## Algoritmo di Erone per il calcolo di $\sqrt{A}$:

$$\begin{cases} a_0 \text{ fissato, con } a_0 > \sqrt{A} \\ a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{A}{a_n}\right) \end{cases}$$

Abbiamo visto che:

1) $a_n \searrow \sqrt{A}$

2) La convergenza è rapidissima, perché se l'errore è abbastanza piccolo

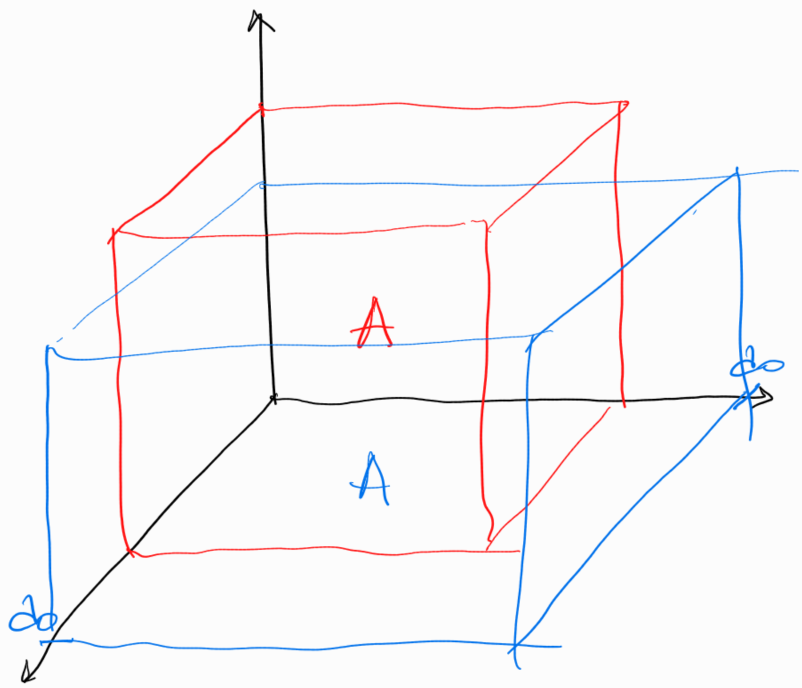
$$\varepsilon_n := \frac{|a_n - \sqrt{A}|}{\sqrt{A}}$$

$$\varepsilon_{n+1} \leq \frac{\varepsilon_n^2}{2}$$

---

Generalizzazioni:

Adattarlo per trovare $\sqrt[3]{A}$.




$$a_0 \cdot a_0 \cdot h = A$$

$$h = \frac{A}{a_0^2}$$

$$a_1 = \frac{1}{3}\left(a_0 + a_0 + \frac{A}{a_0^2}\right) = \frac{1}{3}\left(2a_0 + \frac{A}{a_0^2}\right)$$

$$a_2 = \frac{1}{3}\left(2a_1 + \frac{A}{a_1^2}\right)$$

Si giunge ad un algoritmo così definito

$$\begin{cases} a_0 \text{ fissato t.c. } a_0 > \sqrt[3]{A} \\ a_{n+1} = \frac{1}{3}\left(2a_n + \frac{A}{a_n^2}\right) \end{cases}$$

Si dimostra che 1) $a_n$ è decrescente e tende a $\sqrt[3]{A}$.

2) la velocità di convergenza è quadratica

$$\varepsilon_{n+1} \leq c\, \varepsilon_n^2$$

---

Questo algoritmo si può generalizzare al calcolo della radice k-esima di A.

$$\begin{cases} a_0 \text{ fissato t.c. } a_0 > \sqrt[k]{A} \\ a_{n+1} = \frac{1}{k}\left((k-1)a_n + \frac{A}{a_n^{k-1}}\right) \end{cases}$$

1) $a_n \downarrow \sqrt[k]{A}$

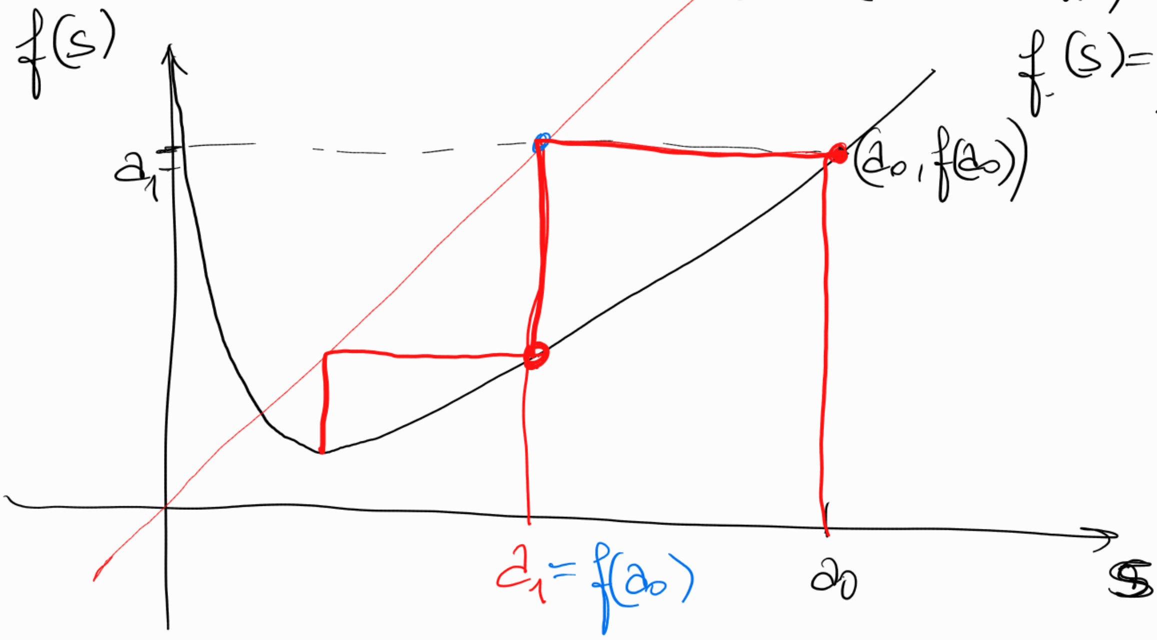
2) la convergenza è quadratica.

