

Studi di funzioni

Per le seguenti funzioni, studiare dominio, eventuale periodicità, eventuali simmetrie, limiti, asintoti, continuità, derivabilità, crescita, decrescenza, estremi relativi ed assoluti, concavità, convessità, flessi; disegnarne approssimativamente il grafico.

$$1 \quad f(x) = \sin x e^{\sqrt{2} \cos x}$$

$$2 \quad f(x) = \exp\left(\frac{3}{2(\ln x)^2}\right), \quad \text{dove } \exp(t) = e^t$$

$$3 \quad f(x) = x(\ln|x| - 1)$$

$$4 \quad f(x) = x^2 \left(\ln|x| - \frac{1}{2}\right)$$

$$5 \quad f(x) = x^{1/3} - 2x^{-2/3}$$

$$6 \quad f(x) = \ln 2 - \ln(e^{2x} - 5e^x + 6)$$

$$7 \quad f(x) = \sin(2x) + (2\sqrt{2} + 4) \cos x - 2(\sqrt{2} + 1)x$$

$$8 \quad f(x) = \frac{1}{4} (37x + 2x^2 + 9 \ln|x|)$$

$$9 \quad f(x) = x - |x^2 + 8x + 1|^{1/2}$$

$$10 \quad f(x) = x^2 - 2x + |x|$$

$$11 \quad f(x) = x^4 - 4x^3 + 4x^2 + 1$$

$$12 \quad f(x) = xe^{-x+1}$$

$$13 \quad f(x) = xe^{x^2}$$

$$14 \quad f(x) = x^{2/3}(1 - x)$$

$$15 \quad f(x) = x \frac{2 \ln x + 3}{\ln x + 1}$$

$$16 \quad f(x) = (12 - x^2)(x^2 - 8)^{1/3}$$

$$17 \quad f(x) = e^{-2/x} (|x| + |x - 1|)$$

$$18 \quad f(x) = \sqrt[3]{\cos(2x) - \frac{1}{2}}$$

$$19 \quad f(x) = \frac{2 - x}{1 + \log|x - 2|}$$

$$20 \quad f(x) = (x - 1)(\ln|x - 1| - 2)^2$$

$$21 \quad f(x) = e^{-x}(x + 2)^{1/3}$$

$$22 \quad f(x) = \sqrt{3 + |x^2 - 4|}$$

$$23 \quad f(x) = \ln \frac{20x}{2x^2 + 3}$$

$$24 \quad f(x) = \left| \ln \frac{20x}{2x^2 + 3} \right|$$

$$25 \quad f(x) = \operatorname{sh}^3 x - 18 |\operatorname{sh} x|$$

$$26 \quad f(x) = \left| \frac{3}{4} - x^2 \right| - \sqrt{2x^2 - 1}$$

$$27 \quad f(x) = \arccos(\sqrt{|x|} - 1)$$

$$28 \quad f(x) = \ln |3e^x - 2| - |x|$$

$$29 \quad f(x) = \sqrt[5]{|27 - x^3|} - 2$$

$$30 \quad f(x) = \ln |e^{2x} - 3e^x + 2|$$

31 Determinare il numero e il segno delle soluzioni dell'equazione $3x^2 + 3 \cos^2 x - x^4 = 1$

32 Data la funzione Dire quante sono le soluzioni dell'equazione

$$\frac{|\operatorname{tg} x + \sqrt{3}|}{|\operatorname{tg} x| - 1} = \lambda$$

in ogni periodo della funzione, al variare di $\lambda \in \mathbb{R}$.

33 Sia $p > 1$. Trovare la più piccola costante $c = c(p)$ tale che

$$t \leq \frac{t^p}{p} + c \quad \text{per ogni } t \geq 0. \quad (1)$$

34 Per $p > 1$, si definisca $q = \frac{p}{p-1}$. Utilizzando il risultato dell'esercizio precedente, provare la seguente *disuguaglianza di Young*

$$xy \leq \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q} \quad \text{per ogni } x, y \geq 0.$$

(Suggerimento: dividere per una potenza conveniente di y , e con una sostituzione ricondursi alla disuguaglianza (??)).

35 Trovare il dominio della funzione $f(x) = \log\left(\frac{|\operatorname{tg} x| - |\operatorname{sen} x|}{x - e \log x}\right)$

36 Data la funzione

$$f(x) = -2x^3 + \alpha x^2 + \beta x + \gamma,$$

trovare tutti i valori di α, β, γ (se esistono) che rendono vera (separatamente) ciascuna delle seguenti proprietà a), b), c), d),

a) f ammette un punto di minimo relativo per $x = 2$ e un punto di flesso per $x = 6$;

b) f ammette un punto di massimo relativo per $x = 2$ e un punto di flesso per $x = 6$;

c) f ammette asintoto obliquo per $x \rightarrow +\infty$;

d) f è strettamente decrescente nel suo dominio.

Risposte ad alcuni esercizi

?: $c = \frac{p-1}{p}$.