Dim. per induzione

Proviamo che

$$4^{2n+1} + 3^{n+2} \text{ è multiplo di } 13 \qquad P(n)$$

1) $P(0)$ è vera

$$4^{1} + 3^{2} = 13 \qquad \text{OK!}$$

2) Supponendo vera $P(n)$, proviamo che vale $P(n+1)$

$P(n+1)$ $\qquad 4^{2n+3} + 3^{n+3}$ è divisibile per 13

$$4^{2n+3} + 3^{n+3} = \overbrace{4^{2}}^{=16} \cdot 4^{2n+1} + 3 \cdot 3^{n+2} =$$

$$= 16 \cdot \underbrace{\left(4^{2n+1} + 3^{n+2}\right)}_{\substack{\parallel \\ 13 \cdot k \text{ con } k \in \mathbb{N} \text{ per l'hyp induttiva}}} - 16 \cdot 3^{n+2} + 3 \cdot 3^{n+2} =$$

$$= 16 \cdot 13 \cdot k - 3^{n+2} \cdot 13 =$$

$$= 13 \left(\underbrace{16k - 3^{n+2}}_{\in \mathbb{N}} \right) \qquad \text{quindi } P(n+1) \text{ è vera.}$$

Voglio dim. per induzione la formula del binomio di Newton

$$\boxed{(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \underbrace{\binom{n}{k}}_{\frac{n!}{k!(n-k)!}} a^{n-k} b^k} \qquad P(n)$$

1) $P(0)$ è vera.

$$(a+b)^0 \overset{?}{=} \sum_{k=0}^{0} \binom{0}{k} a^{0-k} b^k$$

$$1 \overset{?}{=} \underbrace{\binom{0}{0} a^0 b^0}_{1 \cdot 1 \cdot 1} \qquad \text{ok.}$$

1') $P(1)$ è vera.

$$(a+b)^1 \overset{?}{=} \sum_{k=0}^{1} \binom{1}{k} a^{1-k} b^k$$

$$a+b \overset{?}{=} \underbrace{\binom{1}{0}}_{\frac{1!}{1!\,0!} = 1} \underbrace{a^1 b^0}_{a} + \underbrace{\binom{1}{1}}_{1} \underbrace{a^0 b^1}_{b} \qquad \text{ok!}$$

2) Passo induttivo. Diamo per buona $P(n)$ e proviamo $P(n+1)$

$$P(n+1) \qquad (a+b)^{n+1} \overset{?}{=} \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^{n+1-k} b^k$$

$$(a+b)^{n+1} = (a+b)\underbrace{(a+b)^n}_{\displaystyle \parallel \atop \displaystyle \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k} = (a+b)\cdot \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k =$$

per l'ipot. induttiva

$$= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n+1-k}b^k + \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^{k+1}$$

$k+1=h$
$k=h-1$

$$= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n+1-k}b^k + \sum_{h=1}^{n+1}\binom{n}{h-1}a^{n+1-h}b^h$$

cambio tipografico: $h \to k$

$$= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n+1-k}b^k + \sum_{k=1}^{n+1}\binom{n}{k-1}a^{n+1-k}b^k$$

$$= \underbrace{\binom{n}{0}a^{n+1}b^0}_{a^{n+1}} + \sum_{k=1}^{n}\left[\binom{n}{k}+\binom{n}{k-1}\right]a^{n+1-k}b^k + \underbrace{\binom{n}{n}a^0 b^{n+1}}_{b^{n+1}}$$

$$\overset{?}{=} \sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}a^{n+1-k}b^k$$

$$\parallel$$

$$a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n}\binom{n+1}{k}a^{n+1-k}b^k + b^{n+1}$$

Ho finito se $\binom{n}{k}+\binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k}$

questa è stata provata ieri con calcoli elementari

Successioni definite per ricorrenza.

Sono successioni definite come segue

$$\begin{cases} a_0 \text{ assegnato} \\ a_{n+1} = f(a_n) \end{cases} \Rightarrow a_1 = f(a_0),\ a_2 = f(a_1), \dots$$

dove f è una funzione nota.

Esempio

$$\begin{cases} a_0 = 1/2 \\ a_{n+1} = (a_n)^2 \end{cases}$$

$$a_0 = \frac{1}{2},\quad a_1 = \frac{1}{4},\quad a_2 = \frac{1}{16},\quad a_3 = \frac{1}{256}$$

In realtà si trova una formula diretta per a_n

$$a_0 = \frac{1}{2},\quad a_1 = \frac{1}{2^2},\quad a_2 = \frac{1}{2^4},\quad a_3 = \frac{1}{2^8},\quad a_4 = \frac{1}{2^{16}}$$

$$a_n = \frac{1}{2^{2^n}}$$

Esempio

$$\begin{cases} a_0 > 0 \text{ fissato} \\ a_{n+1} = \dfrac{a_n}{1+a_n} \end{cases}$$

$$a_1 = \frac{a_0}{1+a_0}; \qquad a_2 = \frac{a_1}{1+a_1} = \frac{\frac{a_0}{1+a_0}}{1+\frac{a_0}{1+a_0}} = \frac{a_0}{1+a_0+a_0} =$$

$$= \frac{a_0}{1+2a_0}$$

$$a_3 = \frac{a_2}{1+a_2} = \frac{\frac{a_0}{1+2a_0}}{1+\frac{a_0}{1+2a_0}} = \frac{a_0}{1+3a_0}$$

$$a_n = \frac{a_0}{1+na_0} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

Si tratta di casi fortunati perché di solito non è possibile trovare una formula diretta (chiusa) per una successione definita per ricorrenza.

Si può comunque cercare di capirne il comportamento?

$$\begin{cases} a_0 = 1 \\ a_{n+1} = \sqrt{6+a_n} \end{cases}$$

$a_1 = \sqrt{6+1} = \sqrt{7}$

$a_2 = \sqrt{6+\sqrt{7}}$

$a_3 = \sqrt{6+\sqrt{6+\sqrt{7}}}$

ovviamente tutti gli a_n sono >0

La succ^{ne} sembra crescente. Vediamo se possiamo provarlo.

$$\underset{\sqrt{6+a_n}}{\overset{\shortparallel}{a_{n+1}}} \overset{?}{>} a_n \iff \sqrt{6+a_n} \overset{?}{>} a_n$$

$$\iff 6+a_n \overset{?}{>} a_n^2$$

$$\iff a_n^2 - a_n - 6 < 0$$

$$\iff -2 < a_n < 3$$

sempre vera

$$\iff a_n < 3$$