: $1+3+1=5$

$|1\,1\rangle|0\,0\rangle$

ⓐ②

fond. come prima $\Delta E = 0$

I ecc :   base: $|10\rangle_S|00\rangle$, $|10\rangle_A|11\rangle$,
$|10\rangle_A|10\rangle$, $|10\rangle_A|1-1\rangle$

dove $|10\rangle_S$ e $|10\rangle_A$ sono $\frac{1}{\sqrt{2}}(|10\rangle+|01\rangle)$ e $\frac{1}{\sqrt{2}}(|10\rangle-|01\rangle)$ rispettivamente.

Per l'ortogonalità delle funzioni di spin, la matrice della perturbazione è diagonale

$$\begin{pmatrix} {}_S\langle 10|V|10\rangle_S & 0 & 0 & 0 \\ 0 & {}_A\langle 10|V|10\rangle_A & 0 & 0 \\ 0 & 0 & {}_A\langle 10|V|10\rangle_A & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \langle 10|V|10\rangle_A \end{pmatrix}$$

Calcoliamo

$${}_A\langle 10|V|10\rangle_A = \left(\langle 10| - \langle 01|\right) V \left(|10\rangle - |01\rangle\right)\frac{1}{2}$$

$$= -\frac{1}{2}\left[\langle 10|V|01\rangle + \langle 01|V|10\rangle\right] = -\frac{\lambda}{2}\hbar\omega$$

${}_S\langle 10|V|10\rangle_S = +\frac{\lambda}{2}\hbar\omega$ (già calcolato al punto b)

Lo spettro si separa

$$E = 2\hbar\omega \begin{cases} +\frac{\lambda}{2}\hbar\omega & \text{(non deg.) (spin 0)} \\ -\frac{\lambda}{2}\hbar\omega & \text{deg. 3 (spin 1)} \end{cases}$$

II ecc.: Ordiniamo la base secondo

$|11\rangle|00\rangle$, $\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|20\rangle+|02\rangle\right)|00\rangle \equiv |20\rangle_S|00\rangle$

$|20\rangle_A|11\rangle$, $|20\rangle_A|10\rangle$, $|20\rangle_A|1-1\rangle$

L'ortogonalità delle funzioni di spin implica

$$\left(\begin{array}{cc|ccc} \langle 11|V|11\rangle_S & \langle 11|V|20\rangle_S & 0 & 0 & 0 \\ {}_S\langle 20|V|11\rangle_S & {}_S\langle 20|V|20\rangle_S & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & \langle 20|V|20\rangle_A & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \langle 20|V|20\rangle_A & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & {}_A\langle 20|V|20\rangle_A \end{array}\right)$$

~~Da~~ La matrice è a blocchi. Dato che $\langle 20|V|20\rangle_A = 0$ il blocco 3×3 (stati di spin 1) ha 3 autovalori nulli. Il blocco 2×2 è già stato considerato al punto b): due autovalori pari a $\pm \lambda\hbar\omega$

Energie

$E = 3\hbar\omega$

- $+\lambda\hbar\omega$ non deg. Spin = 0
- 0 deg. 3 Spin = 1
- $-\lambda\hbar\omega$ non deg. Spin = 0

d)

$$H = \frac{p_1^2}{2m} + \frac{p_2^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 x_1^2 + \frac{1}{2}m\omega^2 x_2^2 - m\omega^2 x_1 x_2$$

$$= \frac{p_1^2}{2m} + \frac{p_2^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 (x_1 - x_2)^2$$

Se $\begin{cases} x = x_2 - x_1 & \text{coord. rel} \\ X = \frac{1}{2}(x_1 + x_2) & \text{coord CM} \end{cases}$

$$= \frac{P^2}{2M} + \frac{p^2}{2\mu} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2$$

Nel CM $H = \frac{p^2}{2\mu} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2$ $\mu = \frac{m}{2}$

$$= \frac{p^2}{2\mu} + \frac{1}{2}2\mu\omega^2 x^2 = \frac{p^2}{2\mu} + \frac{1}{2}\mu(\sqrt{2}\omega)^2 x^2$$

È un oscillatore di pulsazione $\sqrt{2}\omega$

Per particelle distinguibili

$$E_n = \hbar \sqrt{2} \omega \left(n + \frac{1}{2}\right)$$

Per bosoni solo gli stati pari sotto $x \to -x$ sono accettabili. Quindi n può assumere solo valori pari

$E_0 = \hbar \frac{\sqrt{2}}{2} \omega$ fond.

$E_2 = \hbar \frac{5\sqrt{2}}{2} \omega$ I ecc.

$E_4 = \hbar \frac{9\sqrt{2}}{2} \omega$ II ecc.

· ADDENDUM

È pure possibile risolvere il problema in modo esatto. Se effettuiamo la trasf. canonica

$$\begin{cases} Q_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(q_1+q_2) & P_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(p_1+p_2) \\ Q_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(q_1-q_2) & P_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(p_1-p_2) \end{cases}$$

abbiamo

$$H = \frac{1}{2m}(P_1^2+P_2^2) + \frac{1}{2}m\omega^2(Q_1^2+Q_2^2) + \frac{m\omega^2}{2}\lambda(Q_1^2-Q_2^2)$$

$$= \frac{1}{2m}P_1^2 + \frac{1}{2}m\omega^2(1+\lambda)Q_1^2 + \frac{1}{2}m\omega^2(1-\lambda)Q_2^2 + \frac{1}{2m}P_2^2$$

Se $|\lambda| < +1$ si tratta di due oscillatori di pulsazioni $\Omega_1 = \omega\sqrt{1+\lambda}$ $\Omega_2 = \omega\sqrt{1-\lambda}$

Spettro per particelle distinguibili spin 0

$$E(n_1,n_2) = \hbar\Omega_1\left(n_1+\frac{1}{2}\right) + \hbar\Omega_2\left(n_2+\frac{1}{2}\right)$$

Per valori generici di λ lo spettro è non degenere

Per $\lambda \to 0$

$$E(n_1,n_2) = \hbar\omega\left(1+\frac{\lambda}{2}\right)\left(n_1+\frac{1}{2}\right) + \hbar\omega\left(1-\frac{\lambda}{2}\right)\left(n_2+\frac{1}{2}\right) + O(\lambda^2)$$

$$= \hbar\omega(n_1+n_2+1) + \hbar\omega\frac{\lambda}{2}(n_1-n_2) + O(\lambda^2)$$

Per particelle indistinguibili, notiamo che sotto scambio

$$Q_1 \to Q_1 \quad , \quad Q_2 \to -Q_2$$

Quindi

$E(n_1, n_2)$ $\longrightarrow$ autostato $\psi_{n_1}(Q_1)\psi_{n_2}(Q_2)$

pari sotto scambio per n_2 pari

dispari sotto scambio per n_2 dispari

- Particelle indistinguibili di spin 0.

n_2 deve essere necessariamente pari

- Particelle di spin 1/2 indistinguibili

Gli autostati sono

$$\psi_{n_1}(Q_1)\,\psi_{n_2}(Q_2)\,|\overset{S}{0}\;\overset{S_z}{0}\rangle \qquad n_2 \text{ pari } [\text{deg. } 1]$$

$$\psi_{n_1}(Q_1)\,\psi_{n_2}(Q_2)\,|1\;S_z\rangle \qquad n_2 \text{ dispari } [\text{deg. } 3]$$

---

controllo dei risultati precedenti

ⓐ

$n_1=n_2=0 \qquad \hbar\omega + 0 + O(\lambda^2)$

$$\begin{cases} n_1=0 \quad n_2=1 & 2\hbar\omega - \frac{\lambda}{2}\hbar\omega \\ n_1=1 \quad n_2=0 & 2\hbar\omega + \frac{\lambda}{2}\hbar\omega \end{cases}$$

$$\begin{cases} n_1=0 \quad n_2=2 & 3\hbar\omega - \lambda\hbar\omega \\ n_1=1 \quad n_2=1 & 3\hbar\omega \end{cases}$$

$n_1=2 \quad n_2=0 \qquad 3\hbar\omega + \lambda\hbar\omega$

ⓑ

$n_1=n_2=0 \qquad \hbar\omega$

$n_1=1 \quad n_2=0 \qquad 2\hbar\omega + \frac{\lambda}{2}\hbar\omega$

$n_1=2 \quad n_2=0 \qquad 3\hbar\omega + \lambda\hbar\omega$

$n_1=0 \quad n_2=2 \qquad 3\hbar\omega - \lambda\hbar\omega$

ⓒ

spettro come ⓐ: stati con n_2 disp. deg. 3;
n_2 pari deg. 1.

Esercizio 2

a) La Hamiltoniana è invariante per rotazioni e quindi commuta con $\vec{J}$ e commuta pure con L^2 dato che dipende da $p^2, |\vec{r}|$ e $[\vec{L}, \vec{p}^2] = [\vec{L}, |\vec{r}|] = 0$

Quindi scegliamo una base contemporanea di H, J^2, J_z, L^2 e cerchiamo autofunzioni della forma,

$R(r) | L\ J\ J_z >$

Ovviamente L e J non sono indipendenti dato che

$|L - \frac{3}{2}| \leq J \leq |L + \frac{3}{2})$ In particolare J è semiintero.

Dato che $(2\vec{L} \cdot \vec{S} + L^2) = J^2 - S^2 = J^2 - \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{2} \hbar^2$

$$H \left(R(r) | L J J_z > \right) = \frac{p^2}{2M} \left(R(r) | L J J_z > \right) + \frac{k}{r} \hbar^2 \left(J(J+1) - \frac{15}{4} \right) \cdot R(r) | L J J_z >$$

Ricordiamo che $H = \frac{p^2}{2M} + \frac{\alpha}{r}$ con $\alpha > 0$ (potenziale repulsivo) non ha traiettorie classiche limitate e quindi non ha stati legati.. Stati legati esistono solo se $\alpha < 0$

Quindi esistono stati legati con $E < 0$ solo se

$$\alpha_J = k\hbar^2 \left(J(J+1) - \frac{15}{4} \right) < 0$$

$J = \frac{1}{2}$ $\quad \alpha_{1/2} = k\hbar^2 \left(\frac{3}{4} - \frac{15}{4} \right) = -3k\hbar^2$

$J = \frac{3}{2}$ $\quad \alpha_{3/2} = 0$

$J = \frac{5}{2}$ $\quad \alpha_{5/2} = k\hbar^2 \left(\frac{35}{4} - \frac{15}{4} \right) > 0.$

Quindi vi sono stati legati solo per $J = 1/2$

Determiniamo quindi i possibili valori di L.

Se $L=0$ $\quad J$ è uguale a $3/2$

$L=1$ $\quad J = 1/2, 3/2, 5/2$

$L=2$ $\quad J = 1/2, 3/2, 5/2, 7/2$

$L=3$ $\quad J = 3/2, 5/2, 7/2, 9/2$

} solo per $L=1$ e 2 è possibile avere $J=1/2$

ecc.

Quindi vanno considerati solo stati con $\begin{cases} J=1/2 & L=1 \\ J=1/2 & L=2 \end{cases}$

Per questi stati

$$H\left(R(r)\,|L\ \tfrac{1}{2}\ J_z\rangle\right) = \frac{p^2}{2M}\left(R(r)\,|L\ \tfrac{1}{2}\ J_z\rangle\right) - \frac{\alpha}{r}R(r)\,|L\ \tfrac{1}{2}\ J_z\rangle$$

$$\alpha = 3k\hbar^2$$

Quindi abbiamo $\quad H\psi = E\psi$

$$\frac{1}{r}\left(-\frac{\hbar^2}{2M}\right)\frac{\partial^2}{\partial r^2}(rR)\,|L\ \tfrac{1}{2}\ J_z\rangle + \frac{\hbar^2(L+1)L}{2mr^2}R\,|L\ \tfrac{1}{2}\ J_z\rangle$$

$$-\frac{\alpha}{r}R(r)\,|L\ \tfrac{1}{2}\ J_z\rangle = E\,R(r)\,|L\ \tfrac{1}{2}\ J_z\rangle$$

Otteniamo quindi l'equazione radiale dell'atomo di idrogeno

$$-\frac{\hbar^2}{2Mr}\frac{\partial^2}{\partial r^2}(rR) + \frac{\hbar^2L(L+1)}{2mr^2}R - \frac{\alpha}{r}R = ER$$

Se

$$E_n = -\frac{M}{2\hbar^2}\frac{\alpha^2}{n^2}$$

troviamo:

$n=1$ una soluzione con $L=0$ $[R_{10}]$

$n=2$ una soluzione con $L=0$ ed una con $L=1$ $[R_{20}, R_{21}]$

$n=3$ sol. con $L=0,1,2$ $[R_{30}, R_{31}, R_{32}]$

ecc.

Tenuto conto che solo $L=1$ e $L=2$ sono possibili lo spettro è dato

$$\begin{array}{llll} & & \qquad\quad L \; J & \\ n=2 & E=-\frac{M}{2\hbar^2}\frac{\alpha'}{4} & R_{21}\,|1\;\tfrac{1}{2}\;J_z\rangle & \text{deg } 2 \\ n=3 & E=-\frac{M}{2\hbar^2}\frac{\alpha'}{9} & \left\{\begin{array}{l} R_{31}\,|1\;\tfrac{1}{2}\;J_z\rangle \\ R_{32}\,|2\;\tfrac{1}{2}\;J_z\rangle \end{array}\right. & \text{deg. } 4 \\ n=4 & E=-\frac{M}{2\hbar^2}\frac{\alpha'}{16} & \left\{\begin{array}{l} R_{41}\,|1\;\tfrac{1}{2}\;J_z\rangle \\ R_{42}\,|2\;\tfrac{1}{2}\;J_z\rangle \end{array}\right. & \text{deg. } 4 \end{array}$$

ecc.

A parte lo stato fondamentale, tutti i livelli hanno degenerazione 4.

Esplicitando α:
$$E_n=-\frac{M}{2\hbar^2}\frac{9k^2\hbar^4}{n^2} \qquad n: 2, \dots \infty$$
$$=-\frac{9}{2}k^2M\hbar^2\frac{1}{n^2}$$

b)

$E_2=-\frac{9}{8}Mk^2\hbar^2$ stato fond.

$E_3=-\frac{1}{2}Mk^2\hbar^2$ I ecc.

$E_4=-\frac{9}{32}Mk^2\hbar^2$ II ecc.

Il testo indica che $E<-\frac{1}{3}Mk^2\hbar^2=-\frac{9}{27}Mk^2\hbar^2$
$$<-\frac{9}{32}Mk^2\hbar^2$$

Quindi vanno considerati solo gli stati con $n=2$ e 3. [in totale 6 stati]

Il requisito ii) è $\langle\psi|J_z|\psi\rangle = \hbar/2$.
Dato che $|\psi\rangle$ è somma di autofunzioni di J_z con autovalore $+\hbar/2$ e $-\hbar/2$ questa condizione implica che $|\psi\rangle$ è autofunzione di J_z con autovalore $+\hbar/2$.

DIMOSTRAZIONE FORMALE

p_+ : probabilità di misurare $J_z = +\hbar/2$ su $|\psi\rangle$
p_- : probabilità di misurare $J_z = -\hbar/2$ su $|\psi\rangle$

Quindi $\langle\psi|J_z|\psi\rangle =$ (è un valor medio).-

$$= p_+ \frac{\hbar}{2} + p_-\left(-\frac{\hbar}{2}\right)$$

Quindi $\langle\psi|J_z|\psi\rangle = \frac{\hbar}{2} \Longrightarrow \quad p_+ - p_- = 1 \qquad p_+ = 1 + p_-$
Dato che $p_+ \leq 1$ e $p_- \geq 0$ (sono probabilità) deve essere $p_- = 0$ e $p_+ = 1 \Rightarrow$ una misura di J_z su $|\psi\rangle$ dà $\hbar/2$ con certezza

Riscriviamo lo spinore usando $|S_z\rangle$

$$|\psi\rangle = f(r)\sin\theta\, e^{-i\varphi}\left|\tfrac{3}{2}\right\rangle$$
$$+\left(-\frac{2}{\sqrt{3}}f\cos\theta + \frac{g}{\sqrt{3}}\sin\theta\, e^{-i\varphi}\right)\left|\tfrac{1}{2}\right\rangle$$
$$+\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}f\sin\theta\, e^{i\varphi} - \frac{2}{\sqrt{3}}g\cos\theta\right)\left|-\tfrac{1}{2}\right\rangle$$
$$- g\sin\theta\, e^{i\varphi}\left|-\tfrac{3}{2}\right\rangle$$

Ora $\cos\theta = \sqrt{\frac{4\pi}{3}}\, Y_1^0 \longrightarrow \sqrt{\frac{4\pi}{3}}\,|1\,0\rangle$

$\sin\theta\, e^{+i\varphi} = -\sqrt{\frac{8\pi}{3}}\, Y_1^1 \longrightarrow -\sqrt{\frac{8\pi}{3}}\,|1\;1\rangle$

