$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\frac{1}{2}x^2 + \log(\cos x)}{x^4} = \left(\frac{0}{0}\right)$$

(Provare a farlo con l'Hopital, noi usiamo Taylor)

$$\log(\cos x) = \log(1 + \underbrace{(\cos x - 1)}_{\substack{\shortparallel \\ t \to 0}}) =$$

$$\left[\log(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + o(t^2)\right] \qquad t \to 0$$

$$= (\cos x - 1) - \frac{(\cos x - 1)^2}{2} + o\left((\cos x - 1)^2\right) =$$

$$\left[\begin{aligned} \cos x &= 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4) \\ \cos x - 1 &= -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4) \end{aligned}\right] \qquad x \to 0$$

$$= -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4) - \frac{1}{2}\left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)\right)^2 +$$

$$+ \underbrace{o\left(\left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)\right)^2\right)}_{\substack{\shortparallel \\ \cancel{o(x^4)}}}$$

$$= -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4) - \frac{1}{2}\left(\frac{x^4}{4}\right) =$$

$$= -\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12} + o(x^4) \qquad (= \log(\cos x))$$

$$\text{Num} = \frac{x^2}{2} + \log \cos x = \cancel{\frac{x^2}{2}} - \cancel{\frac{x^2}{2}} - \frac{x^4}{12} + o(x^4) \sim$$

$$\sim -\frac{x^4}{12} \qquad \text{per } x\to 0$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{Num}{x^4} = -\frac{1}{12}$$

Il seguente passaggio sarebbe sbagliato:

qui ho perso termini che vanno come x^4!

$$\log(\cos x) = \log(1+\underbrace{(\cos x-1)}_{\downarrow\, 0}) \sim \cos x - 1 =$$

questo passaggio trascura i termini successivi dello sviluppo del log

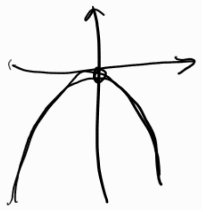
$$= -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)$$

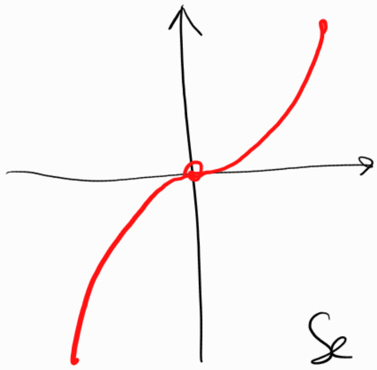
(infatti questo risultato è errato!)

Applicazione del polinomio di Taylor alla classificazione dei punti critici.

Se x_0 è un punto critico di f (cioè $f'(x_0)=0$)

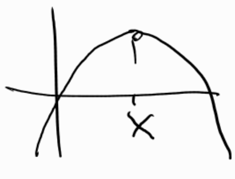
Potrebbe essere:
1) min. locale, $x_0=0$ per $f(x)=x^2$.
2) max. locale, per es. $x_0=0$ per $f(x)=-x^2$
3) né max né min. locale, per es. $x_0=0$ per $f(x)=x^3$





Per capire in che situazione siamo, di solito si studia il segno di f' vicino a x_0.

Se per esempio $f'(x)>0$ in un intorno sx di x_0
$f'(x)<0$ " " " destro di x_0



$\Rightarrow x_0$ $\Rightarrow x_0$ è max locale.

Un altro modo è calcolare le derivate successive in x_0

TEOREMA Sia $f\ (a,b) \to \mathbb{R}$, $x_0 \in (a,b)$

Sia $n \geq 2$, sia f derivabile n volte in x_0, con

$$f'(x_0) = \dots = f^{(n-1)}(x_0) = 0 \ , \quad f^{(n)}(x_0) \neq 0$$

Allora:

1) se n è pari $\Rightarrow$ se $f^{(n)}(x_0) > 0 \Rightarrow x_0$ è pto di min locale ~~stretto~~ per f; se $f^{(n)}(x_0) < 0 \Rightarrow x_0$ è pto di max locale ~~stretto~~ per f.

2) se n è dispari $\Rightarrow$ x_0 non è pto di estremo locale ed è un pto di flesso.

