CAPITOLO 10

Area di una superficie

1. Introduzione

La definizione di area di una superficie curva contiene, ampliate le difficoltá incontrate nel parlare di lunghezza di una curva (che non coincida con un segmento)[1].
Nel caso unidimensionale si é proceduto

- considerando le poligonali inscritte nella curva
- calcolandone (si tratta di segmenti) la lunghezza
- considerando l'estremo superiore di tali lunghezze.

Nel caso di una superficie il procedimento suggerirebbe, per analogia,

- di considerare poliedriche (a faccette triangolari) inscritte nella superficie
- di calcolare le aree di tali poliedriche (si tratta di sommare le aree dei triangoli che le compongono,
- di considerare l'estremo superiore di tali aree...

Ahimé ! Tale estremo superiore é molto spesso $+\infty$.
Si tratta dell'effetto *fisarmonica* o *nido d'ape*: la possibilitá di inscrivere in superfici anche abbastanza piccole delle poliedriche di superfici estesissime (si pensi all'utile alettatura dei cilindri dei motori da raffreddare ad aria):

- il soffietto della fisarmonica puó essere pensato come una poliedrica inscritta nel parallelepipedo determinato dai due lati rigidi della fisarmonica, le due tastiere.
  Quant'é l'area del soffietto ?
  Lavorando con una stoffa sottile si potrebbero realizzare soffietti estesissimi...
- il nido d'ape, le miriadi di cellette attaccate al modesto pannello dell'arnia hanno una incredibile superficie, del resto adatta al deposito del miele..

2. Un esempio importante

Consideriamo la superficie laterale del cilindro circolare di raggio 1 e altezza 1: un foglio rettangolare $2\pi \times 1$ arrotolato appena...
Scopriremo che é possibile inscrivere in tale semplicissima superficie una poliedrica a faccette triangolari, una sorte di nido d'ape, molto vicina alla superficie cilindrica e tuttavia di area estesissima.

- dividiamo la superficie cilindrica con m tagli orizzontali equidistanti,
  $$z = 1/m, z = 2/m, ...z = (m-1)/m,$$
- dividiamo ciascuna delle circonferenze in n parti uguali

[1] Courant, Volume II, pag. 421

  - $\theta = (2\pi)/n, \theta = (4\pi)/n, ..., \theta = 2(n-1)\pi/n$, la prima
  - $\theta = (2\pi)/n + \pi/n, \theta = (4\pi)/n + \pi/n, ..., \theta = 2(n-1)\pi/n + \pi/n$, la seconda,
  - e cosí proseguendo con tale mezzo sfasamento tra ciascuna circonferenza e la successiva,
- consideriamo i triangolini determinati da due punti di suddivisione consecutivi di una circonferenza e quello intermedio tra essi di una delle due circonferenze adiacenti sopra o sotto.

Si costruiscono in questo modo $2n\,m$ triangolini tutti uguali, quindi tutti della stessa area. Consideriamone uno in particolare, di vertici

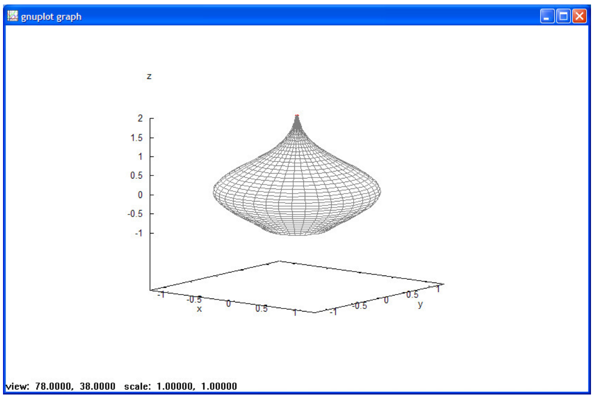

FIGURA 1. Uno dei triangolini inscritti nella superficie cilindrica, $n = 6$.