$\sin\theta\, e^{-i\varphi} = +\sqrt{\frac{8\pi}{3}}\, Y_1^{-1} \longrightarrow \sqrt{\frac{8\pi}{3}}\,|1\,-1\rangle$

$$|\psi\rangle = f\sqrt{\frac{8\pi}{3}}\,|1\,-1\rangle\left|\frac{3}{2}\right\rangle$$

$$\left(-\frac{2}{\sqrt{3}}f\sqrt{\frac{4\pi}{3}}\,|1\,0\rangle + \frac{1}{\sqrt{3}}g\sqrt{\frac{8\pi}{3}}\,|1\,-1\rangle\right)\left|\frac{1}{2}\right\rangle$$

$$+\left(+\frac{1}{\sqrt{3}}f\sqrt{\frac{8\pi}{3}}\,|1\,1\rangle - \frac{2}{\sqrt{3}}g\sqrt{\frac{4\pi}{3}}\,|1\,0\rangle\right)\left|-\frac{1}{2}\right\rangle$$

$$+\,g\sqrt{\frac{8\pi}{3}}\,|1\,1\rangle\left|-\frac{3}{2}\right\rangle$$

Ricordando che $J_z = L_z + S_z$ vi sono 3 termini che sono autofunzioni di J_z con autovalore $-\hbar/2$:

$$\frac{1}{\sqrt{3}}g\sqrt{\frac{8\pi}{3}}\,|1\,-1\rangle\left|\frac{1}{2}\right\rangle - \frac{2}{\sqrt{3}}g\sqrt{\frac{4\pi}{3}}\,|1\,0\rangle\left|-\frac{1}{2}\right\rangle + g\sqrt{\frac{8\pi}{3}}\,|1\,1\rangle\left|-\frac{3}{2}\right\rangle$$

$$J_z = -1 + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2} \qquad J_z = 0 - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2} \qquad J_z = 1 - \frac{3}{2} = -\frac{1}{2}$$

Quindi la condizione ii) implica $g(r) = 0$.
Segue

$$|\psi\rangle = f\sqrt{\frac{8\pi}{3}}\,|1\,-1\rangle\left|\frac{3}{2}\right\rangle - \frac{2}{\sqrt{3}}f\sqrt{\frac{4\pi}{3}}\,|1\,0\rangle\left|\frac{1}{2}\right\rangle +$$

$$+\frac{1}{\sqrt{3}}f\sqrt{\frac{8\pi}{3}}\,|1\,1\rangle\left|-\frac{1}{2}\right\rangle$$

$$= f(r)\sqrt{\frac{8\pi}{3}}\left\{|1\,-1\rangle\left|\frac{3}{2}\right\rangle - \sqrt{\frac{2}{3}}\,|1\,0\rangle\left|\frac{1}{2}\right\rangle + \frac{1}{\sqrt{3}}\,|1\,1\rangle\left|-\frac{1}{2}\right\rangle\right\}$$

Notiamo che tutti gli stati in $|\psi\rangle$ hanno $L = 1$.
Quindi la condizione i) + ii) implica che $|\psi\rangle$ è combinazione lineare degli stati $n=2$, $n=3$ con $L = 1$, $J_z = \frac{1}{2}$.

$$|\psi\rangle = A R_{21}\,|\overset{L}{1}\,\overset{J}{\tfrac{1}{2}}\,\overset{J_z}{\tfrac{1}{2}}\rangle + B R_{31}\,|1\,\tfrac{1}{2}\,\tfrac{1}{2}\rangle$$

$$= \left(A R_{21}(r) + B R_{31}(r)\right)|\overset{L}{1}\,\overset{J}{\tfrac{1}{2}}\,\overset{J_z}{\tfrac{1}{2}}\rangle$$

Per confrontare con l'espressione trovata riscriviamo

$$|1\ \tfrac{1}{2}\ \tfrac{1}{2}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|1\,-1\rangle|\tfrac{3}{2}\rangle - \frac{1}{\sqrt{3}}|1\,0\rangle|\tfrac{1}{2}\rangle + \frac{1}{\sqrt{6}}|1\,1\rangle|-\tfrac{1}{2}\rangle$$

(tabella CG $\overset{S}{3/2}\times\overset{L}{1}$)(colonna $\frac{1}{2}\ +\frac{1}{2}$)

Quindi

$$|\psi\rangle = (A R_{21}(r) + B R_{31})\left(\frac{1}{\sqrt{2}}|1\,-1\rangle|\tfrac{3}{2}\rangle - \frac{1}{\sqrt{3}}|1\,0\rangle|\tfrac{1}{2}\rangle + \frac{1}{\sqrt{6}}|1\,1\rangle|-\tfrac{1}{2}\rangle\right)$$

Confrontando otteniamo

$$f(r)\sqrt{\frac{8\pi}{3}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(A R_{21} + B B_{31})$$

Rimangono da definire A e B. La normalizzazione dello stato impone

$$|A|^2 + |B|^2 = 1$$

La condizione iii) impone $|A|^2 = \frac{3}{4}$

Quindi

$$|A| = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad |B| = \frac{1}{2}$$

Scegliamo $A = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $B = \frac{1}{2}e^{i\alpha}$ con α arbitraria

Quindi

$$f(r) = \sqrt{\frac{3}{16\pi}}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}R_{21}(r) + \frac{1}{2}e^{i\alpha}R_{31}(r)\right)$$

$$|\psi\rangle = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}R_{21}(r) + \frac{1}{2}e^{i\alpha}R_{31}\right)|1\ \tfrac{1}{2}\ \tfrac{1}{2}\rangle$$

c)

Riscriviamo

$$|\psi\rangle = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{normalizzata} \\ \left[\int dr\, r^2|F|^2 = 1\right]}}{F(r)} \underbrace{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}|1\,-1\rangle|\tfrac{3}{2}\rangle - \frac{1}{\sqrt{3}}|1\,0\rangle|\tfrac{1}{2}\rangle + \frac{1}{\sqrt{6}}|1\,1\rangle|-\tfrac{1}{2}\rangle\right)}_{\substack{\text{normalizzato rispetto a } d\Omega \text{ e prodotto} \\ \text{Scalare spazio spin } (\text{è } |1\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\rangle)}}$$

Quindi

$$\text{Prob}\,(L_z = +\hbar) = \frac{1}{6}$$

$$\text{Prob}\,(L_z = 0) = \frac{1}{3}$$

$$\text{Prob}\,(L_z = -\hbar) = \frac{1}{2}$$

d) Se $|\psi\rangle = F(r)|1\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\rangle$

$$\langle\psi|r|\psi\rangle = \int dr\, r^2|F(r)|^2\, r\, \overbrace{\langle 1\,\tfrac{1}{2}\,\tfrac{1}{2}|1\,\tfrac{1}{2}\,\tfrac{1}{2}\rangle}^{=1}$$

$$= \int_0^\infty dr\, r^3\left(\frac{\sqrt{3}}{2}R_{21} + \frac{1}{2}e^{-i\alpha}R_{31}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}R_{21} + \frac{1}{2}e^{i\alpha}R_{31}\right)$$

$$= \int dr\, r^3\left(\underset{\substack{\uparrow \\ \text{Positivo}}}{\frac{3}{4}R_{21}^2} + \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Positivo}}}{\frac{1}{4}R_{31}^2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha\, R_{21}\, R_{31}\right)$$

Quindi, trovare il Max di $\langle\psi|r|\psi\rangle$ corrisponde a trovare il max di

$$\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha \int dr\, r^3 R_{21} R_{31}$$

Se l'integrale è positivo $\alpha = 0$

è negativo $\alpha = \pi$

Calcoliamo l' integrale

$$\int_0^\infty dr\, r^3\, R_{21}(r) R_{31}(r)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{1}{(2a_0)^{3/2}} \frac{4\sqrt{2}}{9} \frac{1}{(3a_0)^{3/2}} \int_0^\infty dr\, r^3 \frac{r^2}{a_0}\left(1 - \frac{r}{6a_0}\right) e^{-\frac{5r}{6a_0}}$$

Poniamo $x = \frac{5r}{6a_0}$. A parte una costante moltiplicativa (POSITIVA) abbiamo

$$= (\text{costante} > 0) \cdot \int_0^\infty dx\, x^5 \left(1 - \frac{x}{5}\right) e^{-x}$$

$$= (\text{costate} > 0) \left(5! - \frac{6!}{5}\right) =$$

$$= (\text{costante} > 0)\; 5! \left(1 - \frac{6}{5}\right)$$

$$= (\text{costante} > 0)\; 5! \left(-\frac{1}{5}\right)$$

Quindi l'integrale è negativo e $\alpha = \pi$.

Calcolo esatto dell'integrale

$$\int_0^\infty dr\, r^3 R_{21} R_{31} = -\frac{16}{27}\left(\frac{6}{5}\right)^6 a_0$$

Sebbene non utili per la soluzione del problema

$$\int dr\, r^3 R_{21}^2 = 5a_0$$

$$\int dr\, r^3 R_{31}^2 = \frac{25}{2} a_0$$

Esiste una formula generale:

$$\langle n\, \ell\, m | r | n\, \ell\, m \rangle = \frac{1}{2}\left(3n^2 - \ell(\ell+1)\right) a_0$$

Esame di Meccanica Quantistica, 09/05/2024

Esercizio 1. Due particelle indistiguibili di massa m e spin 1 sono vincolate a muoversi in una dimensione. La Hamiltoniana è data da

$$H = \frac{1}{2m}(p_1^2 + p_2^2) + \frac{1}{4}m\omega^2(x_1 - x_2)^2 + \frac{\omega}{2\hbar}\boldsymbol{S}_1 \cdot \boldsymbol{S}_2,$$

dove $\boldsymbol{S}_1$ ed $\boldsymbol{S}_2$ sono gli operatori di spin delle due particelle. Si risolva il problema nel sistema del centro di massa.

a) Si determinino le energie e le degenerazioni dei primi tre livelli del sistema.

b) Le particelle si trovano nello stato ($x = x_2 - x_1$)

$$\Psi = \psi_1(x)(A|1, -1\rangle + B| - 1, 1\rangle) + C\psi_2(x)|0, 0\rangle,$$

dove A, B, C sono costanti complesse. Abbiamo indicato con $\psi_n(x)$ le autofunzioni dell'oscillatore armonico di pulsazione ω e massa $\mu = m/2$ e con $|s_1, s_2\rangle$ gli autovettori di S_{1z} ed S_{2z} con autovalori $\hbar s_1$ ed $\hbar s_2$.
Si determinino tutti gli stati tali che la probabilità di misurare $S^2 = 0$ sia 1/6, dove $\boldsymbol{S} = \boldsymbol{S}_1 + \boldsymbol{S}_2$ è lo spin totale. Per tali stati quali sono i valori misurabili di S^2 e quali sono le corrispondenti probabilità? Si risponda alla stessa domanda per S_z e per l'energia.

c) Sia $\Psi(t)$ l'evoluto temporale di Ψ, $\Psi(0) = \Psi$. Si calcoli $\langle\Psi(t)|S^2|\Psi(t)\rangle$.

d) Si calcoli $\langle\Psi|(x_2 - x_1)^2|\Psi\rangle$.

Esercizio 2. Una particella possiede la stessa massa e carica elettrica dell'elettrone ma ha spin pari a 3/2 invece che 1/2. La Hamiltoniana che descrive la sua dinamica è la seguente:

$$H_0 = \frac{p^2}{2m} - \frac{e^2}{r} + A\,\mathbf{L}\cdot\mathbf{S} \tag{1}$$

con $0 < A\hbar^2 \ll 1$ eV. Nota: l'interazione Coulombiana è scritta nel sistema di Gauss; nel SI si usi $-e^2/(4\pi\epsilon_0 r)$.

a) Si determinino i commutatori $[H_0, \mathbf{J}], [H_0, \mathbf{L}]$ e $[H_0, \mathbf{S}]$ ($\boldsymbol{J}$ è il momento angolare totale, $\boldsymbol{J} = \boldsymbol{L} + \boldsymbol{S}$).

b) Si determini lo spettro di H_0. In particolare si indichi la degenerazione e una base di autoket per ogni livello energetico con energia $E < -2$ eV.

c) Il sistema viene ora perturbato in maniera armonica, $H = H_0 + V_z$, con

$$V_z = \frac{1}{2}m\omega^2 z^2 \tag{2}$$

e $\omega \ll A\hbar$. Al primo ordine perturbativo nel parametro ω^2, si determini la correzione al primo livello energetico (quello di energia minore) trovato al punto b). Si discuta l'eventuale rimozione della degenerazione. [**Il testo continua nella pagina successiva**]

d) Si risponda di nuovo alla domanda c), considerando ora come perturbazione l'operatore $V_r = \frac{1}{2}m\omega^2 r^2$ e come livello imperturbato di H_0 quello con momento angolare totale $J = \hbar/2$ e con energia $E < -2$ eV.

e) Si indichi, motivando la risposta, se esistono o meno autofunzioni limitate non-normalizzabili dei seguenti operatori: H_0, $H_0 + V_r$ e $H_0 + V_z$.

Formule utili (a_0 è il raggio di Bohr e $R_{ij}(r)$ sono le autofunzioni radiali normalizzate per il problema Coulombiano):

$$\begin{aligned} E_I &= \left.\frac{me^4}{2\hbar^2}\right|_{\text{Gauss}} = \left.\frac{me^4}{8\epsilon_0^2 h^2}\right|_{\text{SI}} = 13.6 \text{ eV} \\ R_{10}(r) &= a_0^{-3/2}\, 2e^{-r/a_0} \\ R_{20}(r) &= (2a_0)^{-3/2}\,(2 - r/a_0)e^{-r/(2a_0)} \\ R_{21}(r) &= (2a_0)^{-3/2}\,\frac{r}{\sqrt{3}a_0}e^{-r/(2a_0)} \\ n! &= \int_0^{+\infty} x^n e^{-x} dx \end{aligned}$$

① Nel CM la Hamiltoniana diventa

$$H = \frac{p^2}{2\mu} + \frac{1}{4} m\omega^2 x^2 + \frac{\omega}{2\hbar} \bar{S}_1 \cdot \bar{S}_2 \qquad \mu = \frac{m}{2}$$

$$= \frac{p^2}{2\mu} + \frac{\mu}{2}\omega^2 x^2 + \frac{\omega}{2\hbar} \bar{S}_1 \cdot \bar{S}_2$$

dove p è l'impulso coniugato con $x = x_2 - x_1$

(a) Per calcolare lo spettro notiam che

$$\frac{\omega}{2\hbar} \bar{S}_1 \cdot \bar{S}_2 = \frac{\omega}{4\hbar} (2 \bar{S}_1 \cdot \bar{S}_2)$$

$$= \frac{\omega}{4\hbar} \left(S^2 - S_1^2 - S_2^2 \right)$$

$$= \frac{\hbar\omega}{4} \left(\frac{S^2}{\hbar^2} - 4 \right) \qquad \bar{S} = \bar{S}_1 + \bar{S}_2$$

Per due particelle di spin 1, S può essere 0,1,2

$S=0 \qquad S^2=0$

$S=1 \qquad S^2=2\hbar^2$

$S=2 \qquad S^2=6\hbar^2$

Quindi

$$\frac{\omega}{2\hbar} \bar{S}_1 \cdot \bar{S}_2 = \begin{cases} -\hbar\omega & S=0 \\ -\frac{\hbar\omega}{2} & S=1 \\ +\frac{\hbar\omega}{2} & S=2 \end{cases}$$

Se non consideriamo l'indistinguibilità, lo spettro è dato da

$$E = \hbar\omega\left(n+\frac{1}{2}\right) - \hbar\omega \qquad S=0$$

$$E = \hbar\omega\left(n+\frac{1}{2}\right) - \frac{\hbar\omega}{2} \qquad S=1 \qquad n=0,1,2\ldots$$

$$E = \hbar\omega\left(n+\frac{1}{2}\right) + \frac{\hbar\omega}{2} \qquad S=2$$

Ordinando gli stati

stati $S=0$: $E=-\frac{\hbar\omega}{2}$ $n=0$

$E=\frac{\hbar\omega}{2}$ $n=1$

$E=\frac{3\hbar\omega}{2}$ $n=2$

$\vdots$

stati $S=1$ $E=0$ $n=0$

$E=\hbar\omega$ $n=1$

$E=2\hbar\omega$ $n=2$

$\vdots$

stati $S=2$ $E=\hbar\omega$ $n=0$

$E=2\hbar\omega$ $n=1$

$\vdots$

Quindi

$E=-\frac{\hbar\omega}{2}$ $\psi_0(x)\,|\overset{S}{0}\ \overset{S_z}{0}\rangle$ $n=0$ $S=0$

$E=0$ $\psi_0(x)\,|1\ m\rangle$ $n=0$ $S=1$

$E=\frac{\hbar\omega}{2}$ $\psi_1(x)\,|0\ 0\rangle$ $n=1$ $S=0$

$E=\hbar\omega$ $\left\{\begin{array}{ll}\psi_1(x)\,|1\ m\rangle & n=1\quad S=1\\ \psi_0(x)\,|2\ m\rangle & n=0\quad S=2\end{array}\right.$

$E=\frac{3\hbar\omega}{2}$ $\psi_2(x)\,|0\ 0\rangle$ $n=2$ $S=0$

ecc :

PRINCIPIO DI PAULI: l'autofunzione deve essere pari sotto scambio $(x\to -x,\ S_1\Leftrightarrow S_2)$

Dato che $\psi_n(x)=\left\{\begin{array}{l}\text{pari sotto scambio per } n \text{ PARI}\\ \text{dispari sotto scambio per } n \text{ dispari}\end{array}\right.$

$$|S\ m\rangle=\left\{\begin{array}{ll}\text{pari} & \text{per } S=0,2\\ \text{disp.} & \text{per } S=1\end{array}\right.$$

Sono accettabili

$\psi_n(x)|0\,0\rangle$, $\psi_n(x)|2\ m\rangle$ n pari

$\psi_n(x)|1\,m\rangle$ n dispari

Stati $\psi_0|1\ m\rangle$, $\psi_1|0\,0\rangle$ <u>NON</u> sono accettabili

Spettro:

$E = -\frac{\hbar\omega}{2}$ $\psi_0(x)|0\ 0\rangle$ non deg.

