L'ultima volta abbiamo definito il <u>coeff^{te} multinomiale</u>

$$\binom{n}{k_1, k_2, \dots, k_h} = \frac{n!}{k_1!\, k_2! \dots k_h!}$$

$(n \in \mathbb{N};\ k_1, k_2, \dots k_h \in \mathbb{N}:\ k_1 + k_2 + \dots + k_h = n)$

si interpreta come: i modi possibili di disporre n oggetti distinti in h cassetti in modo che:

- nel 1° cassetto ci siano k_1 elementi;
- nel 2° " " " k_2 " ;

- - - -

- nell'h-esimo cassetto ci siano k_h elementi.

Qualche lezione fa avevamo calcolato il numero di anagrammi di MATEMATICA

Avevamo trovato il numero $\dfrac{10!}{3!\,2!\,2!}$

Si può affrontare il problema in altro modo:

Abbiamo 10 lettere: ★★★★★★★★★★

di queste 10 lettere voglio metterne 3 nel "cassetto" delle A

2 nel cassetto delle M
2 " " " T
1 " " " E
1 " " " C
1 " " " I

In quanti modi diversi posso farlo? sono 6 cassetti con numeri ciascuno pari 3, 2, 2, 1, 1, 1

$$\binom{10}{3,2,2,1,1,1} = \frac{10!}{3!\,2!\,2!\,\underset{\substack{\shortparallel\\1}}{1!}\,\underset{\substack{\shortparallel\\1}}{1!}\,\underset{\substack{\shortparallel\\1}}{1!}} = \frac{10!}{3!\,2!\,2!} \text{ come prima.}$$

Principio di induzione

E' una tecnica dimostrativa per provare che una certa affermazione $P(n)$ (dipendente da $n \in \mathbb{N}$) è vera $\forall n \in \mathbb{N}$.
Si basa su due passi.

1) $P(0)$ è vera
(oppure: $P(1)$ è vera)

2) supponendo vera $P(n)$, si dimostra che è vera $P(n+1)$.

In questo modo si prova che $P(n)$ è vera $\forall n \in \mathbb{N}$.

Per esempio, proviamo che $\forall n \in \mathbb{N}$ si ha.

$$\underbrace{1+2+3+\dots+n}_{\sum_{k=1}^{n} k} = \frac{n(n+1)}{2} \qquad P(n)$$

Per es. $1+2+3+\dots+100 = \frac{100 \cdot 101}{2} = 5050$

1) $P(1)$ è vera? $\quad 1 \stackrel{?}{=} \frac{1 \cdot 2}{2} \quad$ sì!

2) Supponiamo $P(n)$ vera per un certo $n \in \mathbb{N}$.
Proviamo che $P(n+1)$ è vera.

Sapendo che
$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$
voglio provare che $\sum_{k=1}^{n+1} k = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$

$$\sum_{k=1}^{n+1} k = \sum_{k=1}^{n} k + (n+1) \underset{\text{per ipotesi induttiva}}{=} \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) \stackrel{?}{=} \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

$$\frac{n(n+1)}{2} + (n+1) \overset{?}{=} \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

$$\Updownarrow \text{ divido per } n+1$$

$$\frac{n}{2} + 1 \overset{?}{=} \frac{n+2}{2}$$ ovviamente sì!

Esempio: $1+4+9+16+25+\dots+n^2 = ?$

Proveremo che $\forall n \in \mathbb{N}_+$

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = 1+4+9+\dots+n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \qquad P(n)$$

1) $P(1)$ è vera? $\quad 1 \overset{?}{=} \frac{1\cdot 2\cdot 3}{6}$ ok!

2) Supponendo vera $P(n)$ per un certo n, posso provare che $P(n+1)$ è vera?

Devo provare che

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^2 \overset{?}{=} \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$$

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^2 = \underbrace{\sum_{k=1}^{n} k^2}_{\text{uso l'ipotesi induttiva}} + (n+1)^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2$$

Devo solo provare che

$$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 \overset{?}{=} \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$$

$$\Updownarrow$$

$$\frac{n(2n+1)}{6} + n+1 \overset{?}{=} \frac{(n+2)(2n+3)}{6}$$

$$\Updownarrow$$

$$n(2n+1) + 6(n+1) \overset{?}{=} (n+2)(2n+3)$$

$$\cancel{2n^2} + \cancel{n} + \cancel{6n} + \cancel{6} \stackrel{?}{=} \cancel{2n^2} + \cancel{3n} + \cancel{4n} + \cancel{6} \qquad \text{ok!}$$

Esercizio per casa: Provare che

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2 (n+1)^2}{4} \qquad \forall n \in \mathbb{N}_+$$

Difetto: le dimostrazioni per induzione non sono costruttive.

Per confronto, proviamo che $\sum_{k=1}^{n} k = ?$

Supp. n pari, per es. $n = 100$

$$\underbrace{1 + 2 + 3 + \dots \qquad + 98 + 99 + 100}$$

$$\underbrace{(1+100)}_{101} + \underbrace{(2+99)}_{101} + \underbrace{(3+98)}_{101} + \dots + \underbrace{(50+51)}_{101}$$

Il risultato è: $101 \cdot \left(\frac{100}{2}\right) = \frac{100 \cdot 101}{2}$

numero delle coppie

$$1 + 2 + 3 + \dots \qquad + (n-2) + (n-1) + n$$

n pari.

$$\underbrace{(1+n)}_{n+1} + \underbrace{(2+(n-1))}_{n+1} + \underbrace{(3+(n-2))}_{n+1} + \dots + (\qquad) = (n+1) \cdot \frac{n}{2}$$

- l'abbiamo provata per n pari.

– Per n dispari:

$$\underbrace{0 + 1 + 2 + 3 + \dots \qquad + 99} =$$

$$= \underbrace{(0+99)}_{99} + \underbrace{(1+98)}_{99} + \underbrace{(2+97)}_{99} + \dots + \underbrace{(49+50)}_{99} = 99 \cdot \frac{100}{2}$$

e allo stesso si vede facilmente che per ogni n dispari

$$1+2+\ldots+n = n\cdot\frac{(n+1)}{2}$$

Proviamo che (dis. di Bernoulli).

$$(1+x)^n \geq 1+nx \qquad \forall x \geq -1 \qquad P(n)$$

1) $P(0)$ è vera?

$$(1+x)^0 \overset{?}{\geq} 1+0x \qquad 1 \overset{?}{\geq} 1 \qquad \text{ok.}$$

1') $P(1)$ è vera?

$$(1+x)^1 \overset{?}{\geq} 1+1\cdot x \qquad \text{ok anzi c'è uguaglianza.}$$

2) Supponendo vera $P(n)$, proviamo $P(n+1)$

$$(1+x)^{n+1} \overset{?}{\geq} 1+(n+1)x$$

$$(1+x)^{n+1} = \underbrace{(1+x)^n}_{\substack{\geq \text{ per ipot. induttiva} \\ 1+nx}}\overbrace{(1+x)}^{\geq 0} \geq (1+nx)(1+x) \overset{?}{\geq} 1+(n+1)x$$

Quindi basta provare che

$$(1+nx)(1+x) \overset{?}{\geq} 1+(n+1)x$$

$$\cancel{1}+\cancel{x}+\cancel{nx}+nx^2 \overset{?}{\geq} \cancel{1}+\cancel{nx}+\cancel{x}$$

$$nx^2 \overset{?}{\geq} 0 \qquad \text{sì!}$$