Succ^{ni} definite per ricorrenza

$$\begin{cases} a_0 \text{ assegnato} \\ a_{n+1} = f(a_n) \end{cases}$$

Comportamento di
$$\begin{cases} a_0 = 1 \\ a_{n+1} = \sqrt{6+a_n} \end{cases}$$

Dall'esame dei primi termini $a_1 = \sqrt{7}$, $a_2 = \sqrt{6+\sqrt{7}}$

$a_3 = \sqrt{6+\sqrt{6+\sqrt{7}}}$

sembra che la succ^{ne} sia crescente.

Vediamo se è vero

$$\underset{\sqrt{6+a_n}}{\overset{\shortparallel}{a_{n+1}}} \overset{?}{>} a_n \iff \sqrt{6+a_n} \overset{?}{>} a_n \iff \dots \iff a_n < 3$$

$\{a_n\}$ crescente $\iff$ a_n si mantiene al di sotto di 3.

$a_n \overset{?}{<} 3$ Proviamolo per induzione

1) $a_0 \overset{?}{<} 3$ $\quad 1 \overset{?}{<} 3$ ok!

2) supponendo $a_n < 3$, provo che $a_{n+1} < 3$
$$a_{n+1} = \sqrt{6+a_n}$$

$$\iff \sqrt{6+a_n} \overset{?}{<} 3 \iff 6+a_n \overset{?}{<} 3^2 \iff a_n < 3$$

ok.

Abbiamo ottenuto che:

a_n è sempre strettamente crescente e $a_n < 3$.

$\Rightarrow$ a_n è convergente ha limite finito

$a_n \longrightarrow L \in \mathbb{R}$ Possiamo subito dire che $1 < L \leq 3$

L si può trovare passando al limite nella formula iterativa

$$\underbrace{a_{n+1}}_{\downarrow \atop L} = \underbrace{\sqrt{6+a_n}}_{\downarrow \atop \sqrt{6+L}}$$

$$\Longrightarrow \quad L = \sqrt{6+L}$$

$$L^2 = 6 + L$$

$$L^2 - L - 6 = 0$$

$$L = \frac{1 \pm \sqrt{1+24}}{2} = \frac{1 \pm 5}{2} \quad \begin{array}{l} -2 \text{ non accettab} \\ 3 \text{ ok} \end{array}$$

Quindi $\boxed{\lim_{n \to +\infty} a_n = 3}$

Consideriamo la successione $\begin{cases} a_0 = 4 \\ a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{7}{a_n}\right) \end{cases}$

a_n sono tutti positivi e quindi la succ^{ne} è ben definita.

$$a_1 = \frac{1}{2}\left(4 + \frac{7}{4}\right) = \frac{23}{8}$$

$$a_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{23}{8} + \frac{7 \cdot 8}{23}\right) < a_1 .$$

Sembra che la succ^{ne} sia decrescente. Verifichiamo

$$a_{n+1} \overset{?}{<} a_n \iff \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{7}{a_n}\right) \overset{?}{<} a_n$$

$$\overset{\shortparallel}{\frac{1}{2}\left(a_n + \frac{7}{a_n}\right)}$$

$$\iff \frac{7}{\cancel{2}a_n} \overset{?}{<} \frac{a_n}{\cancel{2}} \qquad \text{molt. per } a_n > 0$$

$$\iff a_n^2 \overset{?}{>} 7 \iff a_n \overset{?}{>} \sqrt{7}$$

Proviamo che $a_n > \sqrt{7}$ per induzione

1) $a_0 > \sqrt{7}$? $\quad 4 > \sqrt{7}$ sì !

2) Supponendo $a_n > \sqrt{7}$, proviamo che $a_{n+1} > \sqrt{7}$

$$a_{n+1} \overset{?}{>} \sqrt{7} \iff \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{7}{a_n}\right) \overset{?}{>} \sqrt{7} \qquad \text{molt. per } 2a_n > 0$$

$$\iff a_n^2 + 7 \overset{?}{>} 2\sqrt{7}\, a_n$$

$$\iff a_n^2 - 2\sqrt{7}\, a_n + 7 \overset{?}{>} 0$$

$$\iff (a_n - \sqrt{7})^2 > 0$$

vero perché $a_n > \sqrt{7}$.

Abbiamo provato che

a_n è strett. decrescente e $a_n > \sqrt{7}$.

$$\Rightarrow a_n \to L \in [\sqrt{7}, 4)$$

Per trovare L, passiamo al limite nella formula iterativa

$$\underbrace{a_{n+1}}_{\downarrow \atop L} = \underbrace{\frac{1}{2}\left(a_n + \frac{7}{a_n}\right)}_{\downarrow \atop \frac{1}{2}\left(L + \frac{7}{L}\right)}$$

$$\Rightarrow \quad L = \frac{1}{2}\left(L + \frac{7}{L}\right) \Rightarrow 2L^2 = L^2 + 7$$

$$\Rightarrow L^2 = 7 \quad \Rightarrow L = \sqrt{7}.$$

In realtà tutto ciò si può modificare come segue

Fissato $A > 0$, considero

$$\boxed{\begin{cases} a_0 > \sqrt{A} & \text{assegnato.} \\ a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{A}{a_n}\right) \end{cases}}$$