$E = \hbar\omega$ $\begin{cases}\psi_1(x)|1\ m\rangle \\ \psi_0(x)|2\,m\rangle\end{cases}$ deg: $3+5=8$

$E = \frac{3}{2}\hbar\omega$ $\psi_2(x)|0\ 0\rangle$ non deg.

b) $\Psi = \psi_1(x)\left(A|1\,-1\rangle + B|-1\ 1\rangle\right) + C\,\psi_2(x)\,|0\ 0\rangle$

$\uparrow$ disp. sotto scambio

Deve essere dispari sotto scambio

$\uparrow$ pari $\uparrow$ pari (sotto scambio)

OK per Pauli

$\downarrow$

$\boxed{A = -B}$ Conseguenza principio Pauli

Quindi

$\Psi = \psi_1(x)\,A\left(|1\,-1\rangle - |-1\ 1\rangle\right) + C\psi_2(x)|0\ 0\rangle$

Passiamo alla base $|S\ S_z\rangle_S$ dello spin totale (tavole CG 1×1)

$|1\,-1\rangle - |-1\ 1\rangle = \sqrt{2}\,|1\,0\rangle_S$

$|0\ 0\rangle = \sqrt{\frac{2}{3}}\,|2\ 0\rangle_S - \sqrt{\frac{1}{3}}\,|0\,0\rangle_S$

Quindi

$$\Psi = \psi_1(x)\, A \sqrt{2}\, |1,0\rangle_s + C \psi_2(x) \left(\sqrt{\frac{2}{3}}\, |2,0\rangle_s - \sqrt{\frac{1}{3}}\, |0,0\rangle_s \right)$$

Condizioni su A, C

$$\langle \Psi | \Psi \rangle = 1 \Longrightarrow \quad 2|A|^2 + \frac{2}{3}|C|^2 + \frac{1}{3}|C|^2 = 1$$

$$2|A|^2 + |C|^2 = 1$$

$$\text{prob}\,(S^2 = 0) = \frac{|C|^2}{3} = \frac{1}{6}$$

Quindi $\quad |C|^2 = \frac{1}{2} \qquad |C| = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\quad |A|^2 = \frac{1}{4} \qquad |A| = \frac{1}{2}$

Poniamo qui $A = \frac{1}{2}$ con opportuna scelta di fase

$C = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\alpha}$ $\quad \alpha$ fase arbitraria

$$\Psi = \psi_1(x)\, \frac{1}{\sqrt{2}}\, |1,0\rangle_s + e^{i\alpha} \psi_2(x) \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\, |2,0\rangle_s - \frac{1}{\sqrt{6}}\, |00\rangle_s \right)$$

probabilità S^2:

$\text{prob}\,(S^2 = 6\hbar^2) = \frac{1}{3} \qquad [S = 2]$

$\text{prob}\,(S^2 = 2\hbar^2) = \frac{1}{2} \qquad [S = 1]$

$\text{prob}\,(S^2 = 0) = \frac{1}{6} \qquad [S = 0]$

Tutti gli stati hanno $S_z = 0$. Quindi

$$\text{prob}\,(S_z = 0) = 1$$

Calcoliamo l'energia degli stati

$$\psi_1(x)\,|1\ 0\rangle_s \longrightarrow E = \hbar\omega\left(1+\frac{1}{2}\right) - \frac{\hbar\omega}{2} = \hbar\omega$$

$$\psi_2(x)\,|2\ 0\rangle_s \longrightarrow E = \hbar\omega\left(2+\frac{1}{2}\right) + \frac{\hbar\omega}{2} = 3\hbar\omega$$

$$\psi_2(x)\,|0\ 0\rangle_s \longrightarrow E = \hbar\omega\left(2+\frac{1}{2}\right) - \hbar\omega = \frac{3}{2}\hbar\omega$$

Quindi

$$\text{prob}(E=\hbar\omega) = \frac{1}{2}$$
$$\text{prob}(E=3\hbar\omega) = \frac{1}{3}$$
$$\text{prob}\left(E=\frac{3}{2}\hbar\omega\right) = \frac{1}{6}$$

c) S^2 commuta con H: $[H,S^2]=0$. Quindi il valor medio non dipende da t.

$$\langle\psi(t)|S^2|\psi(t)\rangle = \langle\psi(t=0)|S^2|\psi(t=0)\rangle$$
$$= 6\hbar^2\,\text{prob}(S^2=6\hbar^2) + 2\hbar^2\,\text{prob}(S^2=2\hbar^2)$$
$$= 6\hbar^2\,\frac{1}{3} + 2\hbar^2\,\frac{1}{2} = 3\hbar^2$$

d)

Abbiamo $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\langle 2\,0| - \frac{1}{\sqrt{6}}\langle 0\,0|\right)\left(\frac{1}{\sqrt{3}}|2\,0\rangle - \frac{1}{\sqrt{6}}|0\,0\rangle\right) = \frac{1}{3}+\frac{1}{6} = \frac{1}{2}$

Quindi

$$\langle\Psi|x^2|\Psi\rangle = \frac{1}{2}\langle\psi_1\underbrace{|x^2|\psi_1\rangle + \frac{1}{2}}_{\text{Valori medi solo spaziali (oscillatore armonico)}}\langle\psi_2|x^2|\psi_2\rangle$$

Dato che $x = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{\hbar}{\mu\omega}}\,(a+a^+)$ $\left[\begin{array}{l}\text{NOTA: oscillatore} \\ \text{di massa } \mu = \frac{m}{2}\end{array}\right]$

$$\langle\psi_1|x^2|\psi_1\rangle = |\,x|1\rangle|^2$$

$$= \frac{\hbar}{2\mu\omega}\,|\,(a+a^+)|1\rangle|^2$$

$$(a+a^+)|1\rangle = |0\rangle + \sqrt{2}\,|2\rangle$$

$$\langle\psi_1|x^2|\psi_1\rangle = \frac{\hbar}{2\mu\omega}\,(1+2) = \frac{3}{2}\,\frac{\hbar}{\mu\omega}$$

$$\langle\psi_2|x^2|\psi_2\rangle = |\,x|2\rangle|^2 = \frac{\hbar}{2\mu\omega}\,|\,(a+a^+)|2\rangle|^2$$

$$(a+a^+)|2\rangle = \sqrt{2}\,|1\rangle + \sqrt{3}\,|3\rangle$$

$$\langle\psi_2|x^2|\psi_2\rangle = \frac{\hbar}{2\mu\omega}\,(2+3) = \frac{5}{2}\,\frac{\hbar}{\mu\omega}$$

Quindi

$$\langle\Psi|x^2|\Psi\rangle = \frac{3}{4}\,\frac{\hbar}{\mu\omega} + \frac{5}{4}\,\frac{\hbar}{\mu\omega} = \frac{2\hbar}{\mu\omega}$$

Esercizio 2

$$H_0 = H_1 + H_2 \quad , \quad H_1 = \frac{p^2}{2m} - \frac{e^2}{r} \quad , \quad H_2 = A\bar{L}\cdot\bar{S}$$

La Hamiltoniana H_1 è invariante per rotazioni e non dipende dallo spin. Quindi $[H_1, \vec{L}] = [H_1, \bar{S}] = [H_1, \bar{J}] = 0$

Quindi dobbiamo solo considerare H_2.

H_2 è uno scalare e quindi commuta con $\bar{J}$: $[H_2, \bar{J}]$

Non commuta invece con $\vec{L}$ o $\bar{S}$.

$$[H_2, L_i] = A[\bar{L}\cdot\bar{S}, L_i] = A\sum_j [L_j S_j, L_i] =$$
$$= A\sum_j [L_j, L_i] S_j = i A\hbar \sum_{jk} \epsilon_{jik} L_k S_j$$
$$= i A\hbar \sum_{jk} \epsilon_{ikj} L_k S_j = i A\hbar (\bar{L}\times\bar{S})_i$$

$$[H_2, S_i) = A[L\cdot S, S_i] = A\sum_j [L_j S_j, S_i]$$
$$= A\sum_j L_j [S_j, S_i] = i A\hbar \sum_{jk} \epsilon_{jik} L_j S_k$$
$$= -i A\hbar \sum_{jk} \epsilon_{ijk} L_j S_k = -i A\hbar (\bar{L}\times\bar{S})_i$$

$$[(A\times B)_i = \sum_{jk} \epsilon_{ijk} A_j B_k]$$

Concludiamo:

$$\left.\begin{aligned} &[H_0, \bar{J}] = 0 \\ &[H_0, \vec{L}] = i A\hbar\, \bar{L}\times\bar{S} \\ &[H_0, \bar{S}] = -i A\hbar\, \bar{L}\times\bar{S} \end{aligned}\right\}$$

CHECK: se facciamo la somma viene zero.

ⓑ Per $A=0$ riotteniamo lo spettro dell'idrogeno

$E_n = -\frac{E_I}{n^2}$ dove E_I è la quantità data nel testo, $n \geq 1$ intero

Per calcolare il contributo di $A\bar{L}\cdot\bar{S}$ lo riscriviamo come

$$A\bar{L}\cdot\bar{S} = \frac{A}{2}(J^2 - L^2 - S^2)$$

Quindi per uno stato con dato j, ℓ abbiamo un contributo

$$A/_2 \hbar^2 \left(j(j+1) - \ell(\ell+1) - \frac{15}{4} \right)$$

Effettuiamo il calcolo esplicito per stati con $E < -2eV$
Dato che $A\hbar^2 \ll 1 eV$, ci basta considerare il termine coulombiano

$$n = 1 \qquad E = -E_I = -13.6 \ eV$$
$$n = 2 \qquad E = -\frac{E_I}{4} = -\frac{13.6}{4} eV \approx -3.4 \ eV$$
$$n = 3 \qquad E = -\frac{E_I}{9} = -\frac{13.6}{9} eV > -2eV$$

Quindi dobbiamo considerare solo $n = 1$, $n = 2$.

<u>n=1</u> : Abbiamo $l = 0$, quindi, $j = S = \frac{3}{2}$. H_2 non dà contributi

$E = -E_I$ autofunzioni $\underset{(n\ell m)}{\psi_{100}}(\vec{r})|S_z\rangle$

Degenerazione : 4 (S_z assume i val $-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}$)

<u>n=2</u> Abbiamo $l = 0$. Come prima H_2 non dà contributi e

$E = -E_I/4$ autofunzioni $\psi_{200}(\vec{r})|S_z\rangle$

Degenerazione 4

Abbiamo anche $l = 1$. Dobbiamo fare la somma $(\ell = 1) \oplus (S = 3/2) \longrightarrow \begin{cases} j = 5/2, \\ j = 3/2 \\ j = 1/2 \end{cases}$

$j = 5/2$

$$E = -E_I/4 + \frac{A}{2}\hbar^2\left(\frac{35}{4} - 2 - \frac{15}{4}\right) = -\frac{E_I}{4} + \frac{3}{2}A\hbar^2$$

base $|\underset{\substack{\uparrow \\ n}}{2}\ \underset{\substack{\uparrow \\ \ell}}{1}\ \underset{\substack{\uparrow \\ S}}{\tfrac{3}{2}}\ \underset{\substack{\uparrow \\ J}}{\tfrac{5}{2}}\ J_z\rangle$ deg. : 6

$j = 3/2$

$$E = -\frac{E_I}{4} + \frac{A}{2}\hbar^2\left(\frac{15}{4} - 2 - \frac{15}{4}\right) = -\frac{E_I}{4} - A\hbar^2$$

base $|\underset{n}{2}\ \underset{l}{1}\ \underset{s}{\tfrac{3}{2}}\ \underset{j}{\tfrac{3}{2}}\ j_z\rangle$ deg: 4

$j = 1/2$

$$E = -\frac{E_I}{4} + \frac{A\hbar^2}{2}\left(\frac{3}{4} - 2 - \frac{15}{4}\right) = -\frac{E_I}{4} - \frac{5}{2}A\hbar^2$$

base $|2\ 1\ \tfrac{3}{2}\ \tfrac{1}{2}\ j_z\rangle$ deg: 2

ⓒ

Lo stato di energia più bassa ha degenerazione 4. Una base è $\underbrace{|\underset{n}{1}\ \underset{l}{0}\ \underset{m}{0}\rangle}_{\uparrow \text{ funzione spaziale}}|s_z\rangle$

Dato che V_z non dipende dallo spin la matrice della perturbazione ha la forma

$$\begin{pmatrix} \bar{V}_z & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \bar{V}_z & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{V}_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \bar{V}_z \end{pmatrix} \quad \text{con } \bar{V}_z = \underbrace{\langle 100|V_z|100\rangle}_{\text{media spaziale}}$$

Quindi abbiamo $\Delta E = \bar{V}_z$ per tutti gli stati. La degenerazione non viene rimossa. Rimane da calcolare $\bar{V}_z$.

$$\bar{V}_z = \int r^2 dr\, d\Omega\, (R_{00} Y_0^0)^* V_z (R_{00} Y_0^0) \qquad \left[Y_0^0 = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}\right]$$

$$= \frac{1}{4\pi}\int dr\, r^2 d\Omega\, a_0^{-3}\, 4\, e^{-2r/a_0}\, \frac{1}{2} m\omega^2 r^2 \cos^2\theta$$

$$= \frac{1}{2\pi a_0^3} m\omega^2 \int_0^\infty dr\, r^4 e^{-2r/a_0} \int_{-1}^{1} d\cos\theta \cos^2\theta \int_0^{2\pi} d\varphi$$

$$= \frac{1}{2\pi a_0^3} m\omega^2 \left[\left(\frac{a_0}{2}\right)^5 4!\right]\left(2\cdot\frac{1}{3}\right)\cdot 2\pi = \frac{1}{2} m\omega^2 a_0^2$$

d) Si tratta del livello con stati $|2\ 1\ \frac{3}{2}\ \frac{1}{2}\ J_z\rangle$
E' importante capire quale sia l'espressione esplicita di questo livello
Si parte dal livello $n=2$ $l=1$ che ha autofunzioni

$$R_{21}(r)\, Y_1^m(\theta,\varphi)\,|S_z\rangle$$

Quindi si ~~mem~~ cambia base: al posto di $Y_1^m(\theta,\varphi)|S_z\rangle$ [autostati di $L_z, S_z\rangle$ si usano delle combinazioni lineari che sono autofunzioni di J^2, J_z. Quindi esplicitando la dipendenza da r i due stati della base sono

$$R_{21}(r)\,\underbrace{|\overset{l}{1}\ \overset{s}{\tfrac{3}{2}}\ \overset{J}{\tfrac{1}{2}}\ J_z\rangle}_{\text{è una combinazione di armoniche sferiche} \times |S_z\rangle}$$

Quindi

$$\langle 2\ 1\ \tfrac{3}{2}\ \tfrac{1}{2}\ J_z | V_r | 2\ 1\ \tfrac{3}{2}\ \tfrac{1}{2}\ J_z'\rangle$$

$$= \int dr\, r^2 R_{21}(r)^2 V_r \cdot \underbrace{\langle 1\ \tfrac{3}{2}\ \tfrac{1}{2}\ J_z | 1\ \tfrac{3}{2}\ \tfrac{1}{2}\ J_z'\rangle}_{\substack{=1 \text{ se } J_z = J_z' \\ =0 \text{ se } J_z \neq J_z'}}$$

Quindi la matrice della perturbazione è

$$\begin{pmatrix} \bar{V}_r & 0 \\ 0 & \bar{V}_r \end{pmatrix} \qquad \bar{V}_r = \int d^3 r r^2 R_{21}(r)^2 V_r$$

Quindi $\Delta E = \bar{V}_r$ per tutti gli stati

La degenerazione non viene rimossa

$$\Delta E = \int_0^\infty dr\, r^2\, R_{21}(r)\, V_r$$

$$= \int dr\, r^2 \frac{1}{(2a_0)^3} \frac{r^2}{3a_0^2} e^{-r/a_0} \frac{1}{2} m\omega^2 r^2$$

$$= \frac{1}{48 a_0^5} m\omega^2 \int_0^\infty dr\, r^6 e^{-r/a_0}$$

$$= m\omega^2 a_0^2 \frac{6!}{48} = 15 m\omega^2 a_0^2$$

e)

Vi sono orbite non limitate solo per H_0 ed H_2.

In questi due casi vi sono autofunzioni non normalizzabili.

Per $H = H_0 + V_r$ tutte le orbite sono limitate: tutte le autofunzioni sono $L^2(\mathbb{R}^3)$. Quindi tutte le autofunzioni non normalizzabili

NON esistono autofunzioni

Esame di Meccanica Quantistica, 25/06/2024

Esercizio 1.
Si consideri l'atomo di idrogeno nell'approssimazione di potenziale coulombiano in cui l'elettrone viene sostituto da una particella di spin 1 avente stessa massa e stessa carica dell'elettrone. All'istante iniziale lo stato è descritto dalla seguente funzione d'onda spinoriale:

$$\psi = \mathcal{N} \begin{pmatrix} -(x+iy) \\ \sqrt{2}z \\ (x-iy) \end{pmatrix} e^{-\frac{r}{2a_0}} , \tag{1}$$

dove $\mathcal{N}$ è una opportuna costante di normalizzazione, a_0 è il raggio di Bohr e $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

1. Se si effettuano misure di J^2 e J_z quali valori si possono ottenere e con quali probabilità?
2. Se si effettua una misura di energia che valori si possono ottenere e con quali probabilità?
3. Calcolare il valore medio dell'operatore $\vec{L} \cdot \vec{S}$ al variare del tempo.
4. Si consideri ora il seguente stato

$$\psi = \mathcal{N} \begin{pmatrix} -(x+iy) \\ \sqrt{2}z \\ (x-iy) \end{pmatrix} f(r) , \tag{2}$$

dove $f(r)$ è una funzione ignota dipendente solo dal modulo r. Quali valori energetici **non** possono sicuramente essere ottenuti da una misura dell'Hamiltoniana? Motivare la risposta.

