Esercizio: Studiare $\boxed{f(x) = \dfrac{\operatorname{tg} x}{|\operatorname{tg} x| - \sqrt{3}}}$

Dominio: $\operatorname{tg} x$ deve esistere, diversa da $\pm\sqrt{3}$.

$$x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \quad , \quad x \neq \pm\frac{\pi}{3} + k\pi \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

Periodicità e simmetrie. Dipende solo da $\operatorname{tg} x \Rightarrow$ è periodica di periodo π.

$\Rightarrow$ la studio solo in $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \setminus \left\{\pm\frac{\pi}{3}\right\}$

E' dispari $\Rightarrow$ basta studiarla in $\left[0, \frac{\pi}{2}\right) \setminus \left\{\frac{\pi}{3}\right\} \Rightarrow$ tolgo il $|\cdot|$ perché $\operatorname{tg} x \geq 0$ per $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$

$\Rightarrow$ Studio $f(x) = \dfrac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} x - \sqrt{3}}$ in $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$.

Segno

$f(x) = 0 \iff x = 0$

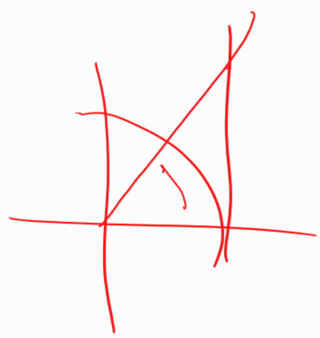
$f(x) > 0 \iff \frac{\pi}{3} < x < \frac{\pi}{2}$

$f(x) < 0 \iff 0 < x < \frac{\pi}{3}$

Continuità: f è continua nel suo dominio

Limiti significativi:

$$\lim_{x \to \left(\frac{\pi}{3}\right)^-} f(x) = \lim_{x \to \left(\frac{\pi}{3}\right)^-} \frac{\overset{\to \sqrt{3}}{\operatorname{tg} x}}{\underbrace{\operatorname{tg} x - \sqrt{3}}_{\to 0^-}} = -\infty$$

