Trovare il polinomio di Maclaurin di ordine 3 di

$$f(x) = e^{2x} - 3\sin x$$

Lo ricaviamo a partire da sviluppi noti di funzioni

$$e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{6} + o(t^3) \qquad \text{per } t \to 0$$

Sostituisco $2x$ al posto di t dopo aver osservato che

$$2x \to 0 \qquad \text{per } x \to 0$$

$$e^{2x} = 1 + 2x + 2x^2 + \frac{4}{3}x^3 + \underbrace{\cancel{o((2x)^3)}}_{\substack{\| \\ o(8x^3) = o(x^3)}} \; o(x^3)$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$$

$$f(x) = e^{2x} - 3\sin x = 1 + 2x + 2x^2 + \frac{4}{3}x^3 + o(x^3)$$
$$-3x + \frac{x^3}{2} + \cancel{o(x^3)}$$

$$= 1 - x + 2x^2 + \frac{11}{6}x^3 + o(x^3)$$

Abbiamo trovato un polinomio $P_3(x)$ di grado 3 t.c.

$$f(x) - P_3(x) = o(x^3) \qquad \text{per } x \to 0.$$

$\Rightarrow$ Questo è il polinomio di Maclaurin cercato.

Abbiamo già osservato che: "la derivata del polinomio di Taylor è il polinomio di Taylor della derivata".

Per la precisione: se $f(x)$ è derivabile quante volte si vuole in x_0, allora

$$\left(T_n(x;f)\right)' = T_{n-1}(x;f')$$

polinomio di Taylor di ordine n relativo a f con pto iniziale x_0

Usiamo questa proprietà per trovare nuovi sviluppi di Taylor a partire da sviluppi noti.

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^n + o(x^n) \quad \text{per } x \to 0$$

Consideriamo $f(x) = \log(1-x)$, la cui derivata vale

$$f'(x) = -\frac{1}{1-x}$$

Quindi il polinomio di Taylor di $f(x)$ deve essere tale che, derivato e cambiato di segno, deve dare il polinomio di prima.

$$\log(1-x) = \underbrace{f(0)}_{\substack{\shortparallel \\ 0}} - \left(x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \dots + \frac{x^n}{n}\right) + o(x^n) \quad \text{per } x \to 0$$

$$= -\sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k} + o(x^n)$$

Mettendo $-x$ al posto di x nello sviluppo di $\frac{1}{1-x}$, si ottiene

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots + (-1)^n x^n + o(x^n) \quad x \to 0$$

$$= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^k + o(x^n)$$

Metto x^2 al posto di x (N.B. per $x \to 0 \Rightarrow x^2 \to 0$)

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \dots + (-1)^n x^{2n} + o(x^{2n})$$

$$= \underbrace{\sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^{2k}}_{T_{2n}(x) = T_{2n+1}(x)} + \cancel{o(x^{2n})} + o(x^{2n+1})$$

Da $(\operatorname{arctg} x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$

$$\operatorname{arctg} x = \cancel{\operatorname{arctg} 0} + x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+1})$$

$$= \underbrace{\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1}}_{T_{2n+1}(x) = T_{2n+2}} + \underbrace{o(x^{2n+1})}_{\text{oppure } o(x^{2n+2})} \qquad x \to 0$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = (1+x)^{-1/2} = 1 - \frac{x}{2} + \frac{3}{8}x^2 + \binom{-1/2}{3} x^3 + \dots$$

$$\dots + \binom{-1/2}{n} x^n + o(x^n) \quad \text{per } x \to 0$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{-1/2}{k} x^k + o(x^n)$$

$$\binom{-\frac{1}{2}}{2} = \frac{(-1/2)(-\frac{3}{2})}{2!} = \frac{3}{8}$$

dove $$\binom{-1/2}{k} = \frac{(-1/2)(-\frac{1}{2}-1)(-\frac{1}{2}-2)\dots(-\frac{1}{2}-k+1)}{k!}$$

$$\binom{-1/2}{0} = 1$$

Metto $-x^2$ al posto di x (dopo aver osservato che $-x^2 \to 0$ per $x \to 0$)