Dim Basta scrivere lo sviluppo di Taylor in x_0

$$f(x) = f(x_0) + \cancel{f'(x_0)(x-x_0)} + \cancel{\frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2} + \dots + \cancel{\frac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!}(x-x_0)^{n-1}}$$

$$+ \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + o\left((x-x_0)^n\right)$$

per $x \to x_0$

$\Longrightarrow$

$$f(x) - f(x_0) = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + o\left((x-x_0)^n\right)$$

$$= (x-x_0)^n \underbrace{\left[\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} + o(1)\right]}_{\text{ha lo stesso segno di } f^{(n)}(x_0) \text{ def}^{te} \text{ per } x \to x_0}$$

1° caso $\quad n$ pari $\Rightarrow (x-x_0)^n > 0$ def^{te} per $x \to x_0$

$\Rightarrow \quad f(x) - f(x_0)$ ha lo stesso segno di $f^{(n)}(x_0)$ def^{te} per $x \to x_0$

Se $f^{(n)}(x_0) > 0 \Rightarrow f(x) > f(x_0)$ def^{te} per $x \to x_0$

$\Rightarrow x_0$ pto di min. locale stretto.

se $f^{(n)}(x_0) < 0 \Rightarrow f(x) < f(x_0)$ def^{te} per $x \to x_0$

$\Rightarrow x_0$ pto di max locale stretto.

2° caso: n dispari.

In questo caso $(x-x_0)^n$ ha lo stesso segno di $x - x_0$, cioè positivo per $x > x_0$, negativo per $x < x_0$.

$\Rightarrow \quad f(x) - f(x_0)$ cambia segno attraversando x_0

$\Rightarrow x_0$ non è estremo rel.

Per vedere che x_0 è un flesso, devo controllare che $f''(x)$ cambia segno attraversando x_0.

Faccio lo sviluppo di Taylor della derivata seconda

$$f''(x) = \cancel{f''(x_0)} + \cancel{f'''(x_0)(x-x_0)} + \cancel{\dots} + \frac{f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^{n-2}}{(n-2)!}$$

$$+ o\left((x-x_0)^{n-2}\right) \qquad \text{per } x \to x_0$$

$$= \underbrace{(x-x_0)^{\overset{\text{dispari}}{n-2}}}_{\text{cambia segno attraversando } x_0} \underbrace{\left[\frac{f^{(n)}(x_0)}{(n-2)!} + o(1)\right]}_{\text{ha def}^{te}\text{ lo stesso segno di } f^{(n)}(x_0)}$$

$\Rightarrow \quad f''(x)$ cambia segno attraversando $x_0 \Rightarrow$ flesso $\square$

Uso del polinomio di Taylor per il calcolo approssimato di funzioni.

Sia $T_n(x)$ il polinomio di Taylor di ordine n di $f(x)$ con pto iniziale x_0.

Posso scrivere

$$f(x) = T_n(x) + E_n(x)$$

resto n-esimo
errore n-esimo

cioè $\boxed{E_n(x) := f(x) - T_n(x)}$

Il teorema di Peano dice che, sotto opportune ipotesi,

$$E_n(x) = o\left((x-x_0)^n\right) \quad \text{per } x \to x_0$$

Il prossimo risultato dice qualcosa su $E_n(x)$ quando x, x_0 sono fissati.

TEOREMA (resto di Lagrange del polinomio di Taylor)

$f: (a,b) \to \mathbb{R}$ derivabile $n+1$ volte in (a,b).

Siano $x, x_0 \in (a,b)$, $x \neq x_0$ e sia

$$E_n(x) = f(x) - T_n(x)$$ dove $T_n(x)$ è il polinomio di Taylor centrato in x_0

Allora $\exists\, c$ strett. compreso tra x_0 e x t.c.

$$E_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

Quindi si ha

$$f(x) = \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)(x-x_0)^k}{k!}}_{T_n(x)} + \frac{f^{(n+1)}(c)(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}$$

OSS 1 La forma del resto di Lagrange è molto simile al successivo termine del polinomio di Taylor.

OSS. 2 Nel caso $n=0$

$\Rightarrow \exists\, c$ compreso tra x e x_0 t.c.

$$f(x) = f(x_0) + f'(c)(x-x_0)$$

è il già noto teorema di Lagrange.

Applicazione:

Calcolo di e con un errore inferiore a 10^{-3}

Scrivo lo sviluppo di Maclaurin di e^x $\boxed{x_0=0}$

$$e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + E_n(x)$$

$\boxed{x=1}$

$$e = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} + E_n(1)$$

$$E_n(1) = \frac{e^c}{(n+1)!} 1^{n+1} = \frac{e^c}{(n+1)!} \quad \text{dove } c \in (0,1)$$

$$0 < \underbrace{\frac{e^c}{(n+1)!}}_{E_n(1)} < \frac{e}{(n+1)!} < \frac{3}{(n+1)!} < 10^{-3}$$