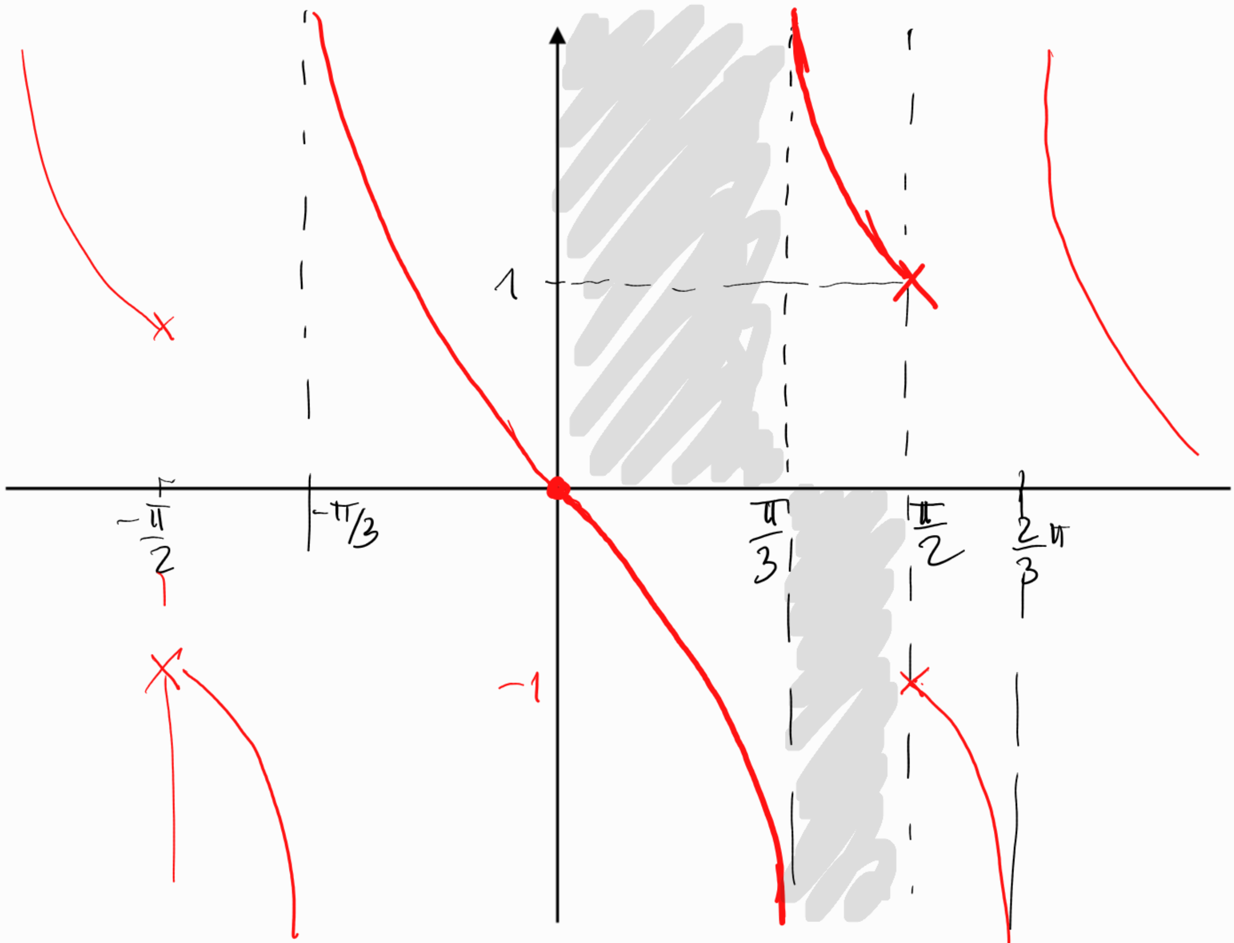


$$\lim_{x \to \left(\frac{\pi}{3}\right)^+} f(x) = \left(\frac{\sqrt{3}}{0^+}\right) = +\infty$$

$x = \frac{\pi}{3}$ asint. verticale

$$\lim_{x \to \left(\frac{\pi}{2}\right)^-} f(x) = \lim_{x \to \left(\frac{\pi}{2}\right)^-} \frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} x - \sqrt{3}} = \lim_{t \to +\infty} \frac{t}{t - \sqrt{3}} = 1$$

$t = \operatorname{tg} x \to +\infty$



Derivata. Derivabile in $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)\setminus\left\{\frac{\pi}{3}\right\}$.

Possibile non derivabilità in $x=0$.

Per $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)\setminus\left\{\frac{\pi}{3}\right\}$

$$f'(x)=\left(\frac{\operatorname{tg}x}{\operatorname{tg}x-\sqrt3}\right)'=\frac{1\cdot(\cancel{\operatorname{tg}x}-\sqrt3)-\cancel{\operatorname{tg}x\cdot 1}}{(\operatorname{tg}x-\sqrt3)^2}\underbrace{(1+\operatorname{tg}^2x)}_{(\operatorname{tg}x)'}$$

$$\text{"} \left(\frac{y}{y-\sqrt3}\bigg|_{y=\operatorname{tg}x}\right)'$$

$$=-\frac{\sqrt3\,(1+\operatorname{tg}^2x)}{(\operatorname{tg}x-\sqrt3)^2}<0\quad\forall x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)\setminus\left\{\frac{\pi}{3}\right\}.$$

Derivabilità in $x=0$. $\quad f'_+(0)=-\frac{\sqrt3}{3}$

$f'_-(0) = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ perché f' è pari.

$\Rightarrow$ f è derivabile in $x=0$.

f è strett. decrescente in $\left[0,\frac{\pi}{3}\right)$ e in $\left(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2}\right)$

(non nell'unione $\left[0,\frac{\pi}{3}\right) \cup \left(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2}\right)$!)

Non ci sono estremi relativi.