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \underbrace{\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{-1/2}{k} x^{2k}}_{T_{2n}(x) = T_{2n+1}(x)} + o\left(x^{2n+1}\right) \qquad x \to 0$$

$\arcsin x =$ (osservando che $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$)

$$= \underbrace{\cancel{\arcsin 0}}_{=0} + \underbrace{\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{-1/2}{k} \frac{x^{2k+1}}{2k+1}}_{T_{2n+1}(x) = T_{2n+2}(x)} + o\left(x^{2n+2}\right) \qquad x \to 0$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{(2k-1)(2k-3)\cdots 5\cdot 3\cdot 1}{2^k\, k!\, (2k+1)} x^{2k+1} + o\left(x^{2n+2}\right)$$

[riscrivendo con attenzione $\binom{-1/2}{k}$] $= \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(2k)!\, x^{2k+1}}{4^k (k!)^2 (2k+1)} + o\left(x^{2n+2}\right)$

attenzione, diverso da come scritto a lezione!

$$\arccos x = \frac{\pi}{2} - \arcsin x =$$

$$= \frac{\pi}{2} + \sum_{k=0}^{n} (-1)^{k+1} \binom{-1/2}{k} \frac{x^{2k+1}}{2k+1} + o\left(x^{2n+2}\right)$$

$$\binom{-1/2}{k} = \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{5}{2}\right)\cdots\left(-\frac{1}{2}-k+1\right)}{k!} =$$

$$= (-1)^k \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{2}\cdots\left(\frac{2k-1}{2}\right)}{k!} =$$

$$= (-1)^k \frac{(2k-1)(2k-3)\cdots 5\cdot 3\cdot 1}{2^k\, k!}$$

Trovare lo sviluppo di Maclaurin di $\operatorname{tg} x$ fino al 5° ordine

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5)}{1 - \underbrace{\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5)}_{\to 0}}$$

Uso lo sviluppo di Taylor di

$$\frac{1}{1-t} = 1 + t + t^2 + t^3 + o(t^3) \qquad t \to 0$$

dove al posto di t c'è $\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} + o(x^5) \to 0$ per $x \to 0$

$$\Rightarrow \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{1 - \underbrace{\left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} + o(x^5)\right)}_{t}} =$$

$$= 1 + \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} + o(x^5)\right) + \boxed{\left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} + o(x^5)\right)^2} +$$

$$+ \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} + o(x^5)\right)^3 + o\left(\left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} + o(x^5)\right)^3\right)$$

$$= 1 + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} + o(x^5) + \frac{x^4}{4} + \frac{x^8}{24^2}$$

$\frac{x^8}{24^2} = o(x^5)$: lo butto.

$$= 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{5}{24} x^4 + o(x^5)$$

$$\operatorname{tg} x = \sin x \cdot \frac{1}{\cos x} =$$

$$= \left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5)\right)\left(1 + \frac{x^2}{2} + \frac{5}{24} x^4 + o(x^5)\right) =$$

$$= x + \frac{x^3}{2} + \frac{5}{24}x^5 + o(x^5)$$
$$- \frac{x^3}{6} - \frac{x^5}{12} + \frac{x^5}{120}$$

$$= x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 + o(x^5)$$

$$\frac{5}{24} - \frac{1}{12} + \frac{1}{120} = \frac{25-10+1}{120} = \frac{16}{120} =$$
$$= \frac{4}{30} = \frac{2}{15}$$

$$\operatorname{tg} x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + o(x^6) \qquad \text{per } x \to 0$$

Esercizio:
Trovare l'ordine di infinitesimo, per $x \to 0$, di

$$f(x) = 3\operatorname{tg} x - 3x - x^3$$

Si può fare con l'Hôpital, ma facciamolo con Taylor

$$f(x) = 3\left(\cancel{x} + \cancel{\frac{x^3}{3}} + \frac{2}{15}x^5 + o(x^5)\right) - 3\cancel{x} - \cancel{x^3} =$$

$$= \frac{2}{5}x^5 + o(x^5) \sim \frac{2}{5}x^5$$

Infinitesimo di ordine 5.