Esercizio 2.
Una particella di massa m è soggetta al seguente potenziale unidimensionale,

$$V(x) = \begin{cases} 0 & \text{per } x < -L \\ V_{buca}(x) & \text{per } -L < x < 0 \\ +\infty & \text{per } x > 0 \, , \end{cases}$$

con $V_{buca}(x) < 0$.

Inizialmente, si assuma $V_{buca}(x) = -V_0$, con $V_0 > 0$.

1. Determinare il numero di stati legati come funzione di V_0, L e m.
2. Determinare il valore di V_0 in modo che esista un solo stato legato, ψ_0, e che questo abbia energia $E_0 = -V_0/2$.

[Il testo continua nella pagina successiva]

3. Scrivere la funzione d'onda normalizzata dello stato legato ψ_0 e calcolare la corrispondente probabilità di trovare la particella nella regione $x < -L$.

Si consideri ora $V_{buca}(x) = -V_0 + vx$.

4. Utilizzando la teoria delle perturbazioni, calcolare la variazione dell'energia dello stato legato rispetto al caso precedente nel limite $vL/V_0 \ll 1$.

ESERCIZIO 1

1. Riscriviamo lo spinore in coordinate sferiche

$$\psi = N \begin{pmatrix} -re^{i\varphi}\sin\theta \\ \sqrt{2}\, r\cos\theta \\ re^{i\varphi}\sin\theta \end{pmatrix} e^{-r/2a_0}$$

Dato che $re^{-r/2a_0} = C R_{21}(r)$ $\qquad C = (2a_0)^{3/2}\sqrt{3}\, a_0$

otteniamo

$$\psi = \underbrace{NC\sqrt{\frac{8\pi}{3}}}_{A} \begin{pmatrix} Y_1^1 \\ Y_1^0 \\ Y_1^{-1} \end{pmatrix} R_{21}(r)$$

che possiamo riscrivere come

$$|\psi\rangle = A\left[\,|2\,1\,1\rangle|1\,1\rangle_s + |2\,1\,0\rangle|1\,0\rangle_s + |2\,1\,-1\rangle|1\,-1\rangle_s\right.$$

dove $|1\,S_z\rangle_s$ sono i ket dello spin e

$\langle \vec{r}\,|\,n\,l\,m\rangle = R_{nl}(r)\,Y_l^m(\theta,\varphi)$ è la parte spaziale

Imponendo

$\langle\psi|\psi\rangle = 1 \Longrightarrow \quad 3|A|^2 = 1 \qquad |A| = \frac{1}{\sqrt{3}} \Longrightarrow A = \frac{1}{\sqrt{3}}$ (scelta di fase)

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}\left[\,|2\,1\,1\rangle|1\,1\rangle_s + |2\,1\,0\rangle|1\,0\rangle_s + |2\,1\,-1\rangle|1\,-1\rangle_s\right]$$

Per rispondere alla domanda è necessario passare alla base in cui ~~J_1~~ $J^2 J_z$ sono diagonali.

Notazione: dato che $\langle \vec{r}\,|\,n\,l\,m\rangle = R_{nl}(r)\,Y_l^m(\theta,\varphi)$

riscriviamo $\quad |n\,l\,m\rangle = |n\,l\rangle_r\,|l\,m\rangle$

$$\underset{\text{parte radiale}}{\uparrow} \qquad \underset{\text{parte angolare}}{\uparrow}$$

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}|21\rangle_r \Big[|11\rangle|11\rangle_S + |1\,0\rangle|1\,0\rangle_S + |1-1\rangle|1-1\rangle_S \Big]$$

= (tabelle CG 1×1) =

$$= \frac{1}{\sqrt{3}}|21\rangle_r \Big[|1\overset{l}{1}\,\overset{s}{1}\,\overset{J}{2}\,\overset{J_z}{2}\rangle_J + \sqrt{\frac{2}{3}}|1\,1\,1\,2\,0\rangle_J$$

$$- \sqrt{\frac{1}{3}}|1\,1\,1\,0\,0\rangle_J + |1\,1\,1\,2\,-2\rangle_J \Big]$$

Quindi

$$\text{prob}(J^2 = 6\hbar^2) = \frac{1}{3}\left(1 + \frac{2}{3} + 1\right) = \frac{8}{9}$$

$$\text{prob}(J^2 = 0) = \frac{1}{9}$$

$$\text{prob}(J_z = 2\hbar) = \frac{1}{3}$$

$$\text{prob}(J_z = 0) = \frac{2}{9} + \frac{1}{9} = \frac{1}{3}$$

$$\text{prob}(J_z = -\hbar) = \frac{1}{3}$$

2. Si tratta di una combinazione di stati con $n=2$.
Quindi $\text{prob}\left(E = -\frac{E_0}{4}\right) = 1$ [E_0 = energia stato fond.]

3. $\bar{L}\cdot S = \frac{1}{2}(J^2 - L^2 - S^2)$ commuta con H.
Quindi il valor medio non dipende da t.

$$\langle\psi|\bar{L}\cdot\bar{S}|\psi\rangle = \frac{1}{2}\langle\psi|J^2|\psi\rangle - \frac{1}{2}(2\hbar^2 + 2\hbar^2)$$

$$= \frac{1}{2}\langle\psi|J^2|\psi\rangle - 2\hbar^2$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{8}{9}\cdot 6\hbar^2 + \frac{1}{9}\cdot 0\right] - 2\hbar^2$$

$$= \frac{8}{3}\hbar^2 - 2\hbar^2 = \frac{2}{3}\hbar^2$$

4. Si tratta di un autostato di L^2 con autovalore $2\hbar^2$ (stato con $L=1$). Non si ottiene mai lo stato fondamentale

Potenziale

Per $-L \le x \le 0$ abbiamo

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\psi'' - V_0\psi = -|E|\psi$$

($E<0$ per stati legati)

$$\psi'' + \frac{2m}{\hbar^2}(V_0-|E|)\psi = 0$$

Se $\lambda = \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}(V_0-|E|)}$ la soluzione che soddisfa $\psi(0)=0$ è $A\sin\lambda x$

Per $x \le -L$ abbiamo $-\frac{\hbar^2}{2m}\psi'' = -|E|\psi$ se $k = \sqrt{\frac{2m|E|}{\hbar^2}}$

la soluzione è

$$\psi = Be^{kx} + \underset{\uparrow}{C}e^{-kx}$$

diverge per $x \to -\infty$

Quindi

$$\psi = \begin{cases} B\sin\lambda x & -L \le x \le 0 \\ Ae^{kx} & x \le -L \\ 0 & x > 0 \end{cases}$$

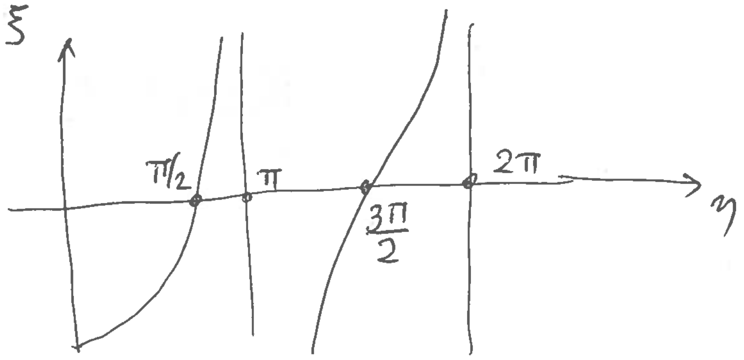
Raccordo in $x=-L$

$$\begin{cases} -B\sin\lambda L = Ae^{-kL} \\ B\lambda\cos\lambda L = kAe^{-kL} \end{cases} \Rightarrow -\frac{1}{\lambda}\tan\lambda L = \frac{1}{k}$$

$$\boxed{k = -\lambda\cot\lambda L}$$

Per trovare le soluzioni definiamo $\xi = kL$, $\eta = \lambda L$

$$\begin{cases} \xi^2 + \eta^2 = L^2(k^2+\lambda^2) = \frac{2mV_0}{\hbar^2}L^2 = R^2 \\ \xi = -\eta\cot\eta \end{cases} \qquad \xi, \eta > 0$$



Non ci sono stati legati per $R<\frac{\pi}{2}$

1 stato legato per $\frac{\pi}{2}\le R<\frac{3\pi}{2}=\frac{\pi}{2}+\pi$

⋮

n stati legati per $(n-1)\pi+\frac{\pi}{2}\le R<n\pi+\frac{\pi}{2}$

2. Se vi è un solo stato legato

$$\frac{\pi}{2}\le R<\frac{3\pi}{2} \qquad \left(\frac{\pi}{2}\right)^2\le \frac{2mV_0}{\hbar^2}L^2<\left(\frac{3\pi}{2}\right)^2$$

$$\frac{\hbar^2}{2mL^2}\left(\frac{\pi}{2}\right)^2\le V_0<\frac{\hbar^2}{2mL^2}\left(\frac{3\pi}{2}\right)^2 \qquad (*)$$

Se $|E|=\frac{V_0}{2}$ $\quad k=\lambda=\sqrt{\frac{mV_0}{\hbar^2}}$

Quindi $k=-\lambda\cot\lambda L \Rightarrow \cot\lambda L=-1$

$$\lambda L=\left(\frac{3\pi}{4}+k\pi\right) \qquad k\ge 0$$

$$V_0=\frac{\hbar^2}{mL^2}\left(\frac{3\pi}{4}+k\pi\right)^2$$

Solo la soluzione con $k=0$ soddisfa (*).

Quindi

$$V_0=\frac{9\pi^2}{16}\frac{\hbar^2}{mL^2}$$

3. Per $k=\lambda=\frac{3\pi}{4}\frac{1}{L}$ abbiamo

$$-B\sin\lambda L=Ae^{-kL}\Rightarrow -B\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)=Ae^{-kL}$$

$$-B\frac{\sqrt{2}}{2}=Ae^{-kL}$$

Quindi

$$\psi = \begin{cases} B\sin kx & -L \le x \le 0 \\ Ae^{kx} = -B\frac{\sqrt{2}}{2} e^{k(x+L)} & x < -L \end{cases}$$

Ora

$$\langle\psi|\psi\rangle = 1 \Rightarrow |B|^2 \int_{-L}^{0} dx \sin^2 kx + \frac{|B|^2}{2} \int_{-\infty}^{-L} dx\, e^{2k(x+L)}$$

$$= |B|^2 \frac{1}{2} \int_{-L}^{0} dx\, (1 - \cos 2kx) + \frac{|B|^2}{2} \frac{1}{2k} \left[e^{2k(x+L)} \right]_{-\infty}^{-L}$$

$$= \frac{|B|^2}{2} \left(L - \frac{1}{2k} \sin 2kL \right) + \frac{|B|^2}{2} \frac{1}{2k}$$

$$\left[\sin 2kL = \sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -1 \right)$$

$$\langle\psi|\psi\rangle = |B|^2 \left(\frac{L}{2} + \frac{1}{4k} + \frac{1}{4k} \right) = |B|^2 \left(\frac{L}{2} + \frac{2L}{3\pi} \right)$$

$$= |B|^2 L \frac{3\pi + 4}{6\pi} \qquad |B| = \sqrt{\frac{1}{L} \frac{6\pi}{3\pi + 4}}$$

$$\text{prob}(x \le -L) = \int_{-\infty}^{-L} dx\, \frac{|B|^2}{2} e^{2k(x+L)} = \frac{|B|^2}{4k}$$

$$= \frac{1}{L} \frac{6\pi}{3\pi + 4} \cdot \frac{L}{3\pi} = \frac{2}{3\pi + 4}$$

4. $\Delta E = v \int_{-\infty}^{+\infty} |\psi(x)|^2 x\, dx$

Calcoliamo separatamente gli integrali in $[-L, 0]$ e $[-\infty, -L]$

$$(a) = \int_{-L}^{0} |B|^2 \sin^2 kx \; x \, dx = \frac{|B|^2}{2} \int_{-L}^{0} x(1-\cos 2kx)\, dx$$

$$= \frac{|B|^2}{2}\left(-\frac{L^2}{2}\right) - \frac{|B|^2}{4} \frac{\partial}{\partial k} \int_{-L}^{0} dx \sin 2kx$$

$$= -\frac{|B|^2}{4} L^2 - \frac{|B|^2}{4} \frac{\partial}{\partial k} \left[-\frac{1}{2k} \cos 2kx \right]_{-L}^{0}$$

$$= -\frac{|B|^2}{4} L^2 - \frac{|B|^2}{4} \frac{\partial}{\partial k} \left[-\frac{1}{2k} + \frac{1}{2k} \cos 2kL \right]$$

$$= -\frac{|B|^2 L^2}{4} - \frac{|B|^2}{4} \left[\frac{1}{2k^2} - \frac{1}{2k^2} \cos 2kL - \frac{1}{2k} \sin 2kL \cdot 2L \right]$$

Se $kL = \frac{3\pi}{4}$ $\quad \cos 2kL = 0 \quad \sin 2kL = -1$. Quindi

$$(a) = -\frac{|B|^2}{4} \left[L^2 + \frac{1}{2k^2} + \frac{L}{k} \right]$$

$$= -\frac{|B|^2}{4} L^2 \left[1 + \frac{8}{9\pi^2} + \frac{4}{3\pi} \right]$$

$$= -\frac{|B|^2 L^2}{36\pi^2} (9\pi^2 + 8 + 12\pi)$$

$$(b) = \frac{|B|^2}{2} \int_{-\infty}^{-L} dx \, x \, e^{2k(x+L)}$$

$$= \frac{|B|^2}{4} \left\{ \frac{\partial}{\partial k} \int_{-\infty}^{-L} dx \, e^{2k(x+L)} - 2L \int_{-\infty}^{-L} dx \, e^{2k(x+L)} \right\}$$

$$= \frac{|B|^2}{4} \left\{ \frac{\partial}{\partial k} \left[\frac{1}{2k} e^{2k(x+L)} \right]_{-\infty}^{-L} - 2L \left[\frac{1}{2k} e^{2k(x+L)} \right]_{-\infty}^{-L} \right\}$$

$$= \frac{|B|^2}{4} \left\{ \frac{\partial}{\partial k} \left(\frac{1}{2k} \right) - \frac{L}{k} \right\}$$

$$= -\frac{|B|^2}{4} \left\{ \frac{1}{2k^2} + \frac{L}{k} \right\} = -\frac{|B|^2}{4} \left(\frac{8}{9\pi^2} + \frac{4}{3\pi} \right) L^2$$

$$= -\frac{|B|^2}{9\pi^2} (2 + 3\pi) L^2$$

Quindi

$$\langle\psi|x|\psi\rangle = - \frac{|B|^2 L^2}{36\pi^2}\left(9\pi^2 + 12\pi + 8\right)$$

$$- \frac{|B|^2 L^2}{9\pi^2}\left(3\pi + 2\right)$$

$$= - \frac{|B|^2 L^2}{36\pi^2}\left(9\pi^2 + 12\pi + 8 + 8 + 12\pi\right)$$

$$= - \frac{|B|^2 L^2}{36\pi^2}\left(9\pi^2 + 24\pi + 16\right)$$

$$= - \frac{|B|^2 L^2}{36\pi^2}\left(3\pi + 4\right)^2$$

$$= - \frac{1}{36\pi^2}\,\frac{6\pi}{3\pi+4}\left(3\pi + 4\right)^2 L$$

$$= - \frac{1}{6\pi}\left(3\pi+4\right) L$$

$$\Delta E = - \frac{U}{6\pi}\left(3\pi+4\right) L$$

Esame di Meccanica Quantistica 11/07/2024

Esercizio 1. Lo stato di un particella di massa m al tempo $t = 0$, in una dimensione, è specificato dalla seguente funzione d'onda

$$\langle x|\alpha\rangle = \psi_\alpha(x) = \mathcal{N} e^{ik_0 x} e^{-k_0|x|} \,,$$

dove $k_0 > 0$ è un parametro assegnato e $\mathcal{N} > 0$ è una costante di normalizzazione tale per cui $\langle\alpha|\alpha\rangle = 1$.

1) Calcolare il valore di $\mathcal{N}$ e graficare la densità di probabilità $\rho(x)$ di misurare la posizione x.

2) Calcolare la media dell'operatore posizione e la sua dispersione Δx.

3) Calcolare la densità di probabilità $\pi(p)$ di misurare l'impulso p e disegnarne il grafico.

4) Utilizzando l'espressione di $\pi(p)$, calcolare la dispersione Δp dell'operatore impulso. Verificare la relazione di indeterminazione posizione-impulso per lo stato $|\alpha\rangle$.

5) La particella evolve con l'Hamiltoniana di particella libera. Calcolare i valori medi di posizione e impulso e la densità di probabilità $\pi(p,t)$ al generico istante di tempo $t > 0$.

Integrali utili:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^n} = \frac{\pi}{((n-1)!)^2} \frac{(2n-2)!}{2^{2n-2}} \qquad n \in \mathbb{N}^+$$

Esercizio 2. Due particelle identiche di spin 0 sono vincolate sulla superficie di una sfera e soggette alla seguente Hamiltoniana

$$H = \frac{L_1^2}{2I} + \frac{L_2^2}{2I} + \frac{\alpha}{I} \boldsymbol{L}_1 \cdot \boldsymbol{L}_2 \,, \tag{1}$$

dove I è il momento di inerzia ed $0 < \alpha \ll 1$ è un coefficiente numerico.