Derivata seconda

$\forall x \in \left(0,\frac{\pi}{2}\right) \setminus \left\{\frac{\pi}{3}\right\}$

$$f''(x) = -\sqrt{3}\left(\frac{1+\operatorname{tg}^2 x}{(\operatorname{tg}x-\sqrt{3})^2}\right)' =$$

$$= -\sqrt{3}\,\frac{2\operatorname{tg}x\,(\operatorname{tg}x-\sqrt{3})^{\cancel{2}} - (1+\operatorname{tg}^2 x)\,2\,\cancel{(\operatorname{tg}x-\sqrt{3})}}{(\operatorname{tg}x-\sqrt{3})^{\cancel{4}\,3}}\,\underbrace{(1+\operatorname{tg}^2 x)}_{(\operatorname{tg}x)'}$$

$$= -2\sqrt{3}\,\frac{\cancel{\operatorname{tg}^2 x} - \sqrt{3}\operatorname{tg}x - 1 - \cancel{\operatorname{tg}^2 x}}{(\operatorname{tg}x-\sqrt{3})^3}\,(1+\operatorname{tg}^2 x)$$

$$= 2\sqrt{3}\,\frac{(\sqrt{3}\operatorname{tg}x+1)(1+\operatorname{tg}^2 x)}{(\operatorname{tg}x-\sqrt{3})^3}$$

derivata seconda in $x=0$.

$$f''_+(0) = \frac{2\sqrt{3}\cdot 1\cdot 1}{-3\sqrt{3}} = -\frac{2}{3}$$

f'' è dispari $\Rightarrow$ $f''_-(0) = \frac{2}{3}$

$\Rightarrow$ $\boxed{f \text{ non ha derivata seconda } \cancel{\text{in } x=0}}$

$f''(x) > 0 \iff \operatorname{tg} x > \sqrt{3} \iff x \in \left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right)$

$f''(x) < 0 \iff \operatorname{tg} x < \sqrt{3} \iff x \in \left(0, \frac{\pi}{3}\right)$

$f''(x) = 0$ mai.

f strett. concava in $\left[0, \frac{\pi}{3}\right)$

f strett. convessa in $\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right)$

$x = 0$ è un flesso (in cui non esiste f'')

Polinomi di Taylor

Sia $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ derivabile $\underbrace{\infty \text{ volte}}_{}$ in (a,b)
un numero qualsiasi di volte

$x_0\in(a,b)$.

- $f(x)=T_0(x)+o(1)$ per $x\to x_0$
  dove $T_0(x)=f(x_0)$
- $f(x)=T_1(x)+o(x-x_0)$ per $x\to x_0$
  dove $T_1(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$
- $f(x)=T_2(x)+o((x-x_0)^2)$ per $x\to x_0$
  dove $T_2(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2$
- $f(x)=T_3(x)+o((x-x_0)^3)$ per $x\to x_0$
  dove $T_3(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2+\frac{f'''(x_0)}{3!}(x-x_0)^3$

e questi sono gli unici polinomi di grado risp. 0, 1, 2, 3 per cui vale questa proprietà.

DEF. Sia $f:(a,b)\to\mathbb{R}$, $x_0\in(a,b)$.
f sia derivabile n volte in x_0
Definiamo il **polinomio di Taylor di ordine n**. centrato in x_0 (oppure con punto iniziale x_0) il polinomio

$$T_n(x)=T_n(x;x_0)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2+$$
$$+\frac{f'''(x_0)}{3!}(x-x_0)^3+\dots\dots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n=$$
$$=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$$

dove $f^{(0)}(x)=f(x)$

Esempio: calcoliamo il polinomio di Taylor di ordine n centrato in $x_0 = 4$ di $f(x) = \sqrt{x}$

$$f(x) = \sqrt{x} \qquad f(4) = \sqrt{4} = 2.$$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \qquad f'(4) = \frac{1}{4}$$

$$f''(x) = \frac{1}{2} x^{-1/2} = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right) x^{-3/2} = -\frac{1}{4\,x\sqrt{x}}; \qquad f''(4) = -\frac{1}{32}$$

$$f'''(x) = -\frac{1}{4} \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) x^{-5/2} = \frac{3}{8\,x^2\sqrt{x}}; \qquad f'''(4) = \frac{3}{8 \cdot 16 \cdot 2} = \frac{3}{256}$$