Come si può visualizzare il procedimento per il calcolo dell'algoritmo di Erone

Visualizzazione del processo:

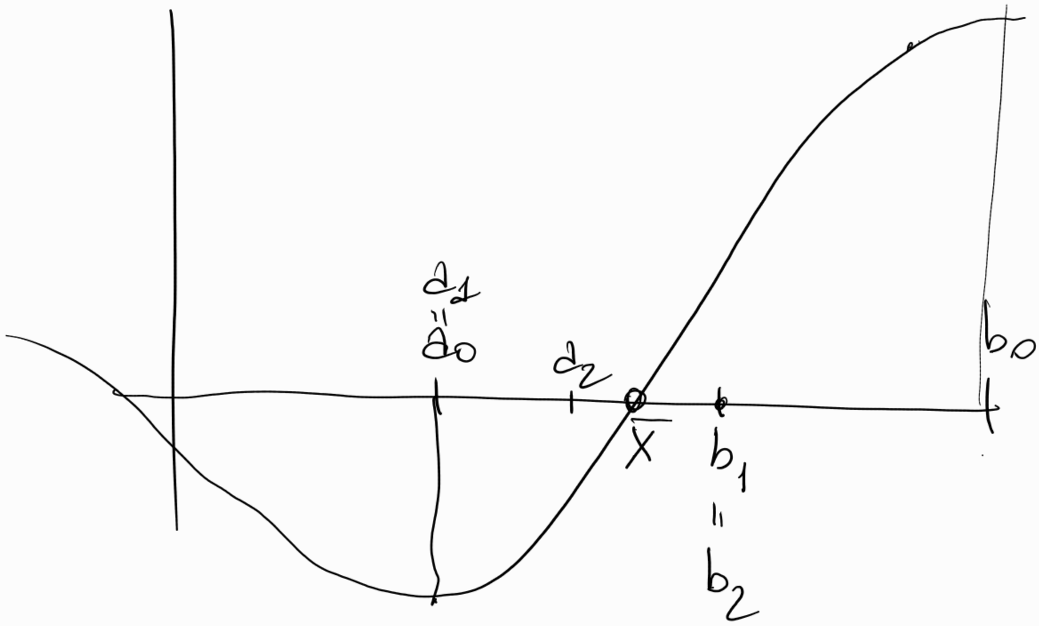
$$\begin{cases} a_0 & \text{fissato} \\ a_{n+1} = f(a_n) = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{A}{a_n}\right) \end{cases}$$

