Per risolvere un' eq^{ne} nei complessi, quali coordinate usare ?

$$z = x+iy \quad \text{oppure} \quad z = \underset{\overset{\shortparallel}{|z|}}{\rho}\, e^{i\varphi} \quad ?$$

In linea di massima:

- Coordinate cartesiane se ci sono prevalentemente somme/differ.

  es. $z + \bar{z} - 3\,\mathrm{Im}(z) = z^2 + |z|$

- Coordinate polari se ci sono prevalentemente potenze

  es. $|z|^3 \bar{z}^3 = 64i$

TEOR. FONDAMENTALE DELL'ALGEBRA

Un polinomio $P_n(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0 =$

$$= \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$$

dove $a_0, a_1, \ldots a_n \in \mathbb{C}$, con $a_n \neq 0$ ammette sempre una radice complessa, cioè un numero $z_1 \in \mathbb{C}$ t.c. $P_n(z_1) = 0$

Ne segue che $P_n(z)$ ammette n radici complesse $z_1, z_2 \ldots z_n$ t.c.

$$P_n(z) = a_n (z-z_1)(z-z_2)\ldots(z-z_n)$$

Tali radici possono anche coincidere tra loro; il teorema si può enunciare così

"Un polinomio di grado n ammette sempre n radici complesse, contate con la loro molteplicità"

OSS Il risultato è falso nei reali. Il polinomio $P_n(x) = x^2+1$ è irriducibile nei reali, mentre è scomponibile

$$P_n(z) = z^2+1 = (z-i)(z+i)$$

Risolvere l'eq.ne $z^6+2z^3+2=0$

Per trovarle, poniamo $z^3=t$, l'eq.ne diventa

$$t^2+2t+2=0$$

Applichiamo la consueta formula:

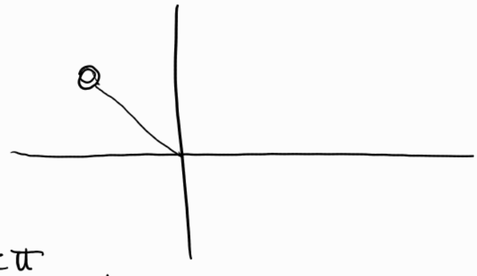
$$t_{1,2} = -1\pm\sqrt{1-2} = -1\pm\sqrt{-1} = -1\pm i$$

le due radici di -1

anche così
$$t^2+2t+2=(t^2+2t+1)+1=(t+1)^2+1=0$$
$$t+1=\pm i$$

Abbiamo trovato $(z^3=-1+i)\vee(z^3=-1-i)$

Risolvo $z^3=-1+i=\sqrt{2}\,e^{i\frac{3}{4}\pi}$



$$z_k=\sqrt[6]{2}\,e^{i\varphi_k},$$

$$\varphi_k=\frac{\frac{3\pi}{4}+2k\pi}{3}=\frac{\pi}{4}+\frac{2k\pi}{3}\qquad k=0,1,2.$$

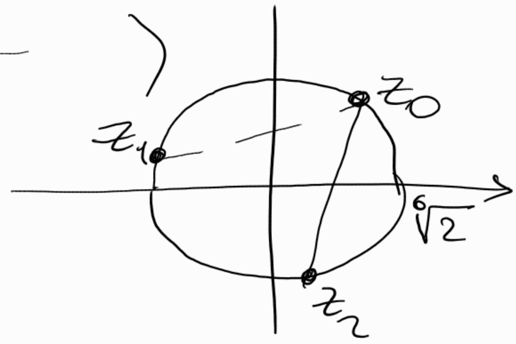
$$z_0=\sqrt[6]{2}\,e^{i\frac{\pi}{4}}=\sqrt[6]{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{i}{\sqrt{2}}\right)=\frac{1}{\sqrt[3]{2}}(1+i)$$

$$z_1=\sqrt[6]{2}\,e^{i\frac{11}{12}\pi}=$$

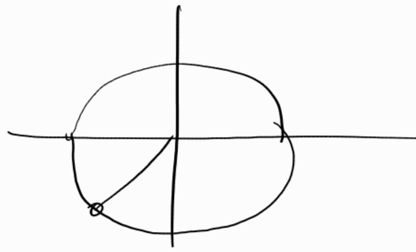
$$\frac{\pi}{4}+\frac{2}{3}\pi=\frac{3+8}{12}\pi$$

$$=\sqrt[6]{2}\left(\cos\left(\frac{11}{12}\pi\right)+i\sin\left(\frac{11}{12}\pi\right)\right)$$

$$z_2=\sqrt[6]{2}\,e^{i\frac{19}{12}\pi}=\sqrt[6]{2}\,\big(\cos\ \text{———}\ \big)$$