$$T_3(x) = 2 + \frac{1}{4}(x-4) - \frac{1}{64}(x-4)^2 + \frac{1}{512}(x-4)^3$$

$$\sqrt{x} = T_3(x) + o\left((x-4)^3\right) \qquad \text{per } x \to 4$$

OSS

(0) $\boxed{T_n(x_0) = f(x_0).}$

$$T_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2 +$$
$$+ \frac{f'''(x_0)}{3!}(x-x_0)^3 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n =$$

$$T_n'(x) = f'(x_0) + f''(x_0)(x-x_0) + \frac{f'''(x_0)}{2}(x-x_0)^2 + \ldots$$
$$+ \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{(n-1)!}(x-x_0)^{n-1}$$

OSS. Questo è il polinomio di Taylor di ordine $n-1$ di f'.

$$\Rightarrow \boxed{T_n'(x_0) = f'(x_0)}$$

Cioè: la derivata del polinomio di Taylor è il polinomio di Taylor della derivata.

$$T_n''(x) = f''(x_0) + f'''(x_0)(x-x_0) + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{(n-2)!}(x-x_0)^{n-2}$$

$$\Rightarrow \boxed{T_n''(x_0) = f''(x_0)}$$

$\vdots$

Proseguendo, si ottiene che

$$\boxed{T_n^{(k)}(x_0) = f^{(k)}(x_0) \quad \forall k = 0,1,2,\dots n \qquad (*)}$$

Quindi il polinomio di Taylor di ordine n con punto iniziale x_0 di f è l'unico polinomio di grado $\leq n$ che verifica $(*)$.

TEOREMA di PEANO Sia $f:(a,b) \to \mathbb{R}$ derivabile n volte in $x_0 \in (a,b)$. Sia $T_n(x)$ il polinomio di Taylor di ordine n con punto iniziale x_0 relativo a f, cioè

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$$

Allora

$$\boxed{f(x) = T_n(x) + o((x-x_0)^n) \quad \text{per } x \to x_0} \; (**)$$

cioè $\displaystyle\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - T_n(x)}{(x-x_0)^n} = 0$.

Inoltre $T_n(x)$ è l'unico polinomio di grado $\leq n$ che verifica $(**)$.

Dim lo dimostriamo sotto l'ipotesi aggiuntiva che f sia derivabile n volte in un intorno di x_0 con derivate continue.

La dim. è la stessa già vista per $n=0,1,2,3$.

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-T_n(x)}{(x-x_0)^n}=\left(\frac{0}{0}\right)\overset{?}{\underset{H}{=}}\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)-T_n'(x)}{n\underbrace{(x-x_0)^{n-1}}_{\downarrow\ \text{se } n>1\ 0}}=$$

$f'(x_0)-T_n'(x_0)$
$\overset{\shortparallel}{0}$

$$=\left(\frac{0}{0}\right)\overset{?}{\underset{H}{=}}\lim_{x\to x_0}\frac{f''(x)-T_n''(x)}{n(n-1)(x-x_0)^{n-2}}=(\text{itero } n \text{ volte})\dots$$

$$\dots=\lim_{x\to x_0}\frac{f^{(n)}(x)-T_n^{(n)}(x)}{n!}=0$$

L'unicità segue dal fatto che il polinomio di Taylor è l'unico che verifica (*) e quindi il procedimento precedente a un certo punto darebbe risultato non nullo. $\square$

Cominciamo a scrivere i polinomi di Taylor delle funzioni elementari con pto iniziale $x_0=0$ (polinomio di Maclaurin).

$$f(x)=e^x \qquad f^{(k)}(x)=e^x$$

$$f^{(k)}(x_0)=f^{(k)}(0)=e^0=1.$$

$$T_n(x)=1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3!}+\dots+\frac{x^n}{n!}$$

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3!}+\dots+\frac{x^n}{n!}+o(x^n) \quad \text{per } x\to 0$$

$$=\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}+o(x^n)$$

Per $n=1$ $\qquad e^x = 1 + x + o(x)$ $\qquad$ per $x \to 0$

$e^x - 1 = x + o(x)$ $\qquad$ "

$e^x - 1 \sim x$ $\qquad$ per $x \to 0$