1) Si determinino i primi 4 livelli energetici, la loro degenerazione ed i corrispondenti autoket di H.

2) Si consideri uno stato tale che una misura dell'energia fornisce sempre un'energia $E < 5\hbar^2/2I$ e tale che, se viene effettuata una misura simultanea della proiezione del momento angolare orbitale delle particelle lungo $\hat{z}$, si ottengono sempre i valori $+\hbar$ e $-\hbar$. Si supponga che al tempo $t = 0$ il sistema sia in tale stato. Si scriva il ket di stato $|\psi(t)\rangle$ al tempo $t > 0$.

3) Si determinino, al tempo $t > 0$, i possibili valori ottenibili da una misura di L_z, L^2 e $L_{z1}L_{z2}$, specificando le corrispondenti probabilità ($\boldsymbol{L} = \boldsymbol{L}_1 + \boldsymbol{L}_2$).

4) Si consideri la perturbazione $\Delta H = \zeta(\cos^2\theta_1 + \cos^2\theta_2)$. Al primo ordine perturbativo nel parametro ζ, si determini la correzione al secondo livello energetico (primo eccitato) e se ne discuta l'eventuale rimozione della degenerazione.

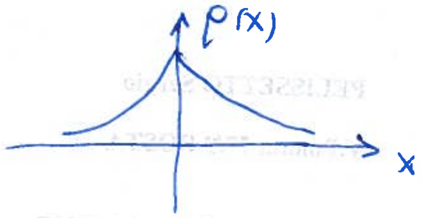
ESERCIZIO 1

$\psi_\alpha(x) = \mathcal{N} e^{ik_0 x} e^{-k_0|x|}$

1.

$$\langle\alpha|\alpha\rangle = 1 \Rightarrow \mathcal{N}^2 \int_{-\infty}^{+\infty} dx\, e^{-2k_0|x|} = 2\mathcal{N}^2 \left[-\frac{1}{2k_0} e^{-2k_0 x}\right]_0^{\infty} = \frac{\mathcal{N}^2}{k_0} = 1$$

$$\mathcal{N} = \sqrt{k_0} \qquad \rho(x) = |\psi_\alpha(x)|^2 = k_0 e^{-2k_0|x|}$$



2.

$\langle x\rangle = 0$ dato che $|\psi_\alpha(x)| = |\psi_\alpha(-x)|$

$$\Delta x^2 = \langle x^2\rangle - \langle x\rangle^2 = \mathcal{N}^2 \int_{-\infty}^{+\infty} dx\, x^2 e^{-2k_0|x|} = 2k_0 \int_0^{\infty} dx\, x^2 e^{-2k_0 x}$$

$$\overset{(2k_0 x = y)}{=} \frac{2k_0}{(2k_0)^3} \int_0^{\infty} dy\, y^2 e^{-y} = \frac{1}{4k_0^2}\, 2! = \frac{1}{2k_0^2} \qquad \Delta x = \frac{1}{\sqrt{2}\, k_0}$$

3.

$$\langle p|\alpha\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{+\infty} dx\, e^{-ipx/\hbar}\, \mathcal{N} e^{ik_0 x} e^{-k_0|x|} \qquad h \equiv k_0 - \frac{p}{\hbar}$$

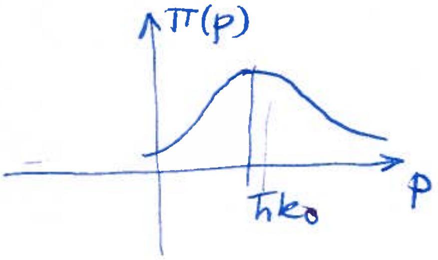
$$= \sqrt{\frac{k_0}{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{+\infty} dx\, e^{ihx} e^{-k_0|x|}$$

$$= \sqrt{\frac{k_0}{2\pi\hbar}} \left[\int_0^{+\infty} dx\, e^{(ih-k_0)x} + \int_{-\infty}^{0} dx\, e^{(ih+k_0)x}\right]$$

$$= \sqrt{\frac{k_0}{2\pi\hbar}} \left[\frac{1}{ih-k_0}(-1) + \frac{1}{ih+k_0}\right]$$

$$= \sqrt{\frac{k_0}{2\pi\hbar}} \left[\frac{1}{k_0-ih} + \frac{1}{k_0+ih}\right] = \sqrt{\frac{k_0}{2\pi\hbar}}\, \frac{2k_0}{k_0^2+h^2}$$

$$\pi(p) = \frac{2k_0^3}{\pi\hbar} \frac{1}{\left[(p/\hbar - k_0)^2 + k_0^2\right]^2}$$



4.

Curva simmetrica intorno a $p = \hbar k_0 \Rightarrow \langle p\rangle = \hbar k_0$

$$\Delta p^2 = \langle (p-\langle p\rangle)^2\rangle = \langle (p-\hbar k_0)^2\rangle$$

$$= \frac{2k_0^3}{\pi\hbar}\int_{-\infty}^{+\infty} dp \, \frac{(p-\hbar k_0)^2}{[(p-\hbar k_0)^2/\hbar^2+k_0^2]^2}$$

$$p-\hbar k_0 = x\hbar k_0$$
$$dp = dx\,\hbar k_0$$

$$= \frac{2k_0^3}{\pi\hbar}(\hbar k_0)^3 \int dx \, \frac{x^2}{(x^2+1)^2 k_0^4}$$

$$= \frac{2}{\pi}(\hbar k_0)^2 \int_{-\infty}^{+\infty} dx \, \frac{x^2}{(x^2+1)^2}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx \, \frac{x^2}{(x^2+1)^2} = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \left[\frac{1}{x^2+1} - \frac{1}{(x^2+1)^2}\right] = \pi - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$$

Quindi $\Delta p^2 = (\hbar k_0)^2$ $\quad \Delta p = \hbar k_0$

$$\Delta p \Delta x = \hbar k_0 \frac{1}{\sqrt{2}k_0} = \frac{\hbar}{\sqrt{2}} > \frac{\hbar}{2}$$

5.

$[p,H]=0$ Quindi $\pi(p) = |\langle p|\psi\rangle|^2$ è indip. da t

Anche $\langle p\rangle$ è indipendente da t

In MQ valgono le equazioni di Hamilton in media

$$\frac{d}{dt}\langle\psi(t)|q|\psi(t)\rangle = \langle\psi(t)|\frac{\partial H}{\partial p}|\psi(t)\rangle =$$
$$= \langle\psi(t)|\frac{p}{m}|\psi(t)\rangle = \frac{\hbar k_0}{m}$$

Dato che $\langle\psi(0)|q|\psi(0)\rangle = 0$ segue

$$\langle\psi(t)|q|\psi(t)\rangle = \frac{\hbar k_0}{m}t$$

ESERCIZIO 2

Se le particelle sono distinguibili e $\alpha=0$ i livelli sono

$$E=\frac{\hbar^2}{2I}\left[(\ell_1+1)\ell_1+(\ell_2+1)\ell_2\right]$$

con autofunzioni $Y_{\ell_1}^{m_1}(\theta_1,\varphi_1)\,Y_{\ell_2}^{m_2}(\theta_2,\varphi_2)$ $\left[|\ell_1\, m_1\rangle_1|\ell_2\, m_2\rangle_2\right]$

I livelli più bassi sono

a)

$\ell_1=\ell_2=0$ $\quad E=0 \quad$ $|00\rangle_1|00\rangle_2$ non degenere

(b)

$$\begin{cases}\ell_1=0\ \ \ell_2=1\\ \ell_2=0\ \ \ell_1=1\end{cases}\qquad E=\frac{\hbar^2}{2I}(2+0)=\frac{\hbar^2}{I}\qquad \begin{cases}|00\rangle_1|1m\rangle_2\\ |1m\rangle_1|00\rangle_2\end{cases}$$ deg $3+3=6$

(c)

$\ell_1=1\ \ \ell_2=1 \qquad E=\frac{\hbar^2}{2I}(2+2)=\frac{2\hbar^2}{I} \qquad |1\,m_1\rangle_1|1\,m_2\rangle_2$ deg $3\times3=9$

Se $\alpha\neq0$ gli stati $|\ell_1\, m_1\rangle_1|\ell_2\, m_2\rangle$ non sono autostati di H. Dato che

$$E_\alpha=\frac{\alpha}{I}\bar{L}_1\cdot\bar{L}_2=\frac{\alpha}{2I}\left(L^2-L_1^2-L_2^2\right)\qquad \bar{L}=\bar{L}_1+\bar{L}_2$$

gli stati rilevanti sono $|L_1\, L_2\, L\, L_z\rangle_L$. Quindi dobbiamo riscrivere gli stati dei livelli a), b), c) in termini di $|L_1 L_2 L L_z\rangle$

Livello a)

$L_1=L_2=0 \Rightarrow L=0 \qquad E_\alpha=0$

Quindi $\quad E=0 \qquad |00\rangle_1|00\rangle_2=|\overset{L_1}{0}\ \overset{L_2}{0}\ \overset{L}{0}\ \overset{L_z}{0}\rangle_L$

Livello b)

$$\begin{cases} L_1=0 & L_2=1 \\ L_2=0 & L_1=1 \end{cases} \Rightarrow L_1 \qquad E_\alpha = \frac{\alpha}{2I}\left(2\hbar^2-2\hbar^2-0\right)=0$$

Quindi $E = \frac{\hbar^2}{I}$ $\quad \begin{cases} |0\,0\rangle_1 |1\,m\rangle_2 = |0\,1\;1\,m\rangle_L \\ |1\,m\rangle_1 |0\,0\rangle_2 = |1\,0\;1\,m\rangle_L \end{cases}$

Livello c)

$$L_1=L_2=1 \qquad L=\begin{cases} 2 & E_\alpha = \frac{\alpha\hbar^2}{2I}(6-2-2) = \frac{\alpha\hbar^2}{I} \\ 1 & E_\alpha = \frac{\alpha\hbar^2}{2I}(2-2-2) = -\frac{\alpha\hbar^2}{I} \\ 0 & E_\alpha = \frac{\alpha\hbar^2}{2I}(0-2-2) = -\frac{2\alpha\hbar^2}{\cancel{2}I} \end{cases}$$

Il livello si separa in 3 sottolivelli

$E = \frac{2\hbar^2}{I} - \frac{2\alpha\hbar^2}{I}$ $\quad [L=0] \quad |1\,1\;0\,0\rangle_L$ non deg.

$E = \frac{2\hbar^2}{I} - \frac{\alpha\hbar^2}{I}$ $\quad [L=1] \quad |1\,1\;1\,m\rangle_L$ deg $= 3$

$E = \frac{2\hbar^2}{I} + \frac{\alpha\hbar^2}{I}$ $\quad [L=2] \quad |1\,1\;2\,m\rangle_L$ deg $= 5$

Come ultimo passo dobbiamo imporre il principio di Pauli: gli stati devono essere simmetrici sotto scambio

Livello a) $E=0$ l'unico stato è simmetrico e quindi soddisfa il principio di Pauli

Livello b) Dobbiamo costruire gli stati simmetrici

$$|\,b)\,m\rangle \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\,|0\,0\rangle_1 |1\,m\rangle_2 + |1\,m\rangle_1 |0\,0\rangle_2\right]$$

che si può scrivere anche come

$$\equiv \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\,|0\,1\;1\,m\rangle_L + |1\,0\;1\,m\rangle_L\right]$$

Gli stati $|\,b)\,m\rangle$ sono gli unici possibili.
La degenerazione è ridotta a 3.

Livello c)

Dobbiamo discutere le proprietà di scambio di

$$|1\,1\;0\,0\rangle_L\,,\;|1\,1\;1\,m\rangle_L \text{ e } |1\,1\;2\,m\rangle_L$$

Si utilizza qui il teorema generale che viene discusso di solito nell'ambito delle funzioni di spin

Se si hanno due particelle di spin 1 le autofunzioni con $S=2$ sono pari

$S=1$ dispari

$S=0$ pari

} sotto scambio

Quindi

$|1\,1\;0\,0\rangle_L$ è pari [ok con Pauli]

$|1\,1\;1\,m\rangle_L$ è dispari [non accettabile per Pauli]

$|1\,1\;2m\rangle_L$ è pari [ok con Pauli]

Quindi solo due sottolivelli sono consistenti con Pauli: quelli con $L=0$ e $L=2$.

$$E=\frac{2\hbar^2}{I}-\frac{2a\hbar^2}{I} \quad \text{non deg} \quad [L=0]$$

$$E=\frac{2\hbar^2}{I}+\frac{a\hbar^2}{I} \quad \text{deg. } 5 \quad [L=2]$$

2. Dato che una misura di energia fornisce $E<\frac{5\hbar^2}{2I}$ si tratta di una combinazione degli stati dei livelli a) b) c) per i quali L_1 ed L_2 assumono solo i valori 0 e 1.

Nella misura di L_{1z}/L_{2z} si ottiene solo $\pm\hbar$ e quindi si tratta di stati con $L_1=L_2=1$. Dato che ψ deve essere symmetrico

$$|\psi\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|1\,1\rangle_1|1\,-1\rangle_2+|1\,-1\rangle_1|1\,1\rangle_2\right)$$

Per determinare $|\psi(t)\rangle$ dobbiamo cambiare base e passare a $|1\,1\,L\,L_z\rangle_L$.

Dalle tavole CG 1×1:

$$|1\,-1\rangle_1|1\,1\rangle_2 = |\overset{m_1}{-1}\;\overset{m_2}{1}\rangle = \sqrt{\frac{1}{6}}|1\,1\,2\,0\rangle_L - \sqrt{\frac{1}{2}}|1\,1\,1\,0\rangle_L + \sqrt{\frac{1}{3}}|1\,1\,0\,0\rangle_L$$

$$|1\,1\rangle_1|1\,-1\rangle_2 = |1\,-1\rangle = \sqrt{\frac{1}{6}}|1\,1\,2\,0\rangle_L + \sqrt{\frac{1}{2}}|1\,1\,1\,0\rangle_L + \sqrt{\frac{1}{3}}|1\,1\,0\,0\rangle_L$$

$$|\psi\rangle = \sqrt{\frac{1}{3}}|1\,1\,2\,0\rangle_L + \sqrt{\frac{2}{3}}|1\,1\,0\,0\rangle_L$$

$$|\psi(t)\rangle = \sqrt{\frac{1}{3}}e^{-iE_{20}t/\hbar}|1\,1\,2\,0\rangle_L + \sqrt{\frac{2}{3}}e^{-iE_{00}t/\hbar}|1\,1\,0\,0\rangle_L$$

$$(\text{fase}) = \sqrt{\frac{1}{3}}e^{i(E_{00}-E_{20})t/\hbar}|1\,1\,2\,0\rangle_L + \sqrt{\frac{2}{3}}|1\,1\,0\,0\rangle_L$$

$$E_{00}-E_{20} = \frac{2\hbar^2}{I} - \frac{2\alpha\hbar^2}{I} - \frac{2\hbar^2}{I} - \frac{\alpha\hbar^2}{I} = -\frac{3\alpha\hbar^2}{I}$$

Definiamo $\omega = \frac{3\alpha\hbar}{I}$ per cui

$$|\psi(t)\rangle = \sqrt{\frac{1}{3}}e^{-i\omega t}|1\,1\,2\,0\rangle_L + \sqrt{\frac{2}{3}}|1\,1\,0\,0\rangle_L$$

3.

L_z e L^2 commutano con H per cui le probabilità non dipendono da t.

prob $(L^2=0) = \frac{2}{3}$ prob $(L^2=6\hbar^2) = \frac{1}{3}$

prob $(L_z=0) = 1$

Per calcolare la probabilità di misurare un dato valore di $L_{1z}L_{2z}$ dobbiamo tornare alla base

$$|l_1\,m_1\rangle_1|l_2\,m_2\rangle_2$$

Dato che qui $l_1=l_2=1$ sempre, usiamo una notazione semplificata

$$|1\ m_1\rangle_1 |2\ m_2\rangle_2 \equiv |m_1\ m_2\rangle_{12}$$

Dalle tavole CG 1x1

$$|\psi\rangle = \sqrt{\frac{1}{3}} e^{-i\omega t} \left(\frac{1}{\sqrt{6}} |1\,-1\rangle_{12} + \sqrt{\frac{2}{3}} |0\,0\rangle_{12} + \sqrt{\frac{1}{6}} |-1\,1\rangle_{12} \right)$$

$$+ \sqrt{\frac{2}{3}} \left(\sqrt{\frac{1}{3}} |1\,-1\rangle_{12} - \sqrt{\frac{1}{3}} |0\,0\rangle_{12} + \sqrt{\frac{1}{3}} |-1\,1\rangle_{12} \right)$$

$$= \left(\frac{\sqrt{2}}{3} + \frac{\sqrt{2}}{6} e^{-i\omega t} \right) \left(|1\,-1\rangle_{12} + |-1\,1\rangle_{12} \right)$$

$$+ \left(-\frac{\sqrt{2}}{3} \right) \left(1 - e^{-i\omega t} \right) |0\,0\rangle_{12}$$

$$\text{pro}(L_{1z}L_{2z} = -\hbar) = 2 \left| \frac{\sqrt{2}}{3} + \frac{\sqrt{2}}{6} e^{-i\omega t} \right|^2$$

$$= 2 \cdot \frac{2}{36} \left| 2 + e^{-i\omega t} \right|^2$$

$$= \frac{1}{9} \left(4 + 1 + 4\cos\omega t \right) = \frac{1}{9} (5 + 4\cos\omega t)$$

$$\text{prob}(L_{1z}L_{2z} = 0) = \frac{2}{9} |1 - e^{-i\omega t}|^2 = \frac{2}{9} (2 - 2\cos\omega t)$$

$$= \frac{4}{9} (1 - \cos\omega t)$$

4.