$\Updownarrow$

$$(n+1)! > 3 \cdot 10^3 = 3000$$

Basta prendere $n=6 \Rightarrow (n+1)! = 5040 > 3000$

Il valore così trovato è

$$T_6(1) = \sum_{k=0}^{6} \frac{1}{k!} = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{1}{120} + \frac{1}{720} =$$

$$= \frac{1957}{720} \approx 2{,}71806$$

Il valore di e è: $2{,}71828$

L'errore è di circa $2 \cdot 10^{-4}$

Voglio calcolare $\sin 1$ a meno di 10^{-3}

$\sin 1 \approx \sin 57°$

$$\sin x = \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!}}_{T_{2n+1}(x) = T_{2n+2}(x)} + E_{2n+2}(x)$$

$x = 1$

$$\sin 1 = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} + E_{2n+2}(1).$$

$$E_{2n+2}(1) = \frac{f^{(2n+3)}(c)}{(2n+3)!} \cancel{1^{2n+3}} = \pm \frac{\cos c}{(2n+3)!}$$

dove $c \in (0,1)$

Voglio che $|E_{2n+2}(1)| < 10^{-3}$

$$|E_{2n+2}(1)| = \frac{|\cos c|}{(2n+3)!} \leq \frac{1}{(2n+3)!} < 10^{-3}$$

$$\Updownarrow$$

$$(2n+3)! > 1000$$

Basta prendere $2n+3 = 7$

cioè $n = 2$

$$\operatorname{sen} 1 \approx 1 - \frac{1}{6} + \frac{1}{120} = \frac{101}{120} \approx 0{,}84167.$$

Il valore vero di $\operatorname{sen} 1$ è $\approx 0{,}84147$.

Calcolare $\sqrt{17}$ a meno di 10^{-6}

<u>1° modo</u> $\quad f(x) = \sqrt{1+x} = (1+x)^{1/2}$ con $x = 16$.

$$(1+x)^{1/2} = \sum_{k=0}^{n} \binom{1/2}{k} x^k + E_n(x)$$

$x = 16$

$$\sqrt{17} = \sum_{k=0}^{n} \binom{1/2}{k} 16^k + E_n(16)$$

$$E_n(16) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} 16^{n+1}$$

$$f(x) = (1+x)^{1/2}$$

$$f'(x) = \frac{1}{2}(1+x)^{-1/2}$$

$$f''(x) = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)(1+x)^{-3/2}$$

$$f'''(x) = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)(1+x)^{-5/2}$$

$$f^{(k)}(x) = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)\cdots\left(\frac{1}{2}-k+1\right)(1+x)^{\frac{1}{2}-k}$$

$$\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} = \frac{\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)\cdots\left(\frac{1}{2}-k\right)(1+c)^{\frac{1}{2}-k-1}}{(n+1)!} =$$

$$= \binom{1/2}{n+1}(1+c)^{-n-\frac{1}{2}}$$

$$|E_n'(16)| = \left|\binom{1/2}{n+1}\right| \left|\boxed{\frac{1}{(1+c)^{n+1/2}}}\right| 16^{n+1} \leq$$

$$\leq 1$$

$0 < c < 16$

$$\leq \binom{1/2}{n+1} \cdot 16^{n+1} \not\to 0 \quad \text{per } n \to +\infty$$

Il problema è che $16^{n+1} = (x-x_0)^{n+1}$

Non funziona, sarebbe meglio prendere $x - x_0$ piccolo.

2° tentativo.

$$\sqrt{17} = \sqrt{16+1} = 4\sqrt{1+\frac{1}{16}}$$

$$f(x) = 4\sqrt{1+x}$$

$$f(x) = 4\sum_{k=0}^{n} \binom{1/2}{k} x^k + E_n(x)$$

$$x = \frac{1}{16}$$

$$\sqrt{17} = f\left(\frac{1}{16}\right) = 4\sum_{k=0}^{n} \binom{1/2}{k} \frac{1}{16^k} + E_n\left(\frac{1}{16}\right)$$

$$E_n\left(\frac{1}{16}\right) = 4\binom{1/2}{n+1} \cdot \frac{1}{(1+c)^{n+1/2}} \frac{1}{16^{n+1}} \qquad c \in \left(0, \frac{1}{16}\right)$$

$$\leq 1$$

$$\left|E_n\left(\frac{1}{16}\right)\right| = \cancel{4} \left|\binom{1/2}{n+1}\right| \frac{1}{(1+c)^{n+1/2}} \frac{1}{2^{4n+\cancel{4}\,2}} \leq$$

$$\leq \left| \binom{1/2}{n+1} \right| \frac{1}{2^{4n+2}}$$

devo cercare n t.c. l'ultima quantità sia $< 10^{-6}$