$f(s) = \frac{1}{2}\left(s + \frac{4}{s}\right)$



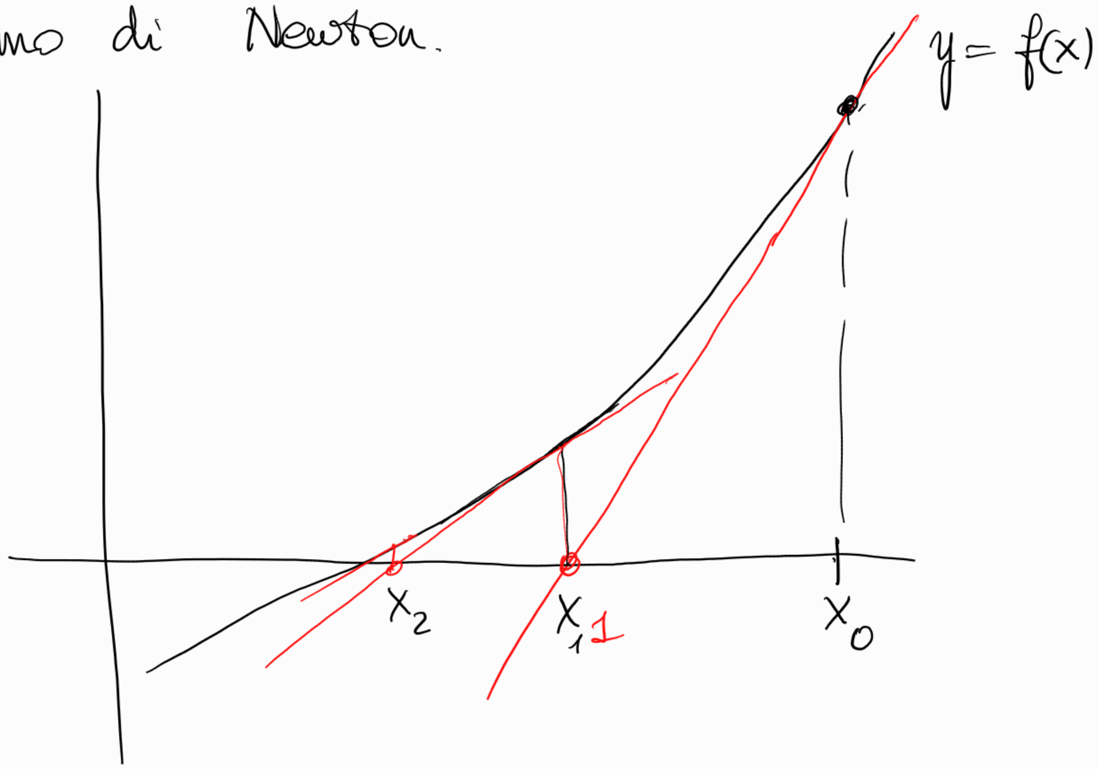

Altri algoritmi di approssimazione

Approssimazione degli zeri di una funzione.




1) Procedimento per bisezione dell'intervallo.

2) Algoritmo di Newton.




Retta tg. al grafico di $f$ in $(x_0, f(x_0))$

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

Intersezione con l'asse : $y = 0$

$$f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) = 0$$

Risolvo in $x$

$$x - x_0 = -\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

Pongo
$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$$

...

Resta definito l'algoritmo di Newton così definito

$$\begin{cases} x_0 \text{ fissato } \left(\text{abbastanza vicino a } \bar{x}, \text{ lo zero di } f \text{ che sto cercando}\right) \\ x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)} \end{cases}$$

Si può dimostrare il seguente risultato.

**TEOREMA (convergenza del metodo di Newton).**

Sia $I = [a,b]$, $f \in C^2(I)$

(cioè $f$ derivabile due volte in $I$ con derivate continue)

Supponiamo che $\bar{x} \in I$ t.c. $f(\bar{x}) = 0$

e che $f'(\bar{x}) \neq 0$.

Allora $\exists\ \bar{\varepsilon} > 0$ t.c. se $x_0 \in [\bar{x} - \bar{\varepsilon}, \bar{x} + \bar{\varepsilon}]$, la successione definita dal metodo di Newton

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \text{ verifica:}$$

1) La succ.ne $\{x_n\}$ converge a $\bar{x}$

2) L'errore $\varepsilon_n = |x_n - \bar{x}|$ verifica

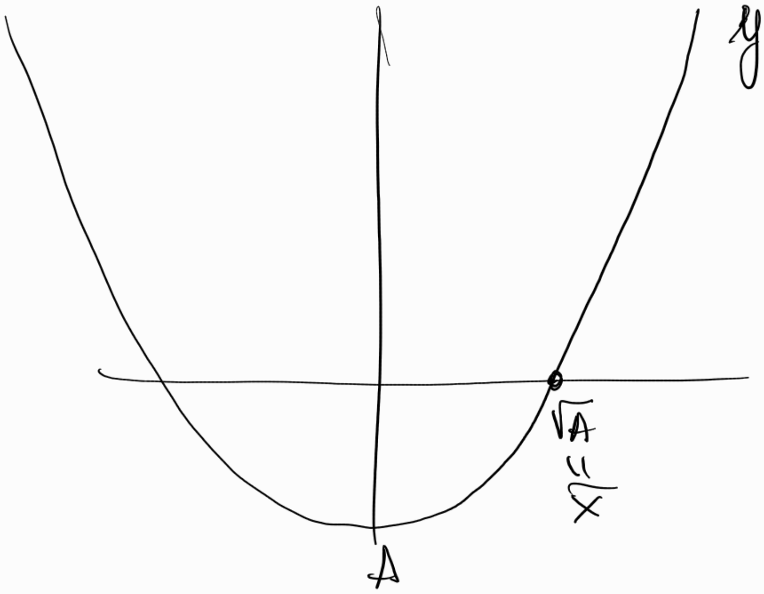
$$\varepsilon_{n+1} \leq c\, \varepsilon_n^2$$

(convergenza quadratica, quindi rapidissima)

Usiamolo per trovare la radice quadrata di $A$

Prendo $f(x) = x^2 - A$.

$y = f(x) = x^2 - A$




$x_0$ fissato.

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{x_n^2 - A}{2x_n} =$$

$$= \frac{2x_n^2 - x_n^2 + A}{2x_n} = \frac{x_n^2 + A}{2x_n} =$$

$$= \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{A}{x_n}\right)$$

L'algoritmo di Newton è l'algoritmo di Erone!

(ecco perché era così efficiente!)