Il secondo livello ha come base

$$|b)\,m\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[|0 0\rangle_1 |1\,m\rangle_2 + |1\,m\rangle_1 |0 0\rangle_2 \right]$$

Sono autofunzioni di $L_z = L_{1z} + L_{2z}$ con autovalore $\hbar m$.

Ora

$$\Delta H = \zeta (\cos^2\theta_1 + \cos^2\theta_2) = \frac{\zeta}{R^2} (z_1^2 + z_2^2) \quad (R \text{ raggio sfera})$$

È evidente che $[\Delta H_1, L_z] = 0$.
Quindi la perturbazione è diagonale.
Se $\Delta H = \Delta H_1 + \Delta H_2 = 5\cos^2\theta_1 + 5\cos^2\theta_2$ abbiamo

$$\langle b)\, m | \Delta H_1 | b)\, m\rangle =$$

$$= \frac{1}{2}\Big[{}_1\langle 00| {}_2\langle 1m| \Delta H_1 |1m\rangle_2 |00\rangle_1 +$$

$${}_1\langle 1m| {}_2\langle 00 | \Delta H_1 | 1m\rangle_2 |00\rangle_1 + \rightarrow 0 \Big\} \text{ perchè } {}_2\langle 00|1m\rangle_2 = 0$$

$${}_1\langle 00| {}_2\langle 1m| \Delta H_1 |1m\rangle_1 |00\rangle_2 + \rightarrow 0$$

$$+ {}_1\langle 1m| {}_2\langle 00 | \Delta H_1 | 1m\rangle_1 |00\rangle_2 \Big]$$

$$= \frac{1}{2}\Big[{}_1\langle 00|\Delta H_1|00\rangle_1 + {}_1\langle 1m|\Delta H_1|1m\rangle_1 \Big]$$

Dato che le funzioni d'onda sono simmetriche per scambio delle due particelle

$$\langle b)\, m | \Delta H_2 | b)\, m\rangle = \langle b)\, m | \Delta H_1 | b)\, m\rangle$$

Quindi

$$\langle b)\, m | \Delta H | b)\, m\rangle =$$

$$= 5\left[\langle 00|\cos^2\theta|00\rangle + \langle 1m|\cos^2\theta|1m\rangle \right]$$

Ora

$$\langle 00|\cos^2\theta|00\rangle = \int d\Omega\, |Y_0^0|^2 \cos^2\theta$$

$$= \frac{1}{4\pi} 2\pi \int_{-1}^{1} d\cos\theta \cos^2\theta = \frac{1}{2}\cdot 2\int_0^1 dx\, x^2 = \frac{1}{3} \quad [x = \cos\theta]$$

$$\langle 1\pm1|\cos^2\theta|1\pm1\rangle = \int d\Omega\, |Y_1^{\pm1}|^2 \cos^2\theta =$$

$$= 2\pi \, \frac{3}{8\pi} \int d\cos\theta \, \sin^2\theta \, \cos^2\theta$$

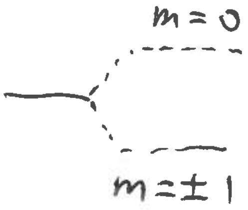
$$= \frac{3}{4} \cdot 2 \int_0^1 dx \, (1-x^2) \, x^2 = \frac{3}{2}\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) = \frac{3}{2} \cdot \frac{2}{15} = \frac{1}{5}$$

$$\langle 1 \; 0 | \cos^2\theta | 1 \; 0 \rangle = \int d\Omega \, |Y_1^0|^2 \cos^2\theta$$

$$= 2\pi \, \frac{3}{4\pi} \int d\cos\theta \, \cos^4\theta$$

$$= \frac{3}{2} \cdot 2 \int_0^1 dx \, x^4 = 3 \cdot \frac{1}{5} = \frac{3}{5}$$

Quindi il livello si separa in 2 sottolivelli



$\Delta E = \zeta\left(\frac{1}{3} + \frac{3}{5}\right) = \frac{14}{15}\zeta$ non deg.

$\Delta E = \zeta\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{5}\right) = \frac{8}{15}\zeta$ deg $= 2$

Esame di Meccanica Quantistica del 12/09/2024

Esercizio 1. Si considerino due particelle identiche di spin 1/2 e massa m che interagiscono in tre dimensioni con Hamiltoniana

$$H_0 = \frac{1}{2m}(p_1^2 + p_2^2) + \frac{1}{4}m\omega^2(\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2)^2 + \frac{a}{\hbar}J^2,$$

dove $\boldsymbol{J} = \boldsymbol{L} + \boldsymbol{S}_1 + \boldsymbol{S}_2$, e $\boldsymbol{L}$ è il momento angolare orbitale. Si risolva il problema nel sistema del centro di massa. Si assuma $0 < a \ll \omega$.

a) Si calcolino le energie e le degenerazioni dei livelli con energia inferiore a $3\hbar\omega$.

b) Si determinino tutti gli stati $|\psi\rangle$ tali che: i) una misura dell'energia fornisce un risultato sempre inferiore a $3\hbar\omega$; ii) una misura di J^2 fornisce 0 con certezza; iii) una misura di L_z fornisce $\hbar$ con probabilità 1/9.

c) Sia $|\psi_t\rangle$ l'evoluto di $|\psi\rangle$ secondo la Hamiltoniana H_0. Si considerino i seguenti valori medi: $\langle\psi_t|H_0|\psi_t\rangle$, $\langle\psi_t|L^2|\psi_t\rangle$, $\langle\psi_t|S_z|\psi_t\rangle$, $\langle\psi_t|S_{1z}S_{2z}|\psi_t\rangle$, dove $S_z = S_{1z} + S_{2z}$. c1) Quali valori medi ci si attende a priori che non dipendano dal tempo? c2) Si calcolino tutti i valori medi al variare di t.

d) Si supponga che la Hamiltoniana sia $H = H_0 + bS_x$, dove S_x è la componente x dello spin totale, con $|b| \ll a$. Utilizzando la teoria delle perturbazioni al primo ordine, si calcolino le energie e la degenerazione dei livelli perturbati che corrispondono ai primi 2 livelli calcolati al punto a).

Esercizio 2. Una particella di spin 1/2 e massa m è vincolata a muoversi in una dimensione. L'Hamiltoniana del sistema è data da $\hat{H} = \hat{H}_0 + \epsilon\hat{H}_1$ con

$$\begin{aligned}\hat{H}_0 &= \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2\hat{x}^2 + \omega\hat{S}_z \\ \hat{H}_1 &= \sqrt{2}\,m^\alpha\omega^\beta\hbar^\gamma\left(\hat{x}\hat{S}_x - \frac{\hat{p}}{m\omega}\hat{S}_y\right)\end{aligned}$$

dove α, β, γ sono numeri razionali e $0 < \epsilon \ll 1$.

1. Determinare α, β, γ e riscrivere l'Hamiltoniana in termini degli operatori di creazione e distruzione dell'oscillatore armonico $(\hat{a}, \hat{a}^\dagger)$, degli operatori a scala dello spin $(\hat{S}_+, \hat{S}_-)$ e di $\hat{S}_z$.
2. Determinare lo spettro dell'Hamiltoniana imperturbata $\hat{H}_0$, indicando la degenerazione di ogni livello e una base di autoket.
3. Si determini al primo ordine in ϵ la correzione al livello energetico fondamentale e al primo livello eccitato. Si discuta l'eventuale rimozione della degenerazione.
4. Sia $\hat{\mathcal{O}} \equiv \hat{a}^\dagger a + \lambda\hat{S}_z$, dove λ è un parametro. Determinare il valore di λ tale che $\left[\hat{\mathcal{O}}, \hat{H}\right] = 0$.
5. Calcolare $\left[\hat{H}_0, \hat{H}\right]$. Utilizzare il risultato ottenuto per dimostrare che i risultati trovati al primo ordine in ϵ risultano validi a tutti gli ordini.

ESERCIZIO 1

(a)

nel sistema del CM $\quad H_0 = \frac{p^2}{2\mu}\cancel{p} + \frac{1}{4}m\omega^2 r^2 + \frac{a}{\hbar}J^2 \qquad \mu = \frac{m}{2}$

$$= \frac{p^2}{2\mu} + \frac{\mu}{2}\omega^2 r^2 + \frac{a}{\hbar}J^2$$

Per $a=0$ lo spettro è (senza spin)

$E = \frac{3}{2}\hbar\omega \quad \underline{L=0} \quad$ pari per parità (scambio)

$E = \frac{5}{2}\hbar\omega \quad \xrightarrow{L=1} \quad$ disp.

$E = \frac{7}{2}\hbar\omega \quad \underline{L=2,0} \quad$ pari $\longleftarrow$ NON NEC. $\quad E > 3\hbar\omega$

ecc.

Aggiungiamo lo spin e teniamo conto del principio di Pauli: stati pari spaziali vanno moltiplicati per stati $S=0$

stati dispari per stati $S=1$

Quindi includendo lo spin (S = spin totale)

$E = \frac{3}{2}\hbar\omega \quad \overset{l\ m}{|0\,0\rangle}\overset{S\ S_z}{|0\,0\rangle} \quad$ deg 1

$E = \frac{5}{2}\hbar\omega \quad |1\,m\rangle|1\,S_z\rangle \quad$ deg $3\times 3 = 9$

$E = \frac{7}{2}\hbar\omega \quad \begin{cases}|0\,0\rangle|0\,0\rangle \\ |2\,m\rangle|0\,0\rangle\end{cases} \quad$ deg $1+5=6 \longleftarrow E > 3\hbar\omega$

$\vdots$

Per tenere conto del termine in a dobbiamo cambiare base $(L_z, S_z) \longrightarrow (J, J_z)$: Elementi $|L\,S\,J\,J_z\rangle_J$

$E = \frac{3}{2}\hbar\omega \quad L=S=0 \longrightarrow J=0$

Stato non degenere $\quad |0\,0\,0\,0\rangle_J$

L'energia non cambia

Stati con $E = \frac{5}{2}\hbar\omega$ in assenza di $\frac{a}{\hbar}J^2$

$$L=1 \quad S=1 \longrightarrow J = \begin{cases}2\\1\\0\end{cases}$$

Vi sono tre livelli

$J=0$ $\quad |1\,1\,1\,0\,0\rangle_J$ $\quad E=\frac{5}{2}\hbar\omega$ $\quad$ non deg.

$J=1$ $\quad |1\,1\,1\,1\,J_z\rangle_J$ $\quad E=\frac{5}{2}\hbar\omega+2\hbar a$ $\quad$ deg. 3

$J=2$ $\quad |1\,1\,1\,2\,J_z\rangle_J$ $\quad E=\frac{5}{2}\hbar\omega+6\hbar a$ $\quad$ deg. 5

NOTA sulla notazione:

Ad essere precisi i ket andrebbero indicati come

$|n\,L\,S\,J\,J_z\rangle_J$ | Questa scrittura caratterizza completamente gli stati

$\uparrow$ (aggiunto il livello n)

(b)

Dato $E\leq 3\hbar\omega$ e $J^2=0$ con certezza

$$|\psi\rangle = A|\overset{n}{0}\,\overset{l}{0}\,\overset{s}{0}\,\overset{j}{0}\,\overset{j_z}{0}\rangle_J + B|\overset{n}{1}\,\overset{l}{1}\,\overset{s}{1}\,\overset{j}{0}\,\overset{J_z}{0}\rangle_J$$

Tavole CG 1×1

$$|\overset{j}{0}\,\overset{j_z}{0}\rangle=\sqrt{\frac{1}{3}}\left(|\overset{l_z}{1}\,\overset{s_z}{-1}\rangle-|0\,0\rangle+|-1\,1\rangle\right)$$

Quindi

$$|\psi\rangle = A|\overset{n}{0}\,\overset{l}{0}\,\overset{l_z}{0}\,\overset{s}{0}\,\overset{s_z}{0}\rangle \longrightarrow l_z=0$$

$$+B\frac{1}{\sqrt{3}}|1\,1\,1\,1\,-1\rangle \longrightarrow l_z=1$$

$$+B\frac{1}{\sqrt{3}}|1\,1\,0\,1\,0\rangle \longrightarrow l_z=0$$

$$+B\frac{1}{\sqrt{3}}|1\,1\,-1\,1\,1\rangle \longrightarrow l_z=-1$$

Quindi $\frac{|B|^2}{3}=\frac{1}{9}$ $\quad |B|=\frac{1}{\sqrt{3}}$

Dalla condizione di normalizzazione $|A|^2+|B|^2=1 \Rightarrow |A|=\sqrt{\frac{2}{3}}$

Fissiamo le fasi scegliendo $B=\frac{1}{\sqrt{3}}$ $\quad A=\sqrt{\frac{2}{3}}e^{i\alpha}$

c1) Indichiamo con $H_0 = H_{osc} + \frac{a}{\hbar} J^2$

Notiamo che

$[H_{osc}, L^2] = [H_{osc}, J^2] = 0$ perchè H_{osc} è invariante per rotazioni

$[H_{osc}, \text{funzioni spin}] = 0$ perchè non dipende dallo spin

$[J^2, L^2] = 0$

Ma $[J^2, S_z] \neq 0$ $[J^2, S_{1z} S_{2z}] \neq 0$

Quindi

(a) il valore medio di H_0 non dipende da t
[ovvio: $[H_0, H_0] = 0$

(b) il valore medio di L^2 non dipende da t

$$[H_0, L^2] = [H_{osc}, L^2] + \frac{a}{\hbar} [J^2, L^2] = 0$$

(c) (d) a priori i valori medi di S_z, $S_{1z} S_{2z}$ potrebbero dipendere da t.

Per lo stato $|\psi\rangle$ considerato anche i valori medi di S_z e $S_{1z} S_{2z}$ non dipendono da t, dato che $|\psi\rangle$ è autostato di J^2 con autovalore nullo. Infatti preso un qualsiasi operatore A abbiamo

$$\langle \psi_t | A | \psi_t \rangle = \langle \psi_0 | e^{iH_0 t/\hbar} A e^{-iH_0 t/\hbar} |\psi_0\rangle$$

Ora $e^{-iH_0 t/\hbar} |\psi_0\rangle = e^{-iH_{osc} t/\hbar} e^{-iaJ^2 t/\hbar^2} |\psi_0\rangle$ $\left[[H_{osc}, J^2] = 0 \right]$

$= e^{-iH_{osc} t/\hbar} |\psi_0\rangle$ $[J^2 |\psi_0\rangle = 0]$

Quindi

$$\langle \psi_t | A | \psi_t \rangle = \langle \psi_0 | e^{iH_{osc} t/\hbar} A e^{-iH_{osc} t/\hbar} |\psi_0\rangle$$

Ora se $[A, H_{osc}] = 0$ abbiamo

$$e^{+iH_{osc}t/\hbar} A e^{-iH_{osc}t/\hbar} = A$$

$$\langle\psi_t|A|\psi_t\rangle = \langle\psi_0|A|\psi_0\rangle$$

Quindi, PER LO SPECIFICO STATO $|\psi\rangle$, i valori medi non dipendono da t se $[A, H_{osc}] = 0$

Quindi, anche i valori medi di S_z e $S_{1z}S_{2z}$ non dipendono da t.

c2)

$$\langle\psi|H_0|\psi\rangle = |A|^2 \frac{3}{2}\hbar\omega + |B|^2 \frac{5}{2}\hbar\omega = \hbar\omega + \frac{5}{6}\hbar\omega = \frac{11}{6}\hbar\omega$$

$$\langle\psi|L^2|\psi\rangle = |B|^2 2\hbar^2 = \frac{2}{3}\hbar^2$$

$$\langle\psi|S_z|\psi\rangle = +\frac{|B|^2}{3}(-\hbar) + \frac{|B|^2}{3}(+\hbar) = 0$$

Per calcolare il valor medio di $S_{1z}S_{2z}$ possiamo riscrivere

$$S_z^2 = S_{1z}^2 + S_{2z}^2 + 2S_1S_z \Rightarrow S_{1z}S_{2z} = \frac{1}{2}(S_z^2 - S_{1z}^2 - S_{2z}^2)$$

dato che, per lo spin 1/2, $S_{1z}^2 = S_{2z}^2 = \frac{\hbar^2}{4}$ abbiamo

$$S_{1z}S_{2z} = \frac{1}{2}S_z^2 - \frac{\hbar^2}{4}$$

$$\langle\psi|S_z^2|\psi\rangle = \frac{|B|^2}{3}\hbar^2 + \frac{|B|^2}{3}\hbar^2 = \frac{2}{9}\hbar^2$$

$$\langle\psi|S_{1z}S_{2z}|\psi\rangle = \frac{\hbar^2}{9} - \frac{\hbar^2}{4} = -\frac{5}{36}\hbar^2$$