Risolvo $\quad z^3 = -1-i = \sqrt{2}\, e^{i\frac{5}{4}\pi}$



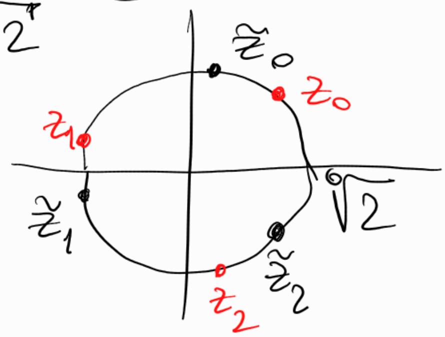
$$\tilde{z}_k = \sqrt[6]{2}\, e^{i\tilde{\varphi}_k} \qquad \tilde{\varphi}_k = \frac{\frac{5}{4}\pi + 2k\pi}{3} =$$

$$= \frac{5}{12}\pi + \frac{2k\pi}{3} \qquad k = 0,1,2$$

$$\tilde{z}_0 = \sqrt[6]{2}\, e^{i\frac{5}{12}\pi} = \sqrt[6]{2}\left(\cos\left(\frac{5}{12}\pi\right) + i\sin\left(\frac{5}{12}\pi\right)\right)$$

$$\tilde{z}_1 = \sqrt[6]{2}\, e^{i\frac{13}{12}\pi} = \quad " \quad " \quad "$$

$$\tilde{z}_2 = \sqrt[6]{2}\, e^{i\frac{21}{12}\pi} = \sqrt[6]{2}\, e^{i\frac{7}{4}\pi} = \frac{\sqrt[6]{2}}{\sqrt{2}}(1-i)$$



Conseguenze del Teor. Fond. dell'Algebra sui polinomi reali.

Sia $P_n(x)$ un polinomio a coeff^{ti} reali:

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$$

$$a_0, a_1, \dots a_n \in \mathbb{R}, \quad a_n \neq 0, \quad x \in \mathbb{R}.$$

"Complessifichiamo il problema". Considero lo stesso polinomio ma nella variabile complessa

$$P_n(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0$$

a_k sono reali come prima, $\quad z \in \mathbb{C}$.

Questo polinomio ammetterà n radici complesse (contate con la loro molteplicità).

Voglio provare il ~~se~~ seguente lemma:

LEMMA Se il polinomio è a coeff^{ti} reali, allora,

se $z_1 = x_1 + iy_1$ è radice del polinomio, allora anche $\overline{z_1} = x_1 - iy_1$ è radice del polinomio.

DIM. $P_n(z_1) = 0$ per ipotesi. Voglio provare che $P_n(\overline{z_1}) = 0$

Dall'ipotesi si ottiene

$$0 = \overline{0} = \overline{P_n(z_1)} = \overline{\left(a_n z_1^n + a_{n-1} z_1^{n-1} + \dots + a_1 z_1 + a_0\right)} =$$

$$= \overline{a_n}\left(\overline{z_1}\right)^n + \overline{a_{n-1}}\ \overline{z_1}^{\,n-1} + \dots + \overline{a_1}\,\overline{z_1} + \overline{a_0}$$

(i coeff^{ti} a_k sono reali $\Longrightarrow$ $\overline{a_k} = a_k$)

$$= a_n\left(\overline{z_1}\right)^n + a_{n-1}\left(\overline{z_1}\right)^{n-1} + \dots + a_1 \overline{z_1} + a_0$$

$$= P_n\left(\overline{z_1}\right) \qquad \square$$

Ne segue che le radici complesse di un polinomio a coeff^{ti} reali possono essere:

o reali. oppure coppie di complessi coniugate.

$$\Rightarrow P_n(z) = a_n (z - z_1)(z - z_2) \dots (z - z_n)$$

Supponiamo per esempio che $z_2 = \overline{z_1}$

$$z_1 = x_1 + iy_1 \ , \quad z_2 = \overline{z_1} = x_1 - iy_1$$

$$(z - z_1)(z - \overline{z_1}) = ((z - x_1) - iy_1)((z - x_1) + iy_1) =$$

$[(A-B)(A+B)=A^2-B^2$ anche nei complessi$]$

$$= (z-x_1)^2+y_1^2 = \underbrace{z^2-2x_1 z + x_1^2+y_1^2}_{\text{polinomio di 2° grado a coeff}^{\text{ti}} \text{ reali}} = z^2+\alpha z+\beta \quad \alpha,\beta\in\mathbb{R}$$

Quindi

$$P_n(z) = a_n (z-z_1)(z-z_2)(z-z_3)\dots \qquad (z-z_n)$$

alcuni di questi fattori hanno coeff$^{\text{ti}}$ reali, altri sono "coppie coniugate" e si scrivono, come abbiamo visto, come polinomi di grado 2 a coeff$^{\text{ti}}$ reali

$$= a_n (z^2+\alpha_1 z+\beta_1)(z^2+\alpha_2 z+\beta_2)\dots(z^2+\alpha_k z+\beta_k)\dots$$

$$\dots (z-x_1)(z-x_2)\dots(z-x_m) \qquad \forall z\in\mathbb{C}$$

dove $2k+m=n$

Posso prendere $z=x\in\mathbb{R}$

$$P_n(x) = a_n (x^2+\alpha_1 x+\beta_1)\dots(x^2+\alpha_k x+\beta_k)(x-x_1)\dots(x-x_m) \quad \forall x\in\mathbb{R}$$

Abbiamo provato che: ogni polinomio reale si scompone in: • polinomi di grado 1 • polinomi di grado 2 irriducibili nei reali.