Trovare l'ordine di infinitesimo, per $x \to +\infty$, di

$$f(x) = e - \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e - e^{\underbrace{x\log\left(1+\frac{1}{x}\right)}_{\downarrow\,1}} =$$

$$x \log\left(1+\frac{1}{x}\right)$$

$$= e\left(\underbrace{1 - e^{\underbrace{x\log\left(1+\frac{1}{x}\right)-1}_{\to 0}}}_{\sim 1 - x\log\left(1+\frac{1}{x}\right)}\right) \sim e\left(1 - x\log\left(1+\frac{1}{x}\right)\right)$$

$$\left[e^t - 1 \sim t \qquad t \to 0\right]$$

$$= e\left(1 - x\right.$$

<u>oss</u> $\log(1+t) =$ ne cerco lo sviluppo di Maclaurin

(Fatto qui in modo più semplice che a lezione)

Basta prendere lo sviluppo di $\log(1-t)$ (già visto) e mettere $-t$ al posto di t. Si ottiene:

$$\log(1+t) = -\sum_{k=1}^{n} \frac{(-t)^k}{k} + o(t^n) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} t^k + o(t^n) \qquad \text{per } t \to 0$$

$$\log\left(1+\frac{1}{x}\right) = \left(\begin{array}{l}\text{metto } \frac{1}{x} \text{ al posto di } t \text{ dopo} \\ \text{aver osservato che } \frac{1}{x} \to 0 \text{ per } x \to +\infty\end{array}\right) \qquad x \to +\infty$$

$$= \frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

$$e\left(1 - x\log\left(1+\frac{1}{x}\right)\right) = e\left(\cancel{1} - x\left(\cancel{\frac{1}{x}} - \frac{1}{2x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)\right) =$$

$$= e\left(\frac{1}{2x} - \underbrace{x\, o\left(\frac{1}{x^2}\right)}_{= o\left(\frac{1}{x}\right)}\right) = e\left(\frac{1}{2x} + o\left(\frac{1}{x}\right)\right) \sim$$

$$\sim \frac{e}{2x}$$ infinitesimo di ordine 1 per $x \to +\infty$

Trovare l'ordine di infinitesimo, per $n \to +\infty$, di

$$a_n = \frac{5}{\sqrt{n}} - \sin\left(\frac{\alpha}{\sqrt{n}}\right) \qquad \alpha \in \mathbb{R}.$$

Se $\alpha \neq 5$, si fa anche senza Taylor

$$\frac{5}{\sqrt{n}} - \sin\left(\frac{\alpha}{\sqrt{n}}\right) = \frac{1}{\sqrt{n}}\left(5 - \underbrace{\boxed{\frac{\sin\left(\frac{\alpha}{\sqrt{n}}\right)}{1/\sqrt{n}}}}_{\to\, \alpha}\right) \sim$$

$$\sim \frac{5-\alpha}{\sqrt{n}} \quad \text{per } \alpha \neq 5$$

infinitesimo di ordine $\frac{1}{2}$

$\alpha = 5$

$$a_n = \frac{5}{\sqrt{n}} - \sin\left(\frac{5}{\sqrt{n}}\right)$$

$$\sin t = t - \frac{t^3}{6} + o(t^3) \qquad t \to 0$$

$\frac{5}{\sqrt{n}}$ al posto di t, dopo aver osservato che $\frac{5}{\sqrt{n}} \to 0$ per $n \to +\infty$

$$\Rightarrow \quad \sin\left(\frac{5}{\sqrt{n}}\right) = \frac{5}{\sqrt{n}} - \frac{125}{6\, n^{3/2}} + o\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$$

$$\frac{5}{\sqrt{n}} - \sin\frac{5}{\sqrt{n}} = \cancel{\frac{5}{\sqrt{n}}} - \cancel{\frac{5}{\sqrt{n}}} + \frac{125}{6\, n^{3/2}} + o\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right) \sim$$

$$\sim \frac{125}{6\, n^{3/2}}$$ infinitesimo di ordine $\frac{3}{2}$