Alternativamente si poteva fare il calcolo diretto

$$S_{1z}S_{2z}|\overset{n}{1}\,\overset{l}{1}\,\overset{l_z}{1}\,\overset{S}{1}\,\overset{S_z}{-1}\rangle =$$

$$= S_{1z}S_{2z}|\overset{n}{1}\,\overset{l}{1}\,\overset{l_z}{1}\rangle\,|\overset{S_{1z}}{-\tfrac{1}{2}}\rangle_1\,|\overset{S_{2z}}{-\tfrac{1}{2}}\rangle_2 =$$

$$= \frac{\hbar^2}{1}|111\rangle|-\tfrac{1}{2}\rangle_1|-\tfrac{1}{2}\rangle_2 = \frac{\hbar^2}{4}|1111-1\rangle$$

$$S_{1z}S_{2z}|\overset{n\,l\,l_z\,s\,s_z}{1\,1\,0\,1\,0}\rangle = S_{1z}S_{2z}|\overset{n\,l\,l_z}{1\,1\,0}\rangle|\overset{s\,s_z}{1\,0}\rangle$$

$$= S_{1z}S_{2z}|1\,1\,0\rangle\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\tfrac{1}{2}\rangle_1|-\tfrac{1}{2}\rangle_2 + |-\tfrac{1}{2}\rangle_1|\tfrac{1}{2}\rangle_2\right)$$

$$= -\frac{\hbar^2}{4}|1\,1\,0\rangle\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\tfrac{1}{2}\rangle_1|-\tfrac{1}{2}\rangle_2 + |-\tfrac{1}{2}\rangle_1|\tfrac{1}{2}\rangle_2\right)$$

$$= -\frac{\hbar^2}{4}|1\,1\,0\,1\,0\rangle$$

$$S_{1z}S_{2z}|1\,1\,-1\,1\,1\rangle = S_{1z}S_{2z}|1\,1\,-1\rangle|\tfrac{1}{2}\rangle_1|\tfrac{1}{2}\rangle_2$$

$$= \frac{\hbar^2}{4}|1\,1\,-1\,1\,1\rangle$$

$$S_{1z}S_{2z}|0\,0\,0\,0\,0\rangle = S_{1z}S_{2z}|\overset{n\,l\,l_z}{0\,0\,0}\rangle\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\tfrac{1}{2}\rangle_1|-\tfrac{1}{2}\rangle_2 - |-\tfrac{1}{2}\rangle_1|\tfrac{1}{2}\rangle_2\right)$$

$$= -\frac{\hbar^2}{4}|0\,0\,0\,0\,0\rangle$$

Quindi

$$S_{1z}S_{2z}|\psi\rangle = A\left(-\frac{\hbar^2}{4}\right)|0\,0\,0\,0\rangle + \frac{B}{\sqrt{3}}\left(\frac{\hbar^2}{4}|1\,1\,1\,1\,-1\rangle - \frac{\hbar^2}{4}|1\,1\,0\,1\,0\rangle + \frac{\hbar^2}{4}|1\,1\,-1\,1\,+1\rangle\right)$$

$$\langle\psi|S_{1z}S_{2z}|\psi\rangle = -\frac{\hbar^2}{4}|A|^2 + \frac{|B|^2}{3}\left(\frac{\hbar^2}{4} - \frac{\hbar^2}{4} + \frac{\hbar^2}{4}\right)$$

$$= \frac{2}{3}\left(-\frac{\hbar^2}{4}\right) + \frac{1}{9}\frac{\hbar^2}{4} = \left(-\frac{1}{6} + \frac{1}{36}\right)\hbar^2 = -\frac{5}{36}\hbar^2$$

(d)

Il modo più semplice per affrontare il problema consiste nell'osservare che la Hamiltoniana è invariante per rotazioni. Quindi possiamo ridefinire gli assi in modo da scrivere $V = b S_z$

1. stato fondamentale $|\overset{n\,l\,l_z\,s\,s_z}{0\,0\,0\,0\,0}\rangle$. ha $S=0$ quindi

$$\Delta E = \langle 0\,0\,0\,0\,0|bS_z|0\,0\,0\,0\,0\rangle = 0$$

2. primo eccitato

$$|\psi_I\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(|\overset{n}{1}\,\overset{l}{1}\,\overset{l_z}{1}\,\overset{s}{1}\,\overset{s_z}{-1}\rangle - |1\,1\,0\,1\,0\rangle + |1\,1\,-1\,1\,1\rangle\right)$$

Quindi

$$\langle\psi_I|S_z|\psi_I\rangle = \frac{1}{3}\left(-\hbar + 0 + \hbar\right) = 0 \qquad \Delta E = 0$$

E' possibile pure fare il calcolo con $S_x = \frac{1}{2}(S_+ + S_-)$

$$S_x|1\,1\,1\,1\,-1\rangle = \frac{1}{2}S_+|1\,1\,1\,1\,-1\rangle \rightarrow \frac{\hbar}{2}\sqrt{2}\,|1\,1\,1\,1\,0\rangle$$

$$+\frac{1}{2}S_-|1\,1\,1\,1\,-1\rangle \longrightarrow 0$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\hbar|1\,1\,1\,1\,0\rangle$$

$$S_x|1\,1\,0\,1\,0\rangle = \frac{1}{2}S_+|1\,1\,0\,1\,0\rangle \rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2}\hbar|1\,1\,0\,1\,1\rangle$$

$$+\frac{1}{2}S_-|1\,1\,0\,1\,0\rangle \rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2}\hbar|1\,1\,0\,1\,-1\rangle$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\hbar\left(|1\,1\,0\,1\,-1\rangle + |1\,1\,0\,1\,1\rangle\right.$$

$$S_x|1\,1\,-1\,1\,1\rangle = \frac{1}{2}S_+|1\,1\,-1\,1\,1\rangle \longrightarrow 0$$

$$+\frac{1}{2}S_-|1\,1\,-1\,1\,1\rangle \longrightarrow \frac{\sqrt{2}\hbar}{2}|1\,1\,-1\,1\,0\rangle$$

Quindi

$$S_x|\psi_I\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}\frac{\sqrt{2}\hbar}{2}\Big(|1\,1\,1\,1\,0\rangle + |1\,1\,0\,1\,-1\rangle + |1\,1\,0\,1\,1\rangle + |1\,1\,-1\,1\,0\rangle\Big)$$

Nessuno di questi stati appare in $|\psi_I\rangle$

Quindi

$$\langle\psi_I|S_x|\psi_I\rangle = 0$$

ESERCIZIO 2

1. Per determinare gli esponenti α, β, γ utilizziamo l'analisi dimensionale

Dobbiamo avere

$$[x] = [L]$$
$$[S_x] = [\hbar]$$

$$[E] = [m]^\alpha [\omega]^\beta [\hbar]^\gamma [L][\hbar]$$

$$[m]^\alpha [T]^{-\beta} [ML^2T^{-1}]^{\gamma+1} [L] = [ML^2T^{-2}]$$

Quindi

$$\begin{cases} \alpha + \gamma + 1 = 1 \\ -\beta - \gamma - 1 = -2 \\ 2\gamma + 2 + 1 = 2 \end{cases} \qquad \begin{array}{l} \gamma = -1/2 \\ \alpha = 1/2 \\ \beta = 3/2 \end{array}$$

Quindi

$$m^\alpha \omega^\beta \hbar^\gamma = m^{1/2} \omega^{3/2} \hbar^{-1/2} = \omega \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}$$

Quindi

$$H_1 = \omega \sqrt{\frac{2m\omega}{\hbar}} \left(x S_x - \frac{p}{m\omega} S_y \right)$$

Gli operatori a, a^+ sono definiti da

$$\begin{cases} a = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\, x + \frac{ip}{\sqrt{2m\hbar\omega}} \\ a^+ = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\, x - \frac{ip}{\sqrt{2m\hbar\omega}} \end{cases}$$

$$a + a^+ = \sqrt{\frac{2m\omega}{\hbar}}\, x$$

$$a - a^+ = \frac{2ip}{\sqrt{2m\hbar\omega}} = i \sqrt{\frac{2m\omega}{\hbar}} \frac{p}{m\omega}$$

Quindi

$$H_1 = \omega \left[(a + a^+) S_x + i (a - a^+) S_y \right]$$

Ora

$$S_+ = S_x + i S_y \qquad\qquad S_x = \frac{1}{2}(S_+ + S_-)$$
$$\rightarrow$$
$$S_- = S_x - i S_y \qquad\qquad i S_y = \frac{1}{2}(S_+ - S_-)$$

Quindi

$$H_1 = \frac{\omega}{2}\left[(a+a^+)(S_+ + S_-) + (a-a^+)(S_+ - S_-) \right]$$
$$= \frac{\omega}{2}\left[aS_+ + a^+S_+ + aS_- + a^+S_- + aS_+ - a^+S_+ - aS_- + a^+S_- \right] = \omega(aS_+ + a^+S_-)$$

2. Se $|n\rangle$ sono gli autostati spaziali e $|\pm\frac{1}{2}\rangle$ sono gli autostati di S_z, gli autostati di H_0 sono $|n\rangle|\pm\frac{1}{2}\rangle$ con $E = (n+\frac{1}{2})\hbar\omega \pm \frac{\hbar\omega}{2}$

$$= (n + \tfrac{1}{2} \mp \tfrac{1}{2})\hbar\omega$$

Stato fond: $|0\rangle|-\frac{1}{2}\rangle$ $E=0$ non deg.

I ecc. $|1\rangle|-\frac{1}{2}\rangle$ e $|0\rangle|\frac{1}{2}\rangle$ deg 2 $E=\hbar\omega$

II ecc. $|2\rangle|-\frac{1}{2}\rangle$ e $|1\rangle|\frac{1}{2}\rangle$ deg. 2 $E=2\hbar\omega$

⋮

n-esimo ecc. $|n\rangle|-\frac{1}{2}\rangle$ e $|n-1\rangle\frac{1}{2}\rangle$ deg. 2 $E = n\hbar\omega$

③

Lo stato fond. è non deg. $|0\rangle|-\frac{1}{2}\rangle$

$$\langle 0|-\tfrac{1}{2}|\, H_1 \,|0\rangle|-\tfrac{1}{2}\rangle = 0 \qquad \Delta E = 0$$

Il I ecc. è dato da $|1\rangle|-\frac{1}{2}\rangle$ e $|0\rangle|\frac{1}{2}\rangle$

Dobbiamo calcolare la matrice 2×2 della perturbazione

$$H_1|0\rangle|+\tfrac{1}{2}\rangle = \omega(aS_+ + a^+S_-)|0\rangle|\tfrac{1}{2}\rangle$$
$$= \omega(a^+|0\rangle)(S_-|\tfrac{1}{2}\rangle) = \hbar\omega|1\rangle|-\tfrac{1}{2}\rangle$$

$$H_1|1\rangle|-\tfrac{1}{2}\rangle = \omega\left(a S_+ + a^\dagger S_-\right)|1\rangle|-\tfrac{1}{2}\rangle$$
$$= \omega\left(a|1\rangle\, S_+|-\tfrac{1}{2}\rangle\right) \qquad \left(S_-|-\tfrac{1}{2}\rangle = 0\right)$$
$$= \hbar\omega\,|0\rangle|\tfrac{1}{2}\rangle$$

Quindi

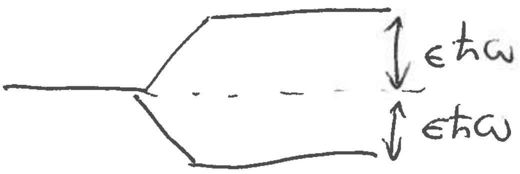
$$\langle 0|\tfrac{1}{2}|H_1|0\rangle|\tfrac{1}{2}\rangle = 0$$
$$\langle 1\langle -\tfrac{1}{2}|H_1|1\rangle|-\tfrac{1}{2}\rangle = 0$$
$$\langle 0|\langle\tfrac{1}{2}|H_1|1\rangle|-\tfrac{1}{2}\rangle = \hbar\omega$$
$$\langle 1|\langle -\tfrac{1}{2}|H_1|0\rangle|\tfrac{1}{2}\rangle = \hbar\omega \quad \text{(per hermiticità)}$$

Quindi

$$V = \begin{pmatrix} 0 & \hbar\omega \\ \hbar\omega & 0 \end{pmatrix}$$

$$\det\left(\epsilon V - \lambda I\right) = \begin{pmatrix} -\lambda & \epsilon\hbar\omega \\ \epsilon\hbar\omega & -\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - (\epsilon\hbar\omega)^2 \qquad \lambda = \pm\,\epsilon\hbar\omega$$

Quindi $\quad \Delta E = \pm\,\epsilon\hbar\omega$



Degenerazione assente

5.

$$H_0 = \hbar\omega\left(a^+a + \frac{1}{2}\right) + \omega S_z$$

$$H_1 = \omega(aS_+ + a^+S_-)$$

$$[O, H_0] = 0$$

$$[O, H_1] = [a^+a + \lambda S_z, \omega(aS_+ + a^+S_-)]$$

$$= \omega[a^+a, aS_+] + \lambda\omega[S_z, aS_+]$$

$$+ \omega[a^+a, a^+S_-] + \lambda\omega[S_z, a^+S_-]$$

$$= \omega[a^+, a]aS_+ + \lambda\omega a[S_z, S_+]$$

$$+ \omega a^+[a, a^+]S_- + \lambda\omega a^+[S_z, S_-]$$

$$[S_z, S_+] = [S_z, S_x + iS_y] = i\hbar(S_y - iS_x) = \hbar S_+$$

$$[S_z, S_-] = [S_z, S_x - iS_y] = i\hbar(S_y + iS_x) = -\hbar S_-$$

$$[O, H_1] = -\omega a S_+ + \lambda\hbar\omega a S_+ + \omega a^+S_- - \lambda\hbar\omega a^+S_-$$

$$= (\lambda\hbar - 1)\omega a S_+ + (1 - \lambda\hbar)\omega a^+S_-$$

Quindi $\lambda\hbar - 1 = 0$ $\qquad \lambda = \frac{1}{\hbar}$

6.

$$\hat{O} = a^+a + \frac{1}{\hbar}S_z \qquad H_0 = \hbar\omega\left(a^+a + \frac{1}{2}\right) + \omega S_z$$

$$= \hbar\omega\left(a^+a + \frac{1}{\hbar}S_z\right) + \frac{\hbar\omega}{2}$$

$$= \hbar\omega\hat{O} + \frac{\hbar\omega}{2}$$

Quindi $[H_0, H_0] = 0 = [H_0, H_1]$

Quindi esiste base comune di autovettori di H_0 ed H_1 (che sono quindi autovettori di H)

Per calcolarla si diagonalizza H_0 e quindi H_1 nei sottospazi ~~degeneri~~ generati dagli autovalori di H_0 (autov. degeneri). Questa è la procedura seguita usando la teoria perturbativa

Esame di Meccanica Quantistica del 15/11/2024

Esercizio 1. La dinamica di una particella di spin 1/2 è descritta dalla seguente Hamiltoniana:

$$H = a|+;z\rangle\langle -;z| + b|+;x\rangle\langle -;x| - \frac{a}{4}|+;z\rangle\langle +;z|\,,$$

dove a, b sono due parametri e $|\pm;i\rangle$ sono autoket di S_i con autovalore $\pm\hbar/2$.

a) Si fissi il rapporto b/a in modo che l'operatore H sia Hermitiano.

b) Si calcolino autovalori ed autoket di H.

c) Al tempo $t = 0$ lo stato della particella è descritto dal ket $|\psi(0)\rangle = |+;z\rangle$. Si determinino i possibili risultati di una misura dell'energia, le relative probabilità e il valor medio dell'energia.

d) Si determini il ket di stato $|\psi(t)\rangle$ ad un generico istante di tempo $t > 0$.

e) Calcolare la probabilità che una misura di S_z at tempo t dia $-\hbar/2$ come risultato.

Esercizio 2. Si considerino due particelle identiche di spin 1/2 e massa m che interagiscono in tre dimensioni con Hamiltoniana

$$H = \frac{1}{2m}(p_1^2 + p_2^2) - \frac{\alpha}{r}$$

dove $\alpha > 0$, $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1$. Nel centro di massa del sistema le due particelle hanno funzione d'onda spinoriale normalizzata

$$\psi = af_a(r)\chi_1 + bf_b(r)Y_1^0(\theta,\phi)\chi_2,$$

dove le funzioni $f_a(r)$ e $f_b(r)$ sono normalizzate secondo

$$\int_0^\infty r^2 dr\,|f_{a,b}|^2 = 1$$

ed r, θ e ϕ sono le coordinate sferiche del vettore $\boldsymbol{r}$. Gli spinori χ_1 e χ_2 sono entrambi autovettori normalizzati di S_z con autovalore 0, dove $\boldsymbol{S} = \boldsymbol{S}_1 + \boldsymbol{S}_2$ è lo spin totale. Si assuma che a e b siano numeri reali positivi.

a) Si calcolino a e b sapendo che la probabilità di misurare $S^2 = 2\hbar^2$ è 1/3. Nei punti successivi si assuma che a e b soddisfino questa condizione.

b) Sapendo che una misura di H sugli stati ψ fornisce sempre un risultato inferiore a $-E_\alpha/20$, e che $\langle\psi|H|\psi\rangle = -E_\alpha/8$, si determinino tutte le possibili funzioni $f_a(r)$ e $f_b(r)$. La costante E_α è data da $E_\alpha = m\alpha^2/\hbar^2$,

c) Si calcoli l'evoluto $\psi(t)$, con $\psi(t=0) = \psi$ e si calcoli $\zeta(t) = \langle\psi(t)|z^2|\psi(t)\rangle$. Si mostri che $\zeta(t)$ è periodica e se ne calcoli il periodo.

Integrali utili. Se a_0 è il raggio di Bohr e $R_{n\ell}(r)$ sono le autofunzioni radiali normalizzate per il problema Coulombiano, definiamo:

$$I_{n,\ell_1,m,\ell_2} \;=\; \int_0^\infty dr\, r^2 (r/a_0)^2 R_{n\ell_1}(r) R_{m\ell_2}(r);$$

vale $I_{1,0,1,0} = 3$, $I_{1,0,2,0} = -512\sqrt{2}/243$, $I_{2,0,2,0} = 42$, $I_{1,0,2,1} = 1280\sqrt{2}/(243\sqrt{3})$, $I_{2,0,2,1} = -20\sqrt{3}/243$, $I_{2,1,2,1} = 30$.