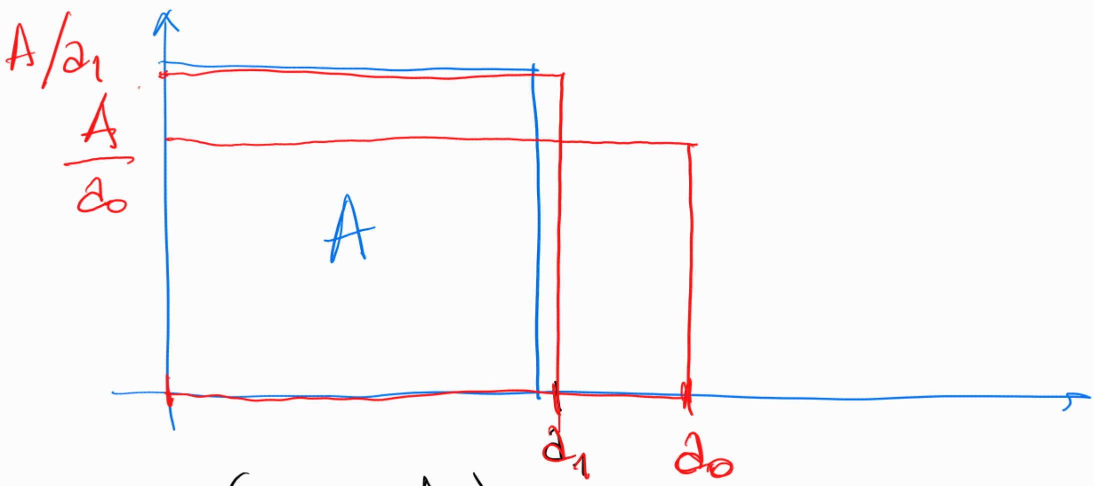
Algoritmo di Erone per trovare $\sqrt{A}$.

Si prova esattamente come prima che

a_n è strett. decrescente e $a_n > \sqrt{A}$

$\Rightarrow$ quindi a_n è convergente, e si prova che

$$a_n \longrightarrow \sqrt{A}$$



$$a_1 = \frac{1}{2}\left(a_0 + \frac{A}{a_0}\right)$$

$$a_2 = \frac{1}{2}\left(a_1 + \frac{A}{a_1}\right)$$

Come valutare la velocità di convergenza.

Bisogna fare un' analisi dell' errore

Errore assoluto $\left|a_n - \sqrt{A}\right| \overset{a_n > \sqrt{A}}{=} a_n - \sqrt{A}$

" relativo $\varepsilon_n := \dfrac{\left|a_n - \sqrt{A}\right|}{\sqrt{A}} = \dfrac{a_n - \sqrt{A}}{\sqrt{A}} = \dfrac{a_n}{\sqrt{A}} - 1$

Voglio trovare una relazione iterativa per ε_n.

$$\varepsilon_{n+1} = \frac{a_{n+1}}{\sqrt{A}} - 1 = \frac{\frac{1}{2}\left(a_n + \frac{A}{a_n}\right)}{\sqrt{A}} - 1$$

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{A}{a_n}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\underbrace{\frac{a_n}{\sqrt{A}}}_{=\varepsilon_n + 1} + \underbrace{\frac{\sqrt{A}}{a_n}}_{=\frac{1}{\varepsilon_n+1}}\right) - 1 =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\varepsilon_n + 1 + \frac{1}{\varepsilon_n + 1}\right) - 1 =$$

$$= \frac{(\varepsilon_n + 1)^2 + 1 - 2(\varepsilon_n + 1)}{2(\varepsilon_n + 1)} =$$

$$= \frac{\varepsilon_n^2 + \cancel{1} + \cancel{2\varepsilon_n} + \cancel{1} - \cancel{2\varepsilon_n} - \cancel{2}}{2(\varepsilon_n + 1)} = \frac{\varepsilon_n^2}{2(\varepsilon_n + 1)}$$

Abbiamo trovato

$$\varepsilon_{n+1} = \frac{\varepsilon_n^2}{2\underbrace{(\varepsilon_n+1)}_{\substack{\vee \quad \vee \\ \varepsilon_n \quad 1}}} \le \begin{cases} \dfrac{\varepsilon_n}{2} \\[2ex] \dfrac{\varepsilon_n^2}{2} \end{cases}$$

Abbiamo trovato che $\varepsilon_{n+1} < \dfrac{\varepsilon_n^2}{2}$

Questa formula dice che $\varepsilon_n \longrightarrow 0$ molto velocemente

se partiamo da ε_n abbastanza piccolo

Per es. se $\varepsilon_4 < \dfrac{1}{1000} \Longrightarrow \varepsilon_5 < \dfrac{\varepsilon_4^2}{2} = \dfrac{1}{2 \cdot 10^6}$

$$\Rightarrow \varepsilon_6 < \frac{\varepsilon_5^2}{2} < \frac{1}{2 \cdot 4 \cdot 10^{12}}$$

Tasso di convergenza quadratico $\quad \varepsilon_{n+1} < C\,\varepsilon_n^2$

$\Longrightarrow$ Convergenza velocissima!!