Scomporre (nei reali) $P_4(x) = x^4+16$.

1° modo (già fatto)

$$x^4+16 = (x^4+16+8x^2)-8x^2 = (x^2+4)^2-(2\sqrt{2}x)^2 =$$

$$= (x^2-2\sqrt{2}x+4)(x^2+2\sqrt{2}x+4)$$

2° modo (complessificando)

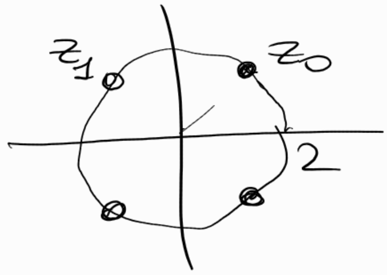
Voglio trovare le radici complesse di $P_4(z) = z^4 + 16$.

cioè risolvere $z^4 = -16 = 16\, e^{i\pi}$

$$z_k = 2\, e^{i\varphi_k} \qquad \varphi_k = \frac{\pi + 2k\pi}{4} = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}$$

$$k = 0, 1, 2, 3.$$

$$z_0 = 2 e^{i\frac{\pi}{4}} = \sqrt{2}\,(1+i)$$



$$z_1 = 2 e^{i\frac{3\pi}{4}} = \sqrt{2}\,(-1+i)$$

$$z_2 = 2 e^{i\frac{5\pi}{4}} = \sqrt{2}\,(-1-i) = \overline{z_1}$$

$$z_3 = 2 e^{i\frac{7\pi}{4}} = \sqrt{2}\,(1-i) = \overline{z_0}$$

$$z^4 + 16 = 1\,\underbrace{(z - z_0)(z - \overline{z_0})}\,\underbrace{(z - z_1)(z - \overline{z_1})} =$$

$$= \underbrace{\left((z - \sqrt{2}) - \sqrt{2}i\right)\left((z - \sqrt{2}) + \sqrt{2}i\right)}\,\underbrace{\left(z + \sqrt{2} - \sqrt{2}i\right)\left(z + \sqrt{2} + \sqrt{2}i\right)}$$

$$= \left((z - \sqrt{2})^2 + 2\right) \qquad \left((z + \sqrt{2})^2 + 2\right)$$

$$= (z^2 - 2\sqrt{2}z + 4)(z^2 + 2\sqrt{2}z + 4).$$

$z = x \in \mathbb{R}$

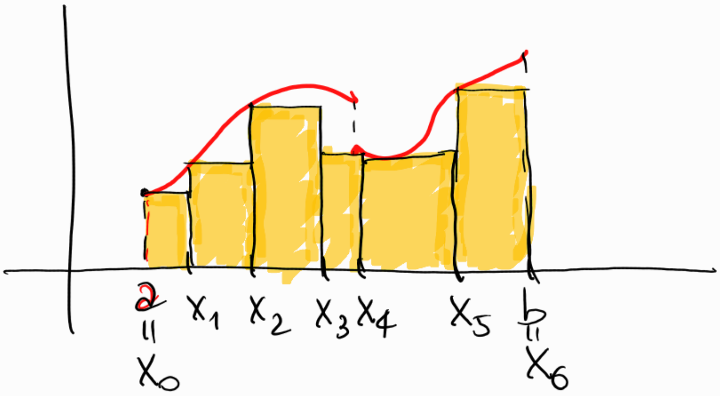
$$x^4 + 16 = (x^2 - 2\sqrt{2}x + 4)(x^2 + 2\sqrt{2}x + 4)$$

Esercizio: provare a fare la stessa cosa con

$$P_6(x) = x^6 + 64$$

Integrale di Riemann

Sia $f: [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ limitata, per semplicità $f \geq 0$



Partizione di $[a,b]$ =

$$= \mathbb{P} = \{x_0, x_1, x_2, \dots x_n : a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b\}$$

L'intervallo $[a,b]$ risulta diviso in n intervalli

$$[x_0, x_1], [x_1, x_2] \;\dots\; [x_{n-1}, x_n]$$

Fissata la partizione $\mathbb{P}$, considero la somma

$$s(\mathbb{P}) = \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1}) m_k$$

somma inferiore relativa alla partizione $\mathbb{P}$.

dove $m_k = \inf\limits_{[x_{k-1}, x_k]} f$