$$A = \left\{\cos\left(-\frac{\pi}{n}\right), \sin\left(-\frac{\pi}{n}\right), 0\right\}, \quad B = \left\{\cos\left(\frac{\pi}{n}\right), \sin\left(\frac{\pi}{n}\right), 0\right\},$$

$$C = \left\{1,\, 0,\, \frac{1}{m}\right\}$$

vedi Figura 1,

Per calcolare l'area di $\triangle_{ABC}$ consideriamo

- la base $\overline{AB} = 2\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)$
- l'altezza $\overline{CH} = \sqrt{\left(\frac{1}{m}\right)^2 + \left(1-\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)\right)^2}$

da cui

$$Area(\triangle_{ABC}) = \sin\left(\frac{\pi}{n}\right)\sqrt{\left(\frac{1}{m}\right)^2 + \left(1-\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)\right)^2}$$

Moltiplicando per il numero $2nm$ di tutti i triangolini inscritti nella superficie cilindrica si raggiunge un area

$$\mathcal{A} = 2\,n\,m\,\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)\sqrt{\left(\frac{1}{m}\right)^2 + \left(1-\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)\right)^2}$$

ovvero, con semplici passaggi algebrici

$$\mathcal{A} = 2\,\pi\frac{\sin(\pi/n)}{\pi/n}\sqrt{1+m^2\left(1-\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)\right)^2} \tag{63}$$

Se si prendesse, ad esempio $n = m$ allora, passando al limite nella precedente (63) si otterrebbe

$$\lim_{n\to\infty} \mathcal{A} = 2\pi,$$

perfettamente in accordo con quanto atteso.
Pensiamo invece a scelte di m ed n indipendenti: tenuto conto che

$$\frac{\sin(\pi/n)}{\pi/n} \approx 1, \quad m^2 \left(1 - \cos\left(\frac{\pi}{n}\right)\right)^2 \approx \frac{\pi^4}{4}\frac{m^2}{n^4}$$

si capisce che si possono ottenere valori di $\mathcal{A}$ comunque grandi: basta prendere $m = k\,n^2$ con k via via piú grande....[2]

OSSERVAZIONE 2.1. *Un'osservazione....*
Aumentare m cioé le suddivisioni orizzontali del cilindro produce triangolini $\triangle_{ABC}$ che giacciono su piani sempre piú lontani *dai piani tangenti alla superficie:*

- *quasi orizzontali i piani per $A\,B\,C$*
- *verticali i piani tangenti al cilindro.*

É proprio tale difformitá di giacitura a produrre tanto divario in termini di aree tra superficie cilindrica e poliedrica inscritta...
Pensate alle alettature dei cilindri dei motori delle motociclette raffreddati ad aria...

3. Il caso cartesiano

Limitiamoci a una superficie grafico

$$z = f(x, y)$$

3.1. Dichiarazioni senza dimostrazione.

- La lunghezza di una curva regolare coincide con l'estremo inferiore delle lunghezze delle poligonali tangenti[3]
- L'area di una superficie é in modo simile, l'estremo inferiore delle aree delle poliedriche triangolari tangenti alla superficie.

Indicate con Δ_n le aree dei triangolini in cui abbiamo suddiviso Ω e con τ_n le aree delle faccette tangenti alla superficie corrispondenti si ha

$$\Delta_n = \tau_n \times |\nu_z|$$

essendo $|\nu_z|$ il modulo della componente z del versore normale alla superficie.

$$\overrightarrow{\nu} = \frac{1}{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}} \{f_x(x, y),\ f_y(x, y),\ -1\} \tag{64}$$

OSSERVAZIONE 3.1. *Giustificazione della (64)*
Consideriamo, ad esempio il parallelepipedo $L \times P \times H$ di Figura 2 : tagliamolo con un piano $z = 1 + m\,y$, ($m = 1/2$ in Figura) e valutiamo l'area della parte superiore obliqua frutto del taglio.
Si tratta di un rettangolo con un lato ancora L e l'altro, piú lungo ℓ tale che

$$\ell\,\cos(\alpha) = P$$

[2]Courant John, Vol. II, Appendice A.4, pag. 540
[3]Courant John, Vol. II pag, 422, 423