ESERCIZIO 1

Calcoliamo la matrice associata ad H nella base $|+;z\rangle \to (1,0)$, $|-;z\rangle \to (0,1)$

A questo fine dobbiamo calcolare $|\pm;x\rangle$

Si ha $S_x = \frac{\hbar}{2}\sigma_x$ con autoval. $\pm \hbar/2$

(1) Autoval $+\hbar/2$

$$\frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \qquad \begin{cases} b = a \\ a = b \end{cases} \qquad |+;x\rangle = (a,a)$$

La condizione di normalizzazione dà $a = \frac{1}{\sqrt{2}}$ (con scelta di fase)

$$|+;x\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

(2) Autoval $-\hbar/2$

$$\frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = -\frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \qquad \begin{cases} b = -a \\ a = -b \end{cases} \qquad |-;x\rangle = (a,-a)$$

$a = \frac{1}{\sqrt{2}}$ per normalizzazione $\quad |-;x\rangle = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

Quindi

$$\langle +;z|H|+;z\rangle = b\,\langle +;z\overset{1/\sqrt{2}}{|}+;x\rangle\langle -;x\overset{1/\sqrt{2}}{|}+;z\rangle - \frac{a}{4}$$

$$= \frac{b}{2} - \frac{a}{4}$$

$$\langle +|z|H|-;z\rangle = b\langle +;z|+;x\rangle\langle -;x|-;z\rangle + a$$

$$= a - \frac{b}{2}$$

$$\langle -,z|H|+;z\rangle = b\langle -;z|+;x\rangle\langle -;x|+;z\rangle = \frac{b}{2}$$

$$\langle -z|H|-;z\rangle = b\langle -;z|+;x\rangle\langle -;x|-;z\rangle = -\frac{b}{2}$$

②

$$H = \begin{pmatrix} \frac{b}{2} - \frac{a}{4} & a - \frac{b}{2} \\ \frac{b}{2} & -\frac{a}{2} \end{pmatrix}$$

(a) La hermiticità impone

$$\begin{cases} \left(\frac{b}{2} - \frac{a}{4}\right)^* = \left(\frac{b}{2} - \frac{a}{4}\right) \\ \left(-\frac{a}{2}\right)^* = \left(-\frac{a}{2}\right) \\ \left(a - \frac{b}{2}\right) = \left(\frac{b}{2}\right)^* \end{cases}$$

→ a e b sono reali

$\left(a - \frac{b}{2}\right) = \left(\frac{b}{2}\right)^* \rightarrow \quad a - \frac{b}{2} = \frac{b}{2} \qquad a = b \qquad \frac{a}{b} = 1$

(b) Se $a = b$

$$H = \begin{pmatrix} a/4 & a/2 \\ a/2 & -a/2 \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1/4 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{pmatrix} = a\hat{H}$$

$$\det(\hat{H} - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} 1/4 - \lambda & 1/2 \\ 1/2 & -\frac{1}{2} - \lambda \end{pmatrix} = \left(\frac{1}{4} - \lambda\right)\left(-\frac{1}{2} - \lambda\right) - \frac{1}{4}$$

$$= -\frac{1}{8} - \frac{\lambda}{4} + \frac{\lambda}{2} + \lambda^2 - \frac{1}{4} =$$

$$= \lambda^2 + \frac{\lambda}{4} - \frac{3}{8} = \frac{8\lambda^2 + 2\lambda - 3}{8}$$

$$(8\lambda^2 + 2\lambda - 3) = 0 \qquad \lambda = \frac{-1 \pm \sqrt{1+24}}{8} = \frac{-1 \pm 5}{8} = \begin{cases} -3/4 \\ 1/2 \end{cases}$$

$$E_1 = -\frac{3a}{4} \qquad E_2 = \frac{a}{2}$$

(1) autovettore con energia $E_1 = -\frac{3a}{4}$

$$\begin{pmatrix} 1/4 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{a} \\ b \end{pmatrix} = \left(-\frac{3}{4}\right) \begin{pmatrix} \tilde{a} \\ b \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} \frac{\tilde{a}}{4} + \frac{b}{2} = -\frac{3}{4}\tilde{a} \\ \frac{\tilde{a}}{2} - \frac{b}{2} = -\frac{3b}{4} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{b}{2} = -\tilde{a} \\ \frac{\tilde{a}}{2} = -\frac{b}{4} \end{cases} \qquad b = -2\tilde{a} \qquad |v\rangle = (\tilde{a}, -2\tilde{a})$$

$$\langle v|v\rangle = |\tilde{a}|^2 + 4|\tilde{a}|^2 \Rightarrow |\tilde{a}| = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$\left|-\frac{3}{4}a\right\rangle = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$$

(2) autovett. con $E_2 = +\frac{a}{2}$

$$\begin{pmatrix} 1/4 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \tilde{a} \\ b \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \tilde{a} \\ b \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} \frac{\tilde{a}}{4} + \frac{b}{2} = \frac{\tilde{a}}{2} \\ \frac{\tilde{a}}{2} - \frac{b}{2} = \frac{b}{2} \end{cases} \qquad \frac{b}{2} = \frac{\tilde{a}}{4} \qquad \frac{\tilde{a}}{2} = b$$

$$|v\rangle = \left(\tilde{a}, \frac{\tilde{a}}{2}\right) \qquad \langle v|v\rangle = |\tilde{a}|^2 + \frac{1}{4}|\tilde{a}|^2 = \frac{5}{4}|\tilde{a}|^2 \qquad |\tilde{a}| = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$\left|\frac{a}{2}\right\rangle = \left(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$$

c)

Decomponiamo lo stato in termini degli autostati di H

$$\left\langle +;z \middle| -\frac{3}{4}a\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{5}} \qquad \left\langle +;z \middle| \frac{a}{2}\right\rangle = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$|+;z\rangle = \frac{1}{\sqrt{5}}\left|-\frac{3}{4}a\right\rangle + \frac{2}{\sqrt{5}}\left|\frac{a}{2}\right\rangle$$

Valori ottenibili in una misura: $\frac{a}{2}$, $-\frac{3a}{4}$

$$\text{Prob}\left(E = -\frac{3a}{4}\right) = \frac{1}{5} \qquad \text{Prob}\left(E = \frac{a}{2}\right) = \frac{4}{5}$$

elemento (1,1) della matrice di H

$$\langle +;z|H|+;z\rangle = H_{11} = \frac{a}{4}$$

CHECK:

$$\langle +;z|H|+;z\rangle = \frac{1}{5}\left(-\frac{3a}{4}\right) + \frac{4}{5}\left(\frac{a}{2}\right) = -\frac{3a}{20} + \frac{2a}{5} = \frac{a}{20}(-3+8) = \frac{a}{4}$$

ok

(d)

$$|\psi(t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{5}} \exp\left(+ \frac{it}{\hbar}\frac{3}{4}a\right)\left|-\frac{3}{4}a\right\rangle$$

$$+ \frac{2}{\sqrt{5}} \exp\left(- \frac{it}{\hbar}\frac{a}{2}\right)\left|\frac{a}{2}\right)$$

Se $\omega = \frac{1}{\hbar}\left(\frac{a}{2} + \frac{3a}{4}\right) = \frac{5a}{4\hbar}$

$$|\psi(t)\rangle \overset{\text{(a meno di fase)}}{=} \frac{1}{\sqrt{5}}\left|-\frac{3}{4}a\right\rangle + \frac{2}{\sqrt{5}} e^{-i\omega t}\left|\frac{a}{2}\right\rangle$$

e)

$$\text{Prob}\left(S_z = -\frac{\hbar}{2}\right) = \left|\langle -; z|\psi(t)\rangle\right|^2$$

Ora

$$\langle -; z|\psi(t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{5}}\left\langle -; z\middle|-\frac{3}{4}a\right\rangle + \frac{2}{\sqrt{5}}\left\langle -z\middle|\frac{a}{2}\right\rangle e^{-i\omega t}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(-\frac{2}{\sqrt{5}}\right) + \frac{2}{\sqrt{5}}\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right) e^{-i\omega t}$$

$$= -\frac{2}{5} + \frac{2}{5}e^{-i\omega t} = -\frac{2}{5}\left(1 - e^{-i\omega t}\right)$$

$$\text{Prob}\left(S_z = -\frac{\hbar}{2}\right) = \frac{4}{25}\left|1 - e^{-i\omega t}\right|^2$$

$$= \frac{4}{25}\left(2 - 2\cos\omega t\right) = \frac{8}{25}\left(1 - \cos\omega t\right)$$

$$= \frac{8}{25}\left(1 - \cos\frac{5at}{4\hbar}\right)$$

①

a) Riscriviamo la funzione d'onda come

$$\psi = a\sqrt{4\pi}\, f_a(r)\, Y_0^0\, \chi_1 + b\, f_b(r)\, Y_1^0\, \chi_2 \qquad \left[Y_0^0 = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}\right]$$

Per il principio di Pauli la funzione d'onda deve essere dispari sotto scambio $\vec{r} = \bar{r}_2 - \bar{r}_1 \to -\vec{r} = \bar{r}_1 - \bar{r}_2$

Dato che sotto scambio (parità) $Y_0^0 \to Y_0^0$, $Y_1^0 \to -Y_1^0$ la funzione di spin χ_1 deve essere dispari e χ_2 pari sotto scambio. Quindi χ_1 è autofunzione di S^2 con autovalore 0, χ_2 autofunzione di S^2 con autovalore $2\hbar^2$ ($S=1$). Quindi

$$\psi = a\sqrt{4\pi}\, f_a(r)\, Y_0^0\, |\underset{S}{0}\ \underset{S_z}{0}\rangle + b\, f_b(r)\, Y_1^0\, |\underset{S}{1}\ \underset{S_z}{0}\rangle$$

$$\psi_a(r,\theta,\varphi) = f_a(r)\, Y_0^0$$
$$\psi_b(r,\theta,\varphi) = f_b(r)\, Y_1^0$$

sono normalizzate $\int d^3r\, |\psi_{a,b}|^2 = 1$

Quindi

$$\langle\psi|\psi\rangle = 1 \implies |a|^2 4\pi + |b|^2 = 1 \quad \rightarrow \quad 4\pi|a|^2 = \frac{2}{3}$$

$$\text{Prob}\,(S^2 = 2\hbar^2) = \frac{1}{3} \implies |b|^2 = \frac{1}{3}$$

$$a = \frac{1}{\sqrt{6\pi}} \qquad b = \frac{1}{\sqrt{3}} \qquad (a, b \text{ reali positivi})$$

b) Calcoliamo lo spettro di H_0

Nel CM: $H_0 = \frac{1}{2\mu}p^2 - \frac{\alpha}{r}$ $\qquad \mu = \frac{m}{2}$

Quindi (spettro coulombiano)

$$E_n = -\frac{1}{2}\frac{\alpha^2\mu}{\hbar^2}\frac{1}{n^2} = -\frac{\bar{E}_\alpha}{4}\frac{1}{n^2}$$

I primi livelli sono

$$E_1 = -\frac{E_\alpha}{4} \qquad E_2 = -\frac{E_\alpha}{16} \qquad E_3 = -\frac{E_\alpha}{36}$$

Dato che una misura di E_α fornisce sempre un risultato minore di $-E_\alpha/20$, ψ deve essere combinazione degli stati Coulombiani con $n=1,2$.

$f_a Y_0^0$ ha $L^2=0$, $L_z=0$ e quindi deve essere combinazione degli stati con $l=0$ che sono due; il livello $n=1$ e lo stato $l=0$ del livello $n=2$. Quindi

$$f_a = A R_{10}(r) + B R_{20}(r)$$

$$\int |f_a|^2 r^2 dr = |A|^2 \int R_{10}^2 r^2 dr + |B|^2 \int R_{20}^2 r^2 dr = |A|^2 + |B|^2 = 1$$

$f_b Y_1^0$ ha $L^2 = 2\hbar$, $L_z=0$. Vi è una sole possibilità

$$f_b = R_{21}(r) e^{i\alpha}$$

Quindi

$$\psi = \sqrt{\frac{2}{3}}\left[A R_{10}(r) + B R_{20}(r)\right] Y_0^0 |\overset{S}{0}\,\overset{S_z}{0}\rangle + \sqrt{\frac{1}{3}}\, e^{i\alpha} R_{21} Y_1^0 |1\,0\rangle$$

$$H\left[R_{10} Y_0^0\right] = -\frac{E_\alpha}{4} \qquad (n=1)$$

$$H\left[R_{20} Y_0^0\right] = -\frac{E_\alpha}{16} \qquad (n=2)$$

$$H\left[R_{21} Y_1^0\right] = -\frac{E_\alpha}{16} \qquad (n=2)$$

Quindi

$$\langle\psi|H_0|\psi\rangle = \frac{2}{3}|A|^2\left(-\frac{E_\alpha}{4}\right) + \frac{2}{3}|B|^2\left(-\frac{E_\alpha}{16}\right) + \frac{1}{3}\left(-\frac{E_\alpha}{16}\right)$$

$$= -E_\alpha\left[\frac{1}{6}|A|^2 + \frac{1}{24}|B|^2 + \frac{1}{48}\right]$$

Quindi

$\langle\psi_0|H|\psi_0\rangle = -\frac{E_d}{8} \Longrightarrow$

$$\frac{|A|^2}{6} + \frac{|B|^2}{24} + \frac{1}{48} = \frac{1}{8}$$

$$8|A|^2 + 2|B|^2 + 1 = 6$$

$$8|A|^2 + 2|B| = 5 \qquad \text{Ora} \qquad |B|^2 = 1 - |A|^2$$

$$6|A|^2 + 2 = 5 \qquad |A|^2 = \frac{1}{2} \qquad |A| = \frac{1}{\sqrt{2}} \qquad |B| = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Quindi $A = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\beta}$ $\quad B = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\gamma}$

Abbiamo

$$\psi = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(e^{i\beta} R_{10} Y_0^0 + e^{i\gamma} R_{20} Y_0^0\right)|00\rangle + \frac{1}{\sqrt{3}} e^{i\alpha} R_{21} Y_1^0 |10\rangle$$

Vi sono tre fasi arbitrarie. Possiamo eliminarne UNA (e solo UNA). Poniamo $\beta = 0$

c)

$$\psi = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(e^{-iE_1 t/\hbar} R_{10} Y_0^0 + e^{i\gamma} e^{-iE_2 t/\hbar} R_{20} Y_0^0\right)|00\rangle$$
$$+ \frac{1}{\sqrt{3}} e^{i\alpha} e^{-iE_2 t/\hbar} R_{21} Y_1^0 |10\rangle$$

Calcoliamo $\langle\psi|z^2|\psi\rangle = \langle\psi|r^2\cos^2\theta|\psi\rangle$

$$\langle\psi|z^2|\psi\rangle = \frac{1}{3}\int dr\, r^2 \left|e^{-iE_1 t/\hbar} R_{10} + e^{i\gamma} e^{-iE_2 t/\hbar} R_{20}\right|^2 r^2 \times$$
$$\int d\Omega\, |Y_0^0|^2 \cos^2\theta$$
$$+ \frac{1}{3}\int dr\, r^2 R_{21}^2 r^2 \int d\Omega |Y_1^0|^2 \cos^2\theta$$

Ora

$$\int d\Omega\, |Y_0^0|^2 \cos^2\theta = \frac{1}{4\pi} \overset{[\text{int in } \phi]}{\overset{\downarrow}{2\pi}} \int_{-1}^{1} dx\, x^2 = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3} = \frac{1}{3} \quad [x = \cos\theta]$$

$$\int d\Omega\, |Y_0^1|^2 \cos^2\theta = \frac{3}{4\pi}\int d\Omega \cos^4\theta = \frac{3}{4\pi} \underset{[\text{int in } \phi]}{\underset{\uparrow}{2\pi}} \int dx\, x^5 = \frac{3}{2}\cdot\frac{2}{5} = \frac{3}{5}$$

$$\langle\psi|z^2|\psi\rangle = \frac{1}{3}\int_0^\infty dr\, r^4 \left| R_{10} + e^{i\gamma} e^{i(E_1-E_2)t/\hbar} R_{20} \right|^2 \cdot \frac{1}{3}$$

$$+ \frac{1}{3}\int_0^\infty dr\, r^4 R_{21}^2 \cdot \frac{3}{5}$$

$$= \frac{1}{9}\int_0^\infty dr\, r^4 \left(R_{10}^2 + R_{20}^2 + 2\cos\left(\gamma + \frac{(E_1-E_2)t}{\hbar}\right) R_{10} R_{20} \right)$$

$$+ \frac{1}{5}\int_0^\infty dr\, r^4 R_{21}^2$$

$$= \frac{1}{9} a_0^2 \left[3 + 42 + 2\left(-\frac{512\sqrt{2}}{243}\right) \cos\left(\gamma + \frac{E_1-E_2}{\hbar} t\right) \right]$$

$$+ \frac{1}{5} \cdot 30\, a_0^2$$

$$= 11\, a_0^2 - \frac{1024}{243 \cdot 9} \sqrt{2}\, a_0^2 \cos\left(\gamma + \frac{E_1-E_2}{\hbar} t\right)$$

Ora definiamo $\omega_\alpha = \frac{E_2 - E_1}{\hbar} = -\frac{E_\alpha}{16\hbar} + \frac{E_\alpha}{4\hbar} = \frac{3E_\alpha}{16\hbar}$

Quindi

$$\cos\left(\gamma + \frac{E_1-E_2}{\hbar} t\right) = \cos(\omega_\alpha t - \gamma)$$

Quindi $T = \frac{2\pi}{\omega_\alpha} = \frac{32\pi\hbar}{3E